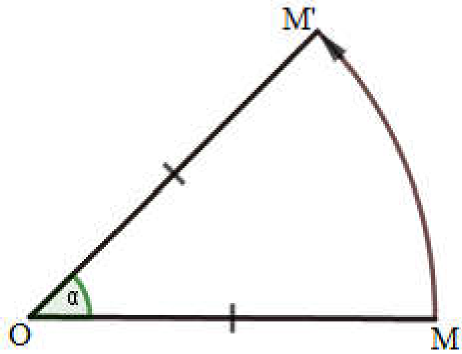
PHÉP QUAY

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa.



Trong mặt phẳng cho điểm O cố định và góc lượng giác α không đổi. Phép biến hình biến mỗi điểm M

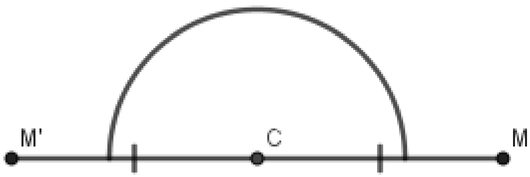
thành điểm M' sao cho $OM = OM'$ và $(OM, OM') = \alpha$ được gọi là phép quay tâm O góc quay α.

Kí hiệu: $Q_{(O,\alpha)}$ (O là tâm phép quay, α là góc quay lượng giác).

$$Q_{(O,\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (OM', OM) = \alpha \end{cases}$$

Nhận xét:

- Chiều dương của phép quay là chiều dương của đường tròn lượng giác (chiều kim đồng hồ).
- Với $k \in \mathbb{Z}$ ta luôn có:
  Phép quay:
  $Q_{(O,2k\pi)}$ là phép đồng nhất;
  $Q_{(O,(2k+1)\pi)}$ là phép đối xứng tâm.



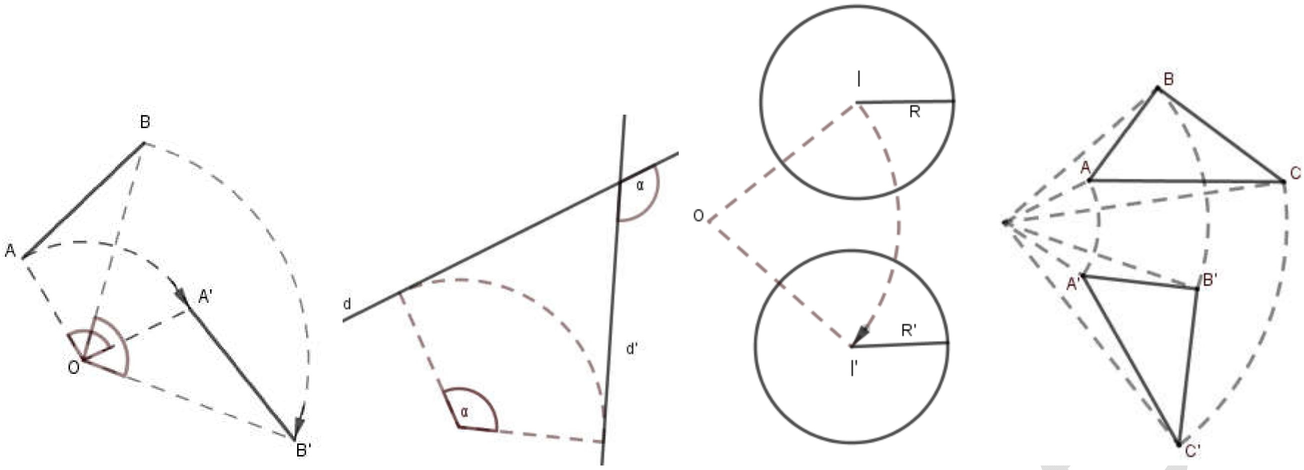
Study tip: $\varphi = 90° \Rightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

2. Tính chất.

Tính chất 1: Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Tính chất 1: Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Study tip. Phép quay biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự.



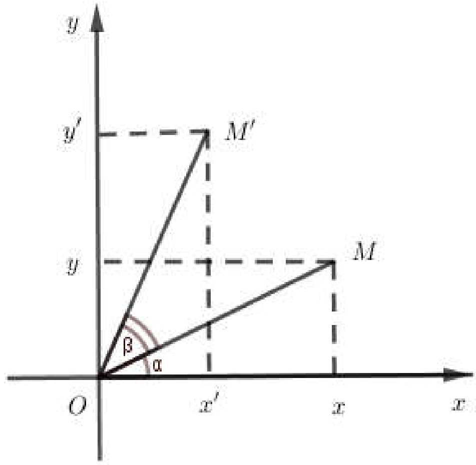
Nhận xét: Gọi α là góc của phép quay biến đường thẳng d thành đường thẳng d':

$Q_{(O,\alpha)}(d) = d' \Rightarrow$ Góc $(d, d') = \alpha$ nếu $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$; góc $(d, d') = \pi - \alpha$ nếu $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

3. Biểu thức tọa độ của phép quay

Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, xét phép quay $Q_{(I,\varphi)}$

Trường hợp 1: Khi tâm quay I trùng với gốc tọa độ O.



Đặt $OM = r$ và góc $(Ox, OM) = \alpha \Rightarrow$ góc $(Ox, OM') = \alpha + \varphi$

$$\Rightarrow M': \begin{cases} x' = r\cos(\alpha + \varphi) \\ y' = r\sin(\alpha + \varphi) \end{cases}$$

Hay $M': \begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases} (1)$

Nếu $Q_{(I,-\varphi)} M'(x; y) \to M(x, y)$ thì $M: \begin{cases} x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \\ y = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases} (2)$

Study tip:

- Nếu $\varphi = 90° \Rightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$
- Nếu $\varphi = -90° \Rightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$
- Nếu $\varphi = 180° \Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

Trường hợp 2: Khi tâm quay $I(x_0; y_0)$. Ta có:

$$\begin{cases} x'-x_0=(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\sin\varphi \\ y'-y_0=(x-x_0)\sin\varphi+(y-y_0)\cos\varphi \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x-x_0=(x'-x_0)\cos\varphi+(y'-y_0)\sin\varphi \\ y-y_0=-(x-x_0)\sin\varphi+(y-y_0)\cos\varphi \end{cases} \quad (4)$$

Study tip:

$Q_{(I,\varphi)}: M(x;y)\to M'(x';y')\Rightarrow(3)$

$Q_{(I,-\varphi)}: M'(x';y')\to M(x;y)\Rightarrow(4)$

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHÉP QUAY

DẠNG 1: KHAI THÁC ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ ỨNG DỤNG PHÉP QUAY

Phương pháp chung:

- Sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của phép quay.
- Xác định ảnh của một điểm, một hình qua phép quay.
- Tìm quỹ tích điểm thông qua phép quay.
- Các yếu tố liên quan đến phép quay là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông… từ đó ứng dụng phép quay để giải các bài toán hình học khác.

Ví dụ 1: Giả sử $Q_{(O,\varphi)}(M)\to M', Q_{(O,\varphi)}(N)\to N'$. Khi đó mệnh đề nào sau đây sai?

A. $(\overline{OM},\overline{OM'})=\varphi$. **B.** $\widehat{MON}=\widehat{M'ON'}$. **C.** $MN=M'N'$. **D.** $\Delta MON=\Delta M'ON'$.

Lời giải:

Đáp án A.

$Q_{(O,\varphi)}(M)\to M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM'=OM \\ (OM,OM')=\varphi \end{cases}$ với φ là góc lượng giác.

Trong khi đó đáp án A: $(\overline{OM},\overline{OM'})=\varphi$ (không là góc lượng giác)

Ví dụ 2: Có bao nhiêu điểm biến thành chính nó qua phép quay tâm O, góc quay $\alpha\neq k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

A. Không có. **B.** Một. **C.** Hai. **D.** Vô số.

Lời giải:

Đáp án B.

$Q_{(O,\alpha)}(M)\to M$ khi $M\equiv O$ tâm quay.

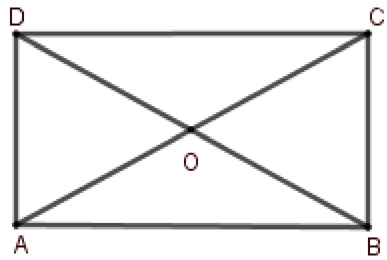
Ví dụ 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O, góc quay α, $0\le\alpha\le 2\pi$, biến hình chữ nhật thành chính nó?

A. Không có. **B.** Một. **C.** Hai. **D.** Vô số.

Lời giải:

Đáp án C.

Khi góc quay $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 2\pi$ thì phép quay biến hình chữ nhật thành chính nó.



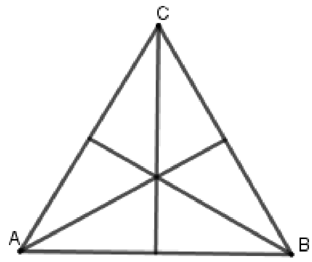
Ví dụ 4: Cho tam giác đều ABC có tâm O. Phép quay tâm O, góc quay φ biến tam giác đều thành chính nó thì góc quay φ là góc nào sau đây:

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{2\pi}{3}$. **C.** $\frac{3\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải:

Đáp án B.

$$Q_{(O,\varphi)}(A) = B \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OB \\ (OA, OB) = \varphi = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$



Ví dụ 5: Chọn 12 giờ làm mốc, khi kim giờ chỉ một giờ đúng thì kim phút đã quay được một góc bao nhiêu độ?

A. $360°$. **B.** $-360°$. **C.** $-180°$. **D.** $720°$.

Lời giải:

Đáp án B.

Khi kim giờ chỉ đến một giờ đúng thì kim phút quay được đúng một vòng theo chiều âm và được một góc là $-360°$.

Study tip: Chiều dương của góc quay là chiều ngược chiều kim đồng hồ, chiều âm của góc quay là chiều cùng chiều kim đồng hồ.

Ví dụ 6: Trong các chữ cái và số sau, dãy các chữ cái và số khi ta thực hiện phép quay tâm A, góc quay $180°$ thì ta được một phép đồng nhất (A là tâm đối xứng của các chữ cái hoặc số đó).

A. $X, L, 6, 1, U$. **B.** $O, Z, V, 9, 5$. **C.** $X, I, O, 8, S$. **D.** $H, J, K, 4, 8$.

Lời giải:

Đáp án C.

Ta có: $Q_{(A,180°)}(X) = X$; $Q_{(A,180°)}(I) = I$; $Q_{(A,180°)}(O) = O$;

$Q_{(A,180^\circ)}(8)=8;\ Q_{(A,180^\circ)}(S)=S.$

Study tip: Phép biến hình H thành chính nó ta được phép đồng nhất.

Ví dụ 7: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, M là trung điểm của AB, N là trung điểm của OA. Tìm ảnh của tam giác AMN qua phép quay tâm O góc quay 90°.

A. $\Delta BM'N'$ với M',N' lần lượt là trung điểm của BC,OB.

B. $\Delta CM'N'$ với M',N' lần lượt là trung điểm của BC,OC.

C. $\Delta DM'N'$ với M',N' lần lượt là trung điểm của DC,OD.

D. $\Delta DM'N'$ với M',N' lần lượt là trung điểm của AD,OD.

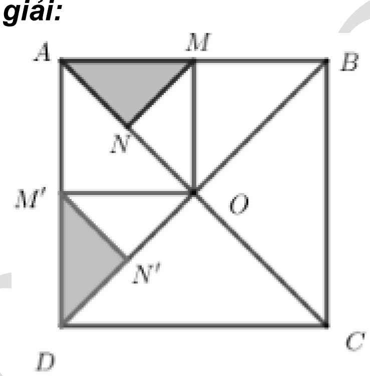
Lời giải:

Đáp án D.

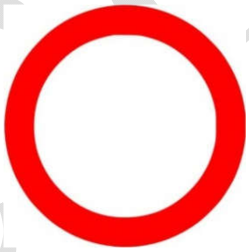
Ta có: $Q_{(O,90^\circ)}(A)=D$

$Q_{(O,90^\circ)}(M)=M'$ là trung điểm AD.

$Q_{(O,90^\circ)}(N)=N'$ là trung điểm OD.



Ví dụ 8: Gọi I là tâm đối xứng của các hình A,B,C,D. Khi thực hiện phép quay tâm I góc quay 180° thì hình nào luôn được phép đồng nhất?

A.  **B.**  **C.**  **D.** 

Lời giải:

Đáp án C.

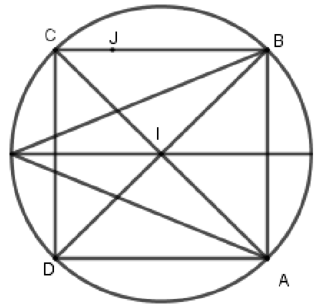
Từ hình C ta có qua phép $Q_{(I,180^\circ)}$ ta luôn được một hình là chính nó.

Ví dụ 9: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh $\sqrt{2}$ và có các đỉnh vẽ theo chiều dương. Các đường chéo cắt nhau tại I. Trên cạnh BC lấy $BJ=1$. Xác định phép biến đổi $\overrightarrow{AI}$ thành $\overrightarrow{BJ}$ biết O là tâm quay.

A. $\overrightarrow{BJ}=Q_{(O,45^\circ)}\left(\overrightarrow{AI}\right)$. **B.** $\overrightarrow{BJ}=Q_{(O,-45^\circ)}\left(\overrightarrow{AI}\right)$. **C.** $\overrightarrow{BJ}=Q_{(O,135^\circ)}\left(\overrightarrow{AI}\right)$. **D.** $\overrightarrow{BJ}=Q_{(O,-135^\circ)}\left(\overrightarrow{AI}\right)$.

Lời giải:

Đáp án A.



Ta có: $AI = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow AI = BJ$ lại có $\left(AI, BJ\right) = 45°$

$\Rightarrow BJ = Q_{(O,45°)}\left(AI\right)$ tâm O là giao điểm của trung trực AB và cung chứa góc 45° đi qua $A, B \Rightarrow \overrightarrow{BJ} = Q_{(O,45°)}\left(\overrightarrow{AI}\right)$.

Ví dụ 10: Cho đường thẳng d và điểm O cố định không thuộc d, M là điểm di động trên d. Tìm tập hợp điểm N sao cho tam giác MON đều.

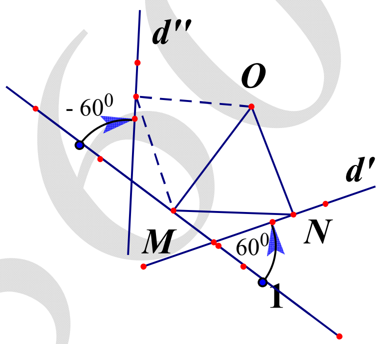
A. N chạy trên d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O,60°)}$.

B. N chạy trên d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O,-60°)}$.

C. N chạy trên d' và d'' lần lượt là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O,60°)}$ và $Q_{(O,-60°)}$.

D. N là ảnh của O qua phép quay $Q_{(O,60°)}$.

Đáp án C



ΔOMN đều $\Rightarrow OM = ON$ và $\widehat{NOM} = 60^0$

Vì vậy khi chạy trên d thì N chạy trên d' là ảnh của d qua $Q_{(O,60^0)}$ và N chạy trên d'' là ảnh của d qua $Q_{(O,-60^0)}$.

DẠNG 2. Xác định ảnh của điểm, đường thẳng qua phép quay bằng phương pháp tọa độ

Phương pháp chung:

1.Xác định ảnh của một điểm qua phép quay.

- Sử dụng biểu thức tọa độ trong các biểu thức đã nêu.

2. Xác định ảnh Δ' của đường thẳng Δ qua phép quay.

Cách 1: Chọn hai điểm A, B phân biệt trên Δ, Xác định ảnh A', B' tương ứng. Đường thẳng Δ' cần tìm là đường thẳng qua hai ảnh A', B'.