PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa.

Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.

Nhận xét:

- Các phép Đồng nhất, tịnh tiến, đối xứng tâm, đối xứng trục và phép quay là những phép dời hình

- Phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép dời hình cũng là một phép dời hình.

2. Tính chất.

Phép dời hình:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa chúng

- Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó

- Biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó

- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính

3. Hai hình bằng nhau

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia

B. CÁC BÀI TOÁN VỀ PHÉP DỜI HÌNH

Ví dụ 1: Phép biến hình nào sau đây là một phép dời hình?

A. Phép biến mọi điểm M thành điểm M' sao cho O là trung điểm MM', với O là điểm cố định cho trước.

B. Phép chiếu vuông góc lên đường thẳng *d*.

C. Phép biến mọi điểm M thành điểm O cho trước.

D. Phép biến mọi điểm M thành điểm M' là trung điểm của đoạn OM, với O là một điểm cho trước.

Lời giải:

Đáp án A

Với mọi điểm A,B tương ứng có ảnh A',B' qua phép biến hình với quy tắc O là trung điểm tương ứng $\Rightarrow AB = A'B' \Rightarrow$ Đây là phép dời hình.

Ví dụ 2: Xét hai phép biến hình sau, đâu là phép dời hình?

(I) Phép biến hình $F_1 : M_1(x_1; y_1) \to M_1'(-y_1; x_1)$

(II) Phép biến hình $F_2 : M_2\left(x_2;y_2\right) \to M_2'\left(2x_2;2y_2\right)$

A. Chỉ phép biến hình (I).
B. Chỉ phép biến hình (II).
C. Cả hai phép biến hình (I) và (II).
D. Cả hai phép biến hình (I) và (II) đều không là phép dời hình.

Lời giải:

Đáp án A

Chọn hai điểm $M\left(x_M;y_M\right), N\left(x_N;y_N\right)$ bất kỳ.

Xét phép biến hình (I) có: $F_1\left(M\right)=M'\left(-y_M;x_M\right); F_1\left(N\right)=N'\left(-y_N;x_N\right) \Rightarrow MN = M'N' = \sqrt{\left(x_M-x_N\right)^2+\left(y_M-y_N\right)^2}$

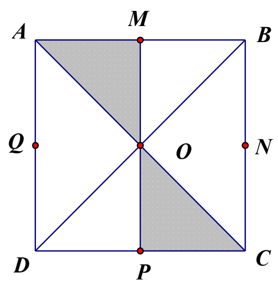
Xét tương tự với phép biến hình (II) không là phép dời hình.

Ví dụ 3: Cho hình vuông tâm O. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Phép dời hình nào sau đây biến tam giác AMO thành tam giác CPO?
A. Phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{AM}$.
B. Phép đối xứng trục MP.
C. Phép quay tâm O góc quay 180^0.
D. Phép quay tâm O góc quay -180^0.

Lời giải:

Đáp án D

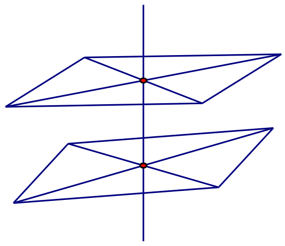
Ta có: $\begin{cases} Q_{\left(O;-180^0\right)}\left(A\right)=C \\ Q_{\left(O;-180^0\right)}\left(M\right)=P \Rightarrow Q_{\left(O;-180^0\right)} : \Delta AMO \to \Delta CPO \\ Q_{\left(O;-180^0\right)}\left(O\right)=O \end{cases}$



Ví dụ 4: Cho hai hình bình hành. Hãy chỉ ra một đường thẳng chia hai hình bình hành đó thành hai phần bằng nhau.
A. Đường thẳng đi qua hai tâm của hai hình bình hành.
B. Đường thẳng đi qua hai đỉnh của hai hình bình hành.
C. Đường thẳng đi qua tâm của hình bình hành thứ nhất và một đỉnh của hình bình hành còn lại.
D. Đường chéo của một trong hai hình bình hành đó.

Lời giải:

Đáp án A



Ví dụ 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(-3;2), B(4;5), C(-1;3)$. Gọi $\Delta A_1B_1C_1$ là ảnh của ΔABC qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc -90^0 và phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}=(0;1)$. Khi đó tọa độ các đỉnh của $\Delta A_1B_1C_1$ là:

A. $A_1(1;2), B_1(-1;4), C_1(3;5)$.
B. $A_1(2;-3), B_1(5;-4), C_1(3;-1)$.
C. $A_1(5;-4), B_1(2;-3), C_1(3;-1)$.
D. $A_1(2;4), B_1(5;-3), C_1(3;2)$.

Lời giải:

Đáp án D

$Q_{(O;90^0)}:\Delta ABC \to \Delta A'B'C' \Rightarrow A'(2;3), B'(5;-4), C'(3;1)$

$T_{\vec{v}}:\Delta A'B'C' \to \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow A_1(2;4), B_1(5;-3), C_1(3;2)$

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:3x+y+3=0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của *d* qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}(-2;1)$ và phép quay tâm O góc quay 180^0.

A. $-6x-2y-7=0$.
B. $-3x-y+8=0$.
C. $3x+y-6=0$.
D. $6x+2y-15=0$.

Lời giải:

Đáp án B.

$T_{\vec{v}}(d)=d'' \Rightarrow d'':3x+y+8=0$;

$Q_{(O;180^0)}(d'')=d' \Rightarrow d'$ là ảnh của d'' qua phép đối xứng tâm O.

$\Rightarrow d':-3x-y+8=0$

Lời giải:

$T_{\vec{v}}(d)=d'$, $Q_{(O,180^0)}(d)=d' \Rightarrow d'$ có dạng $3x+y+c=0$.

Chọn $M(0;-3)\in d \Rightarrow T_{\vec{v}}(M)=M'(-2;-2)\in d' \Rightarrow c=8 \Rightarrow d':3x+y+8=0$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $d'':-3x-y+8=0$.

Ví dụ 7: Nếu thực hiện liên tiếp hai phép quay cùng tâm $Q_{(O,\varphi_1)}$ và phép $Q_{(O,\varphi_2)}$ thì kết quả là:

A. một phép đồng nhất.
B. phép tịnh tiến.
C. phép quay tâm O góc quay $\varphi_1+\varphi_2$.
D. phép quay tâm O góc quay là $|\varphi_1+\varphi_2|$.

Lời giải::

Gọi $M' = Q_{(O,\varphi_1)}(M)$, $M'' = Q_{(O,\varphi_2)}(M')$

Ta có: $OM' = OM, (OM, OM') = \varphi_1$ và $OM'' = OM', (OM', OM'') = \varphi_2$

$\Rightarrow OM'' = OM$ và $(OM'', OM) = \varphi_1 + \varphi_2$ hay $Q_{(O,\varphi_1+\varphi_2)}(M) = M''$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1: Phép biến hình nào sau đây là một phép dời hình?

A. Phép đồng nhất.

B. Phép chiếu lên một đường thẳng.

C. Phép biến mọi điểm M thành điểm O cho trước.

D. Phép biến mọi điểm M thành điểm là trung điểm của đoạn OM với O là điểm cho trước.

Câu 2: Phép biến hình F là phép dời hình khi và chỉ khi:

A. F biến đường thẳng thành đường thẳng song song với nó.

B. F biến đường thẳng thành chính nó.

C. F biến đường thẳng thành đường thẳng cắt nó.

D. F biến tam giác thành tam giác bằng nó.

Câu 3: Cho hai phép biến hình: $F_1: M(x;y) \to M'(x+1; y-3)$, $F_2: M(x;y) \to M'(-y;x)$. Phép biến hình nào trong hai phép biến hình trên là phép dời hình.

A. Chỉ phép biến hình F_1.

B. Chỉ phép biến hình F_2.

C. Cả hai phép biến hình F_1 và F_1 .

D. Cả hai phép biến hình F_1 và F_1 đều không là phép dời hình.

Câu 4: Cho một ngũ giác đều và một phép dời hình f. Biết rằng $f(A) = C$, $f(E) = B$ và $f(D) = A$. Ảnh của điểm C là:

A. A. **B.** B. **C.** C. **D.** E.

Câu 5: Cho hình chữ nhật và một phép dời hình F trong mặt phẳng. Biết rằng qua phép dời hình F tam giác ABC biến thành tam giác BAD, tam giác ADC biến thành tam giác nào sau đây?

A. CBA. **B.** BCD. **C.** DAB. **D.** BMD.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét biến hình $F: M(x;y) \to M'\left(\frac{1}{2}x; my\right)$. Với giá trị nào của m thì F là phép dời hình?

A. $m = 2$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 1$. **D.** không tồn tại m.

Câu 7: Cho hai điểm phân biệt A, B và F là phép dời hình, biết $F(A) = A; F(B) = B$. Giả sử N thuộc đường thẳng AB, $N \neq A, N \neq B$ và $F(N) = M$. Chọn khẳng định đúng?

A. $M \equiv A$. **B.** $M \equiv B$.

C. $M \equiv N$. **D.** Các khẳng định trên đều sai.

Câu 8: Cho ΔABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{CM}$. F là phép dời hình. Gọi $F(A) = A_1; F(B) = B_1; F(C) = C_1; F(M) = M_1$, biết $AB = 4$, $BC = 5$, $CA = 6$. Độ dài đoạn A_1M_1 bằng:

A. 116. **B.** $\sqrt{106}$. **C.** 57. **D.** 74.

Câu 9: Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Hai hình bằng nhau thì luôn phải trùng khít lên nhau.
B. Hai hình bằng nhau khi có phép dời hình biến hình này thành hình kia.
C. Gọi A, B tương ứng là tập hợp điểm của hình H và H'.
D. Hai hình trùng khít lên nhau thì luôn phải bằng nhau.

Câu 10: Cho hai điểm A, B và phép dời hình F thỏa mãn $F(A)=A;\ F(B)=B$. Gọi C là điểm không thuộc đường thẳng AB. Biết $F(C)$ và C nằm cùng phía với AB. Với mọi M bất kì chọn khẳng định đúng.

A. $F(M)$ và M đối xứng nhau qua AB.
B. $F(M)$ và M đối xứng nhau qua BC.
C. $F(M)=M$ với mọi M.
D. $F(M)=A$.

Câu 11: Trong mặt phẳng xét hình (H) là hình gồm hai đường tròn tâm O và tâm O' có bán kính tương ứng là R và R' (với $R>R'$). Khi đó:

A. Đường nối tâm OO' sẽ chia hình (H) thành hai phần bằng nhau.
B. Đường vuông góc với đường nối tâm OO' và đi qua trung điểm của OO' sẽ chia hình (H) thành hai phần bằng nhau.
C. Đường nối hai điểm bất kì A, B (không trùng với OO') với A thuộc (O), B thuộc (O') sẽ chia hình (H) thành hai phần bằng nhau.
D. Mỗi đường thẳng bất kì đi qua O hoặc O' chia hình (H) thành hai phần bằng nhau.

Câu 12: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E, F, H, K, O, I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA, KF, HC, KO. Mệnh đề nào sau đây đúng:
A. Hai hình thang $AEJK$ và $FOIC$ bằng nhau.
B. Hai hình thang $BEJO$ và $FOIC$ bằng nhau.
C. Hai hình thang $AEJK$ và $DHOK$ bằng nhau.
D. Hai hình thang $BJEF$ và $ODKH$ bằng nhau.

Câu 13: Cho phép dời hình: $F:M(x;y)\to M'(x-3;y+1)$. Xác định ảnh của đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-2)^2=2$ qua phép dời hình F.

A. $(x-4)^2+(y+3)^2=2$.
B. $(x+2)^2+(y-1)^2=2$.
C. $(x+4)^2+(y-3)^2=2$.
D. $(x-2)^2+(y+1)^2=2$.

Câu 14: Trong mặt phẳng Oxy, cho các phép dời hình: $F_1:M(x;y)\to M'(x+2;y-4)$ và $F_2:M(x;y)\to M'(-x;-y)$. Tìm tọa độ ảnh của điểm $A(4;-1)$ qua F_1 rồi đến F_2, nghĩa là $F_2[F_1(A)]$.

A. $(4;1)$.
B. $(0;5)$.
C. $(-6;5)$.
D. $(6;5)$.

Câu 15: Mệnh đề nào sau đây là sai: Phép biến hình thực hiện:
A. qua hai phép đối xứng trục có các trục cắt nhau là một phép quay.
B. qua hai phép tịnh tiến ta được một phép tịnh tiến.
C. qua hai phép đối xứng tâm ta được phép tịnh tiến hoặc đối xứng tâm.
D. qua hai phép quay ta luôn được một phép đồng nhất.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: **Đáp án A.**
Phép đồng nhất bảo toàn khoảng cách hai điểm bất kì

Câu 2: **Đáp án D.**
F biến tam giác thành tam giác bằng nó tức bảo toàn khoảng cách hay độ dài các cạnh.

Câu 3: **Đáp án C.**
Xét hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ qua hai phép biến hình F_1 và F_2. Với phép biến hình

$F_1: A \to A'(x_A+1;y_A-3)$; $B \to B'(x_B+1;y_B-3)$ $\Rightarrow AB = A'B' = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Tương tự với phép biến hình F_2 thì $AB = A'B'$ nên ta chọn đáp án C

Câu 4: **Đáp án D**
Nếu $M = f(C)$ ta có $CA = CM$ (do $f(A) = C$) (1)

$CE = MB$ (do $f(E) = B$) (2)

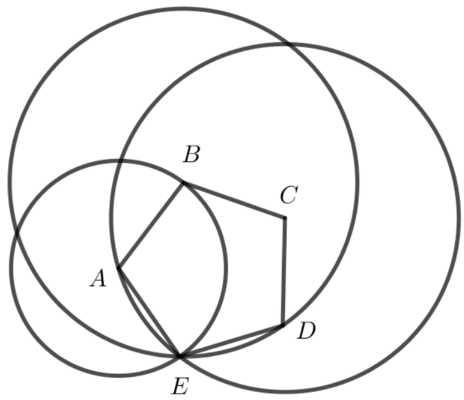
$CD = MA$ (do $f(D) = A$) (3)

$(1) \Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn tâm C bán kính CA

$(2) \Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn tâm B bán kính $CE = BE$

$(3) \Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn tâm A bán kính $CD = AE$.

Vậy $M \equiv E$



Câu 5: **Đáp án B**
Theo giả thiết $F: \Delta ABC \to \Delta BAD$

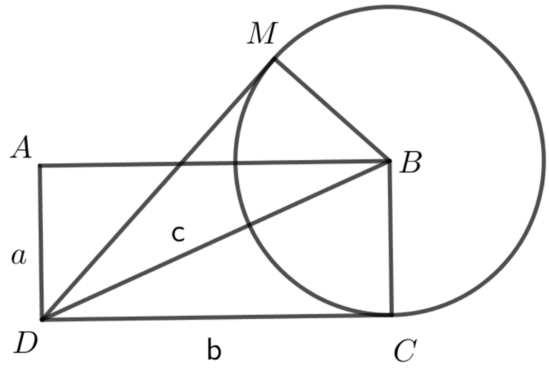
$\Rightarrow F(A) = B; F(B) = A; F(C) = D$.

Ta xác định ảnh của D qua phép dời hình F.

Giả sử $F(D) = E$, ta có $AD = BE, BD = AE, CD = DE$

Vậy điểm E là điểm chung của ba đường tròn. Đường tròn tâm B bán kính AD, tâm A bán kính BD và tâm D bán kính b.

Vậy $E \equiv C$ hay $F(D) = C \Rightarrow \Delta ADC \to \Delta BCD$ qua F



Câu 6: **Đáp án D.**
Lấy $O(0;0); A(2;2)$ ta có: $F(O) = O; F(A) = A'(1;2m)$

F là phép dời hình $\Leftrightarrow OA^2 = OA'^2 \Leftrightarrow 8 = 1 + 4m^2 \Leftrightarrow m^2 = \frac{7}{4}$.

Lấy điểm $B(2;1) \Rightarrow F(B) = B'(1;m)$

$OB^2 = OB'^2 \Leftrightarrow 5 = 1 + m^2 \Leftrightarrow 5 = 1 + \frac{7}{4}$ (vô lí) $\Rightarrow OB \neq OB'$. Nên F không là phép dời hình

Câu 7: **Đáp án C**
Ta có $F(AB) = AB \Leftrightarrow$ F là phép đồng nhất $\Rightarrow M \equiv N$

Câu 8: **Đáp án B.**
Theo tính chất phép dời hình $AM = A_1M_1$

$\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = 2\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow AM^2 = 4AC^2 + AB^2 - 4\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}\ \ (*)$

Ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = AC^2 + AB^2 - BC^2$, thế vào $(*)$ ta có: $AM^2 = 2AC^2 - AB^2 + 2BC^2 = 72 - 16 + 50 = 106 \Rightarrow AM = \sqrt{106}$

Câu 9: **Đáp án A**

Ví dụ: $T_{\vec{v}}(\Delta ABC) = \Delta A'B'C', \vec{v} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'$ và phân biệt.

Câu 10: **Đáp án C**

Gọi $C_1 = F(C)$ và $F(A) = A, F(B) = B$ nên theo tính chất phép dời hình ta có $\Delta ABC = \Delta ABC_1$

Có 2 khả năng xảy ra: C và C_1 đối xứng với nhau qua AB hoặc $C \equiv C_1$

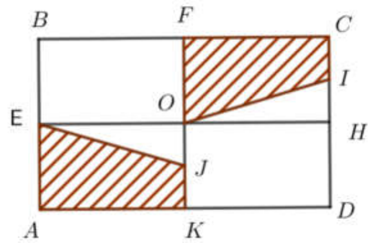
Theo giả thiết C và C_1 cùng phía so với $AB \Rightarrow C \equiv C_1$.

Với mọi M ta vẽ đường thẳng qua M cắt AB, AC tại D và E. Theo câu 7: $F(D) = D, F(E) = E \Rightarrow F(M) = M$.

Câu 11: **Đáp án A**

Câu 12: **Đáp án A**

Ta có hình thang $AEJK$ biến thành hình thang $FOIC$ qua hai phép dời hình là phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{EO}}$ và phép đối xứng trục EH.



Câu 13: **Đáp án C**

Ta có $F: M(x;y) \to M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' - 1 \end{cases}$

$M(x;y) \in (C): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 2 \Leftrightarrow (x'+4)^2 + (y'-3)^2 = 2$.

Vậy phương trình (C') là: $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 2$

Câu 14: **Đáp án C**

Ta có: $F_1 : A(4;-1) \to A'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = 6 \\ y' = -5 \end{cases}$

$F_2 : A'(6;-5) \to A''(x'';y'') \Rightarrow \begin{cases} x'' = -6 \\ y'' = 5 \end{cases}$

Câu 15: **Đáp án D**

Thật vậy xét 2 phép quay: $Q_{(O,\alpha)} : M \to M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (OM, OM') = \alpha \end{cases}$ và $Q_{(I,\varphi)} : M' \to M'' \Leftrightarrow \begin{cases} IM' = IM'' \\ (IM', IM'') = \varphi \end{cases}$ (với tâm $O \neq I, \alpha \neq \varphi$) $\Rightarrow \exists M \neq M' \Rightarrow$ Không có phép đồng nhất thỏa mãn.