

# PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

## A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

### 1. Định nghĩa

- Phương trình lôgarit là phương trình có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu lôgarit.
- Bất phương trình lôgarit là bất phương trình có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu lôgarit.

### 2. Phương trình và bất phương trình lôgarit cơ bản: cho $a, b > 0, a \neq 1$

- Phương trình lôgarit cơ bản có dạng:  $\log_a f(x) = b$
- Bất phương trình lôgarit cơ bản có dạng:  
 $\log_a f(x) > b; \log_a f(x) \geq b; \log_a f(x) < b; \log_a f(x) \leq b$

### 3. Phương pháp giải phương trình và bất phương trình lôgarit

#### • Đưa về cùng cơ số

$$\text{➤ } \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}, \text{ với mọi } 0 < a \neq 1$$

$$\text{➤ } \text{Nếu } a > 1 \text{ thì } \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$\text{➤ } \text{Nếu } 0 < a < 1 \text{ thì } \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

- Đặt ẩn phụ
- Mũ hóa

## B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

- Giải được phương trình và bất phương trình lôgarit bằng các phương pháp: đưa về lôgarit có cùng cơ số, mũ hóa và dùng ẩn phụ, sử dụng tính chất của hàm số

## C. MỘT SỐ DẠNG TOÁN CẦN LUYỆN TẬP

### 1. Điều kiện xác định của phương trình

Câu 1: Điều kiện xác định của phương trình  $\log(x^2 - x - 6) + x = \log(x + 2) + 4$  là

- A.  $x > 3$       B.  $x > -2$       C.  $\square \setminus [-2; 3]$       D.  $x > 2$

### 2. Kiểm tra xem giá trị nào là nghiệm của phương trình

Câu 2: Phương trình  $\log_3(3x - 2) = 3$  có nghiệm là:

- A.  $x = \frac{29}{3}$       B.  $x = \frac{11}{3}$       C.  $x = \frac{25}{3}$       D.  $x = 87$

### 3. Tìm tập nghiệm của phương trình

Câu 3: Phương trình  $\log_2^2(x+1) - 6\log_2\sqrt{x+1} + 2 = 0$  có tập nghiệm là:

- A.  $\{3; 15\}$       B.  $\{1; 3\}$       C.  $\{1; 2\}$       D.  $\{1; 5\}$

### 4. Tìm số nghiệm của phương trình

Câu 4: Số nghiệm của phương trình  $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$  là:



## 3.2 - LÔGARIT

### NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

**Câu 1.** Điều kiện xác định của phương trình  $\log_{2x-3} 16 = 2$  là:

- A.  $\frac{3}{2} < x \neq 2$ .      B.  $x \neq 2$ .      C.  $x \in \mathbb{R} \setminus \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ .      D.  $x > \frac{3}{2}$ .

#### Hướng dẫn giải

Biểu thức  $\log_{2x-3} 16$  xác định  $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 > 0 \\ 2x-3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x \neq 2$ , chọn đáp án A.

**Câu 2.** Điều kiện xác định của phương trình  $\log_x(2x^2 - 7x - 12) = 2$  là:

- A.  $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ .      B.  $x \in (-\infty; 0)$ .      C.  $x \in (0; 1)$ .      D.  $x \in (0; +\infty)$ .

#### Hướng dẫn giải

Biểu thức  $\log_x(2x^2 - 7x - 12)$  xác

$$\text{định} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 2x^2 - 7x + 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 2\left[\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{47}{16}\right] > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

chọn đáp án A.

**Câu 3.** Điều kiện xác định của phương trình  $\log_5(x-1) = \log_5 \frac{x}{x+1}$  là:

- A.  $x \in (1; +\infty)$ .      B.  $x \in (-1; 0)$ .      C.  $x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 0]$ .      D.  $x \in (-\infty; 1)$ .

#### Hướng dẫn giải

Biểu thức  $\log_5(x-1)$  và  $\log_5 \frac{x}{x+1}$  xác định  $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+1} > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

chọn đáp án A.

**Câu 4.** Điều kiện xác định của phương trình  $\log_9 \frac{2x}{x+1} = \frac{1}{2}$  là:

- A.  $x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 0]$ .      B.  $x \in (-1; +\infty)$ .      C.  $x \in (-1; 0)$ .      D.  $x \in (-\infty; 1)$ .

#### Hướng dẫn giải

Biểu thức  $\log_9 \frac{2x}{x+1}$  xác định :

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty), \text{ chọn đáp án A.}$$

**Câu 5.** Phương trình  $\log_2(3x-2) = 2$  có nghiệm là:

- A.  $x = 2$ .                      B.  $x = \frac{2}{3}$ .                      C.  $x = 1$ .                      D.  $x = \frac{4}{3}$ .

**Hướng dẫn giải**

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 > 0 \\ 3x-2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2, \text{ chọn đáp án A.}$$

**Câu 6.** Phương trình  $\log_2(x+3) + \log_2(x-1) = \log_2 5$  có nghiệm là:

- A.  $x = 2$ .                      B.  $x = 1$ .                      C.  $x = 3$ .                      D.  $x = 0$ .

**Hướng dẫn giải**

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ (x+3)(x-1) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 + 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \begin{cases} x = -8 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x = 2, \text{ chọn đáp án A.}$$

**Câu 7.** Phương trình  $\log_3(x^2-6) = \log_3(x-2) + 1$  có tập nghiệm là:

- A.  $T = \emptyset$ .                      B.  $T = \{0; 3\}$ .                      C.  $T = \{3\}$ .                      D.  $T = \{1; 3\}$ .

**Hướng dẫn giải**

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6 > 0 \\ x - 3 > 0 \\ x^2 - 6 = 3(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{6} \vee x > \sqrt{6} \\ x > 3 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset, \text{ chọn đáp án A}$$

**Câu 8.** Phương trình  $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$  có tập nghiệm là:

- A.  $\{2\}$ .                      B.  $\{1; 3\}$ .                      C.  $\{-1; 3\}$ .                      D.  $\{1\}$ .

**Hướng dẫn giải**

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \\ \log_2 [x(x-1)] = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x = 2, \text{ chọn đáp án A.}$$

**Câu 9.** Phương trình  $\log_2^2(x+1) - 6\log_2 \sqrt{x+1} + 2 = 0$  có tập nghiệm là:

- A.  $\{1; 3\}$ .                      B.  $\{3; 15\}$ .                      C.  $\{1; 2\}$ .                      D.  $\{1; 5\}$ .

**Hướng dẫn giải**

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ \log_2^2(x+1) - 3\log_2(x+1) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \begin{cases} \log_2(x+1) = 1 \\ \log_2(x+1) = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}, \text{ chọn A.}$$

**Câu 10.** Số nghiệm của phương trình  $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$  là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

**Hướng dẫn giải**

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > 0 \\ \log_4 x > 0 \\ \log_{2^2}(\log_2 x) + \log_2(\log_{2^2} x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{1}{2} \log_2(\log_2 x) + \log_2\left(\frac{1}{2} \log_2 x\right) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{1}{2} \log_2(\log_2 x) + \log_2 \frac{1}{2} + \log_2(\log_2 x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{3}{2} \log_2(\log_2 x) - 1 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_2(\log_2 x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_2 x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = 16 \end{cases} \Rightarrow x = 16, \text{ chọn đáp án A.}$$

**Câu 11.** Số nghiệm của phương trình  $\log_2 x \cdot \log_3(2x-1) = 2 \log_2 x$  là:

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

**Hướng dẫn giải**

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x-1 > 0 \\ \log_2 x \cdot \log_3(2x-1) = 2 \log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ \log_2 x [\log_3(2x-1) - 2] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ \log_2 x = 0 \\ \log_3(2x-1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}, \text{ chọn đáp án A.}$$

**Câu 12.** Số nghiệm của phương trình  $\log_2(x^3+1) - \log_2(x^2-x+1) - 2 \log_2 x = 0$  là:

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

**Hướng dẫn giải**

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^3+1 > 0 \\ x^2-x+1 > 0 \\ \log_2(x^3+1) - \log_2(x^2-x+1) - 2 \log_2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{x^3+1}{x^2(x^2-x+1)} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2(x^2-x+1)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset, \text{ chọn đáp án A.}$$

**Câu 13.** Số nghiệm của phương trình  $\log_5(5x) - \log_{25}(5x) - 3 = 0$  là :

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

**Hướng dẫn giải**

$$\begin{aligned} \text{PT} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_5(5x) - \log_{25}(5x) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_5(5x) - \frac{1}{2}\log_5(5x) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{1}{2}\log_5(5x) - 3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_5(5x) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 5x = 5^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = 5^5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5^5, \text{ chọn đáp án A} \end{aligned}$$

**Câu 14.** Phương trình  $\log_3(5x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(x^2+1) = 0$  có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  trong đó  $x_1 < x_2$ . Giá trị của

$P = 2x_1 + 3x_2$  là

A. 14.

B. 5.

C. 3.

D. 13.

**Hướng dẫn giải**

$$\begin{aligned} \text{PT} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3 > 0 \\ \log_3(5x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(x^2+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{5} \\ \log_3(5x-3) - \log_3(x^2+1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{5} \\ \log_3(5x-3) = \log_3(x^2+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{5} \\ 5x-3 = x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{5} \\ x^2-5x+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{5} \\ \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy  $2x_1 + 3x_2 = 2.1 + 3.4 = 14$ , chọn đáp án A.

**Câu 15.** Hai phương trình  $2\log_5(3x-1) + 1 = \log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1)$  và  $\log_2(x^2-2x-8) = 1 - \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$  lần lượt có 2 nghiệm duy nhất là  $x_1, x_2$ . Tổng  $x_1 + x_2$  là?

A. 8.

B. 6.

C. 4.

D. 10.

**Hướng dẫn giải**

**PT1:**  $2\log_5(3x-1) + 1 = \log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1)$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 > 0 \\ 2x+1 > 0 \\ 2\log_5(3x-1) + 1 = \log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ \log_5(3x-1)^2 + \log_5 5 = 3\log_5(2x+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ \log_5 5(3x-1)^2 = \log_5(2x+1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ 5(3x-1)^2 = (2x+1)^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ 5(9x^2 - 6x + 1) = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ 8x^3 - 33x^2 + 36x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{8} \Rightarrow x_1 = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

**PT2:**  $\log_2(x^2 - 2x - 8) = 1 - \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 8 > 0 \\ x + 2 > 0 \\ \log_2(x^2 - 2x - 8) = 1 - \log_{\frac{1}{2}}(x + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \vee x > 4 \\ x > -2 \\ \log_2(x^2 - 2x - 8) = 1 + \log_2(x + 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ \log_2(x^2 - 2x - 8) = \log_2 2(x + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x^2 - 2x - 8 = 2(x + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x^2 - 4x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x = -2 \Rightarrow x_2 = 6 \\ x = 6 \end{cases}$$

Vậy  $x_1 + x_2 = 2 + 6 = 8$ , chọn đáp án A.

**Câu 16.** Gọi  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình  $\log_x 2 - \log_{16} x = 0$ . Khi đó tích  $x_1 \cdot x_2$  bằng:

- A. 1.                      B. -1.                      C. 2.                      D. -2.

**Hướng dẫn giải**

**[Phương pháp tự luận]**

Điều kiện:  $0 < x \neq 1$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \log_x 2 - \log_{16} x = 0 \Leftrightarrow \log_x 2 - \log_{2^4} x = 0 \Leftrightarrow \log_x 2 - \frac{1}{4} \log_2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_x 2 - \frac{1}{4 \log_x 2} = 0 \Leftrightarrow \frac{4(\log_x 2)^2 - 1}{4 \log_x 2} = 0 \Leftrightarrow 4(\log_x 2)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_x 2)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x 2 = \frac{1}{2} \\ \log_x 2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = x^{\frac{1}{2}} \\ 2 = x^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy  $x_1 \cdot x_2 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ , chọn đáp án A.

**[Phương pháp trắc nghiệm]**

Đáp án B, D có tích âm thì có thể  $x_1 < 0$  hoặc  $x_2 < 0$  thì không thỏa mãn điều kiện của  $x$  nên loại.