

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

- Phương trình lôgarit là phương trình có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu lôgarit.
- Bất phương trình lôgarit là bất phương trình có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu lôgarit.

2. Phương trình và bất phương trình lôgarit cơ bản: cho $a, b > 0, a \neq 1$

- Phương trình lôgarit cơ bản có dạng: $\log_a f(x) = b$
- Bất phương trình lôgarit cơ bản có dạng:
 $\log_a f(x) > b; \log_a f(x) \geq b; \log_a f(x) < b; \log_a f(x) \leq b$

3. Phương pháp giải phương trình và bất phương trình lôgarit

• Đưa về cùng cơ số

$$\Rightarrow \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}, \text{ với mọi } 0 < a \neq 1$$

$$\Rightarrow \text{Nếu } a > 1 \text{ thì } \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Nếu } 0 < a < 1 \text{ thì } \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

- **Đặt ẩn phụ**
- **Mũ hóa**

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

- Giải được phương trình và bất phương trình lôgarit bằng các phương pháp: đưa về lôgarit có cùng cơ số, mũ hóa và dùng ẩn phụ, sử dụng tính chất của hàm số

C. MỘT SỐ DẠNG TOÁN CẦN LUYỆN TẬP

1. Điều kiện xác định của phương trình

Câu 1: Điều kiện xác định của phương trình $\log(x^2 - x - 6) + x = \log(x + 2) + 4$ là

- A. $x > 3$ B. $x > -2$ C. $\square \setminus [-2; 3]$ D. $x > 2$

2. Kiểm tra xem giá trị nào là nghiệm của phương trình

Câu 2: Phương trình $\log_3(3x - 2) = 3$ có nghiệm là:

- A. $x = \frac{29}{3}$ B. $x = \frac{11}{3}$ C. $x = \frac{25}{3}$ D. $x = 87$

3. Tìm tập nghiệm của phương trình

Câu 3: Phương trình $\log_2^2(x+1) - 6\log_2 \sqrt{x+1} + 2 = 0$ có tập nghiệm là:

- A. $\{3; 15\}$ B. $\{1; 3\}$ C. $\{1; 2\}$ D. $\{1; 5\}$

4. Tìm số nghiệm của phương trình

Câu 4: Số nghiệm của phương trình $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$ là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

5. Tìm nghiệm lớn nhất, hay nhỏ nhất của phương trình

Câu 5: Tìm nghiệm lớn nhất của phương trình $\log^3 x - 2 \log^2 x = \log x - 2$ là

- A. $x = \frac{1}{2}$ B. $x = \frac{1}{4}$ C. $x = 2$ D. $x = 4$

6. Tìm mối quan hệ giữa các nghiệm của phương trình (tổng, hiệu, tích, thương...)

Câu 6: Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $\log_x 2 - \log_{16} x = 0$. Khi đó tích $x_1 \cdot x_2$ bằng:

- A. 1 B. -1 C. -2 D. 2

7. Cho một phương trình, nếu đặt ẩn phụ thì thu được phương trình nào (ẩn t)

Câu 7: Nếu đặt $t = \log_2 x$ thì phương trình $\frac{1}{5 - \log_2 x} + \frac{2}{1 + \log_2 x} = 1$ trở thành phương trình nào

- A. $t^2 - 5t + 6 = 0$ B. $t^2 + 5t + 6 = 0$
 C. $t^2 - 6t + 5 = 0$ D. $t^2 + 6t + 5 = 0$

8. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình thỏa điều kiện về nghiệm số (có nghiệm, vô nghiệm, 2 nghiệm thỏa điều kiện nào đó...)

Câu 8: Tìm m để phương trình $\log_3^2 x + 2 \log_3 x + m - 1 = 0$ có nghiệm

- A. $m \leq 2$ B. $m < 2$ C. $m \geq 2$ D. $m > 2$

Câu 9: Tìm m để phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1; 3\sqrt{3}]$

- A. $m \in [0; 2]$ B. $m \in (0; 2)$ C. $m \in (0; 2]$ D. $m \in [0; 2)$

9. Điều kiện xác định của bất phương trình

Câu 10: Điều kiện xác định của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(4x+2) - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}} x$ là:

- A. $x > 1$ B. $x > 0$ C. $x > -\frac{1}{2}$ D. $x > -1$

10. Tìm tập nghiệm của bất phương trình

Câu 11: Bất phương trình $\log_2(2^x + 1) + \log_3(4^x + 2) \leq 2$ có tập nghiệm:

- A. $(-\infty; 0]$ B. $(-\infty; 0)$ C. $[0; +\infty)$ D. $(0; +\infty)$

Câu 12: Bất phương trình $\log_2(x^2 - x - 2) \geq \log_{0,5}(x-1) + 1$ có tập nghiệm là:

- A. $[1 + \sqrt{2}; +\infty)$ B. $[1 - \sqrt{2}; +\infty)$ C. $(-\infty; 1 + \sqrt{2}]$ D. $(-\infty; 1 - \sqrt{2}]$

11. Tìm nghiệm nguyên (tự nhiên) lớn nhất, nguyên (tự nhiên) nhỏ nhất của bất phương trình

Câu 13: Nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\log_2(\log_4 x) > \log_4(\log_2 x)$ là:

- A. 17 B. 16 C. 15 D. 18

12. Tìm điều kiện của tham số m để bất phương trình thỏa điều kiện về nghiệm số (có nghiệm, vô nghiệm, nghiệm thỏa điều kiện nào đó...)

Câu 14: Tìm m để bất phương trình $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2 \cdot 5^x - 2) \leq m$ có nghiệm $x \geq 1$

- A. $m \geq 3$ B. $m > 3$ C. $m \leq 3$ D. $m < 3$

3.2 - LÔGARIT

NHẬN BIẾT – THÔNG HIẾU

Câu 1. Điều kiện xác định của phương trình $\log_{2x-3} 16 = 2$ là:

- A. $\frac{3}{2} < x \neq 2$. B. $x \neq 2$. C. $x \in \mathbb{Q} \setminus \left[\frac{3}{2}; 2 \right]$. D. $x > \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Biểu thức } \log_{2x-3} 16 \text{ xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 > 0 \\ 2x-3 \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x \neq 2, \text{ chọn đáp án A.}$$

Câu 2. Điều kiện xác định của phương trình $\log_x(2x^2 - 7x - 12) = 2$ là:

- A. $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$. B. $x \in (-\infty; 0)$. C. $x \in (0; 1)$. D. $x \in (0; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Biểu thức $\log_x(2x^2 - 7x - 12)$ xác

$$\text{định} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 2x^2 - 7x + 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 2\left[\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{47}{16}\right] > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

chọn đáp án A.

Câu 3. Điều kiện xác định của phương trình $\log_5(x-1) = \log_5 \frac{x}{x+1}$ là:

- A. $x \in (1; +\infty)$. B. $x \in (-1; 0)$. C. $x \in \mathbb{Q} \setminus [-1; 0]$. D. $x \in (-\infty; 1)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Biểu thức } \log_5(x-1) \text{ và } \log_5 \frac{x}{x+1} \text{ xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+1} > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

chọn đáp án A.

Câu 4. Điều kiện xác định của phương trình $\log_9 \frac{2x}{x+1} = \frac{1}{2}$ là:

- A. $x \in \mathbb{Q} \setminus [-1; 0]$. B. $x \in (-1; +\infty)$. C. $x \in (-1; 0)$. D. $x \in (-\infty; 1)$.

Hướng dẫn giải

Biểu thức $\log_9 \frac{2x}{x+1}$ xác định :

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty), \text{ chọn đáp án A.}$$

Câu 5. Phương trình $\log_2(3x-2)=2$ có nghiệm là:

- A. $x=2$. B. $x=\frac{2}{3}$. C. $x=1$. D. $x=\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 > 0 \\ 3x-2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2, \text{ chọn đáp án A.}$$

Câu 6. Phương trình $\log_2(x+3)+\log_2(x-1)=\log_2 5$ có nghiệm là:

- A. $x=2$. B. $x=1$. C. $x=3$. D. $x=0$.

Hướng dẫn giải

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ (x+3)(x-1) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 + 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = -8 \Rightarrow x = 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2, \text{ chọn đáp án A.}$$

Câu 7. Phương trình $\log_3(x^2-6)=\log_3(x-2)+1$ có tập nghiệm là:

- A. $T=\emptyset$. B. $T=\{0;3\}$. C. $T=\{3\}$. D. $T=\{1;3\}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6 > 0 \\ x - 3 > 0 \\ x^2 - 6 = 3(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{6} \vee x > \sqrt{6} \\ x > 3 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset, \text{ chọn đáp án A}$$

Câu 8. Phương trình $\log_2 x + \log_2(x-1)=1$ có tập nghiệm là:

- A. $\{2\}$. B. $\{1;3\}$. C. $\{-1;3\}$. D. $\{1\}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \\ \log_2[x(x-1)] = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = -1 \Leftrightarrow x = 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2, \text{ chọn đáp án A.}$$

Câu 9. Phương trình $\log_2^2(x+1)-6\log_2\sqrt{x+1}+2=0$ có tập nghiệm là:

- A. $\{1;3\}$. B. $\{3;15\}$. C. $\{1;2\}$. D. $\{1;5\}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ \log_2^2(x+1) - 3\log_2(x+1) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \log_2(x+1) = 1 \Leftrightarrow x = 1 \\ \log_2(x+1) = 2 \Leftrightarrow x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x = 1 \Leftrightarrow x = 1 \\ x = 3 \end{cases}, \text{ chọn A.}$$

Câu 10. Số nghiệm của phương trình $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{PT} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > 0 \\ \log_4 x > 0 \\ \log_{2^2}(\log_2 x) + \log_2(\log_{2^2} x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{1}{2} \log_2(\log_2 x) + \log_2\left(\frac{1}{2} \log_2 x\right) = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{1}{2} \log_2(\log_2 x) + \log_2\frac{1}{2} + \log_2(\log_2 x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{3}{2} \log_2(\log_2 x) - 1 = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_2(\log_2 x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_2 x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = 16 \end{cases} \Rightarrow x = 16, \text{chọn đáp án A.} \end{aligned}$$

Câu 11. Số nghiệm của phương trình $\log_2 x \cdot \log_3(2x-1) = 2 \log_2 x$ là:

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{PT} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x-1 > 0 \\ \log_2 x \cdot \log_3(2x-1) = 2 \log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ \log_2 x [\log_3(2x-1) - 2] = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ \log_2 x = 0 \\ \log_3(2x-1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}, \text{chọn đáp án A.} \end{aligned}$$

Câu 12. Số nghiệm của phương trình $\log_2(x^3+1) - \log_2(x^2-x+1) - 2 \log_2 x = 0$ là:

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{PT} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^3 + 1 > 0 \\ x^2 - x + 1 > 0 \\ \log_2(x^3+1) - \log_2(x^2-x+1) - 2 \log_2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{x^3+1}{x^2(x^2-x+1)} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2(x^2-x+1)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset, \text{chọn đáp án A.} \end{aligned}$$

Câu 13. Số nghiệm của phương trình $\log_5(5x) - \log_{25}(5x) - 3 = 0$ là :

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn giải

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_5(5x) - \log_{\frac{1}{3}}(5x) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_5(5x) - \frac{1}{2}\log_5(5x) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{1}{2}\log_5(5x) - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \log_5(5x) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 5x = 5^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = 5^5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5^5, \text{chọn đáp án A}$$

Câu 14. Phương trình $\log_3(5x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(x^2+1) = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 trong đó $x_1 < x_2$. Giá trị của

$$P = 2x_1 + 3x_2 \quad \text{là}$$

A. 14.

B. 5.

C. 3.

D. 13.

Hướng dẫn giải

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3 > 0 \\ \log_3(5x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(x^2+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{5} \\ \log_3(5x-3) - \log_3(x^2+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{5} \\ \log_3(5x-3) = \log_3(x^2+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{5} \\ 5x-3 = x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{5} \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{5} \\ x=1 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

Vậy $2x_1 + 3x_2 = 2.1 + 3.4 = 14$, chọn đáp án A.

Câu 15. Hai phương trình $2\log_5(3x-1)+1=\log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1)$ và $\log_2(x^2-2x-8)=1-\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ lần lượt có 2 nghiệm duy nhất là x_1, x_2 . Tổng $x_1 + x_2$ là?

A. 8.

B. 6.

C. 4.

D. 10.

Hướng dẫn giải

$$\text{PT1: } 2\log_5(3x-1)+1=\log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1)$$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 > 0 \\ 2x+1 > 0 \\ 2\log_5(3x-1)+1=\log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ \log_5(3x-1)^2 + \log_5 5 = 3\log_5(2x+1) \\ \log_5 5(3x-1)^2 = \log_5(2x+1)^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ 5(9x^2 - 6x + 1) = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ 8x^3 - 33x^2 + 36x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{8} \Rightarrow x_1 = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

PT2: $\log_2(x^2 - 2x - 8) = 1 - \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

$$\begin{aligned} \text{PT} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 8 > 0 \\ x + 2 > 0 \\ \log_2(x^2 - 2x - 8) = 1 - \log_{\frac{1}{2}}(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \vee x > 4 \\ x > -2 \\ \log_2(x^2 - 2x - 8) = 1 + \log_2(x+2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ \log_2(x^2 - 2x - 8) = \log_2 2(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x^2 - 2x - 8 = 2(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x^2 - 4x - 12 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x = -2 \Rightarrow x_2 = 6 \\ x = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x_1 + x_2 = 2 + 6 = 8$, chọn đáp án A.

- Câu 16.** Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $\log_x 2 - \log_{16} x = 0$. Khi đó tích $x_1 \cdot x_2$ bằng:
 A. 1. B. -1. C. 2. D. -2.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Điều kiện: $0 < x \neq 1$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \log_x 2 - \log_{16} x = 0 \Leftrightarrow \log_x 2 - \log_{2^4} x = 0 \Leftrightarrow \log_x 2 - \frac{1}{4} \log_2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_x 2 - \frac{1}{4 \log_x 2} = 0 \Leftrightarrow \frac{4(\log_x 2)^2 - 1}{4 \log_x 2} = 0 \Leftrightarrow 4(\log_x 2)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_x 2)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x 2 = \frac{1}{2} \\ \log_x 2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = x^{\frac{1}{2}} \\ 2 = x^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy $x_1 \cdot x_2 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$, chọn đáp án A.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Đáp án B,D có tích âm thì có thể $x_1 < 0$ hoặc $x_2 < 0$ thì không thỏa mãn điều kiện của x nên loại.