

TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

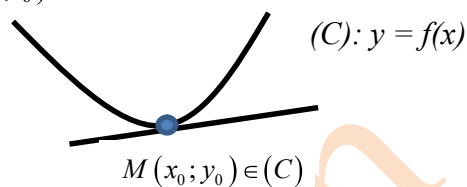
1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) ; $M(x_0; y_0) \in (C)$

- Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ là

$$d: y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

- Trong đó:

- $M(x_0; y_0)$ gọi là tọa độ của **tiếp điểm**.
- $k = f'(x_0)$ là **hệ số góc** của tiếp tuyến.



2. Ghi nhớ:

- Đường thẳng $d: y = \boxed{a}x + b$ ($a \neq 0$) thì có hệ số góc là $k = a$.
- Cho đường thẳng $d: y = ax + b$ ($a \neq 0$); $d': y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$). Khi đó:
 - $d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} k_d = k_{d'} \\ b \neq b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$.
 - $d \perp d' \Leftrightarrow k_d \cdot k_{d'} = -1 \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$.
- Nếu tiếp tuyến *song song* với đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) thì *hệ số góc* của tiếp tuyến là $k = a$. (**nhớ thử lại**).
- Nếu tiếp tuyến *vuông góc* với đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) thì *hệ số góc* của tiếp tuyến là $k = -\frac{1}{a}$.
- Trục hoành (trục Ox): $y = 0$.
- Trục tung (trục Oy): $x = 0$.

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

Bài toán 1: Các dạng phương trình tiếp tuyến thường gặp.

Cho hàm số $y = f(x)$, gọi đồ thị của hàm số là (C) .

Dạng 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ tại $M(x_0; y_0)$.

Phương pháp

- **Bước 1.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$ hệ số góc tiếp tuyến $k = y'(x_0)$.
- **Bước 2.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng:

$$\boxed{d: y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0}$$

Chú ý:

- Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 thì khi đó ta tìm y_0 bằng cách thế vào hàm số ban đầu, tức $y_0 = f(x_0)$. Nếu đề cho y_0 ta thay vào hàm số để giải ra x_0 .
- Nếu đề bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại các giao điểm của đồ thị $(C): y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = ax + b$. Khi đó các hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C) .

☞ Sử dụng máy tính:

Phương trình tiếp tuyến cần tìm có dạng $d: y = ax + b$.

- **Bước 1:** Tìm hệ số góc tiếp tuyến $k = y'(x_0)$. Nhập $\frac{d}{dx}(f(x))|_{x=x_0}$ bằng cách nhấn \boxed{SHIFT} $\boxed{\int}$ sau đó nhấn $\boxed{=}$ ta được a .
- **Bước 2:** Sau đó nhân với $\boxed{-X}$ tiếp tục nhấn phím $\boxed{+}$ $\boxed{f(x)}$ \boxed{CALC} $X = x_0$ nhấn phím $\boxed{=}$ ta được b .

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Cho hàm số $(C): y = x^3 + 3x^2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1; 4)$ là:

- A. $y = 9x - 5$. B. $y = 9x + 5$. C. $y = -9x - 5$. D. $y = -9x + 5$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow k = y'(1) = 9$. Phương trình tiếp tuyến tại $M(1; 2)$ là:

$$d: y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = 9(x - 1) + 4 \Leftrightarrow y = 9x - 5.$$

☞ Sử dụng máy tính:

- Nhập $\frac{d}{dx}(X^3 + 3X^2)|_{x=1}$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được 9.
- Sau đó nhân với $\boxed{(-X)}$ nhấn dấu $\boxed{+}$ $\boxed{X^3 + 3X^2}$ \boxed{CALC} $X = 1$ nhấn dấu $\boxed{=}$ ta được -5 .

Vậy phương trình tiếp tuyến tại M là: $y = 9x - 5$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M thuộc (C) và có hoành độ bằng 3.

- A. $y = -18x + 49$. B. $y = -18x - 49$. C. $y = 18x + 49$. D. $y = 18x - 49$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = -6x^2 + 12x$

$$x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -5 \Rightarrow M(3; -5) \Rightarrow k = y'(3) = -18.$$

Phương trình tiếp tuyến tại M là: $y = -18(x - 3) - 5 \Rightarrow y = -18x + 49$.

Sử dụng máy tính:

- Nhập $\frac{d}{dx}(-2X^3 + 6X^2 - 5)\Big|_{x=3}$ nhấn dấu \equiv ta được -18 .
- Sau đó nhân với $(-X)$ nhấn dấu $+$ $-2X^3 + 6X^2 - 5$ $CALC$ $X=3$ nhấn dấu \equiv ta được 49 .

Vậy phương trình tiếp tuyến tại M là: $y = -18x + 49$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $(C): y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hoành độ $x_0 > 0$, biết $y''(x_0) = -1$ là:

- A. $y = -3x + \frac{5}{4}$. B. $y = -3x + 1$. C. $y = -3x - 2$. D. $y = -3x + \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = x^3 - 4x, y'' = 3x^2 - 4$.

Mà $y''(x_0) = -1 \Rightarrow 3x_0^2 - 4 = -1 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$ (vì $x_0 > 0$).

$\Rightarrow y_0 = -\frac{7}{4} \Rightarrow k = y'(1) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến tại M là: $d: y = -3(x-1) - \frac{7}{4} \Rightarrow y = -3x + \frac{5}{4}$.

Sử dụng máy tính:

- Nhập $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}X^4 - 2X^2\right)\Big|_{x=1}$ nhấn dấu \equiv ta được -3 .
- Sau đó nhân với $(-X)$ nhấn dấu $+$ $\frac{1}{4}X^4 - 2X^2$ $CALC$ $X=1$ nhấn dấu \equiv ta được $\frac{5}{4}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $d: y = -3x + \frac{5}{4}$.

Dạng 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ có hệ số góc k cho trước.

Phương pháp

- **Bước 1.** Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm và tính $y' = f'(x)$.
- **Bước 2.** Hệ số góc tiếp tuyến là $k = f'(x_0)$. Giải phương trình này tìm được x_0 , thay vào hàm số được y_0 .
- **Bước 3.** Với mỗi tiếp điểm ta tìm được các tiếp tuyến tương ứng.

$$d: y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Chú ý: Đề bài thường cho hệ số góc tiếp tuyến dưới các dạng sau:

- Tiếp tuyến $d // \Delta: y = ax + b \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k = a$.
- Tiếp tuyến $d \perp \Delta: y = ax + b \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k = -\frac{1}{a}$.
- Tiếp tuyến tạo với trục hoành một góc α thì hệ số góc của tiếp tuyến d là $k = \pm \tan \alpha$.

☞ **Sử dụng máy tính:**

Nhập: $k(-X) + f(x)$ CALC $X = x_0$ nhấn dấu \equiv ta được b . Phương trình tiếp tuyến là $d: y = kx + b$.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1. Cho hàm số $(C): y = x^3 - 3x + 2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến đó bằng 9 là:

A. $\begin{cases} y = 9x - 14 \\ y = 9x + 18 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y = 9x + 15 \\ y = 9x - 11 \end{cases}$ C. $\begin{cases} y = 9x - 1 \\ y = 9x + 4 \end{cases}$ D. $\begin{cases} y = 9x + 8 \\ y = 9x + 5 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $k = y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$.

+ Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4$ ta có tiếp điểm $M(2; 4)$.

Phương trình tiếp tuyến tại M là: $y = 9(x - 2) + 4 \Rightarrow y = 9x - 14$.

+ Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0$ ta có tiếp điểm $N(-2; 0)$.

Phương trình tiếp tuyến tại N là: $y = 9(x + 2) + 0 \Rightarrow y = 9x + 18$.

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là $y = 9x - 14$ và $y = 9x + 18$.

☞ **Sử dụng máy tính:**

+ Với $x_0 = 2$ ta nhập $9(-X) + X^3 - 3X^2 + 2$ CALC $X = 2$ nhấn dấu \equiv ta được $-14 \Rightarrow y = 9x - 14$.

+ Với $x_0 = -2$ ta nhập $9(-X) + X^3 - 3X^2 + 2$ CALC $X = -2$ nhấn dấu \equiv ta được $18 \Rightarrow y = 9x + 18$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $(C): y = \frac{2x+1}{x+2}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng có phương trình $\Delta: 3x - y + 2 = 0$.

A. $y = 3x + 14$. B. $y = 3x - 2$. C. $y = 3x + 5$. D. $y = 3x - 8$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$, $\Delta: 3x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 3x + 2$. Do tiếp tuyến song song với đường thẳng Δ

$$\text{nên } k = \frac{3}{(x_0+2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x_0+2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0+2=1 \\ x_0+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ x_0=-3 \end{cases}.$$

+ Với $x_0 = -1$ nhập $3(-X) + \frac{2X+1}{X+2}$ CALC $X = -1$ nhân dấu \equiv ta được 2

$\Rightarrow d_1: y = 3x + 2$ (loại do trùng với Δ).

+ Với $x_0 = -3$ CALC $X = -3$ nhân dấu \equiv ta được 14 $\Rightarrow d: y = 3x + 14$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $d: y = 3x + 14$.

Dạng 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến đi qua $A(x_A; y_A)$.

Phương pháp

Cách 1.

○ **Bước 1:** Phương trình tiếp tuyến đi qua $A(x_A; y_A)$ hệ số góc k có dạng:

$$d: y = k(x - x_A) + y_A \quad (*)$$

○ **Bước 2:** d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases}.$$

○ **Bước 3:** Giải hệ này tìm được x suy ra k và thế vào phương trình $(*)$, ta được tiếp tuyến cần tìm.

Cách 2.

○ **Bước 1.** Gọi $M(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm và tính hệ số góc tiếp tuyến $k = y'(x_0) = f'(x_0)$ theo x_0 .

○ **Bước 2.** Phương trình tiếp tuyến có dạng: $d: y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$ (**)

Do điểm $A(x_A; y_A) \in d$ nên $y_A = y'(x_0) \cdot (x_A - x_0) + y_0$ giải phương trình này sẽ tìm được x_0 .

○ **Bước 3.** Thế x_0 vào $(**)$ ta được tiếp tuyến cần tìm.

Chú ý: Đối với dạng viết phương trình tiếp tuyến đi qua điểm việc tính toán tương đối mất thời gian. Ta có thể sử dụng máy tính thay các đáp án:

Cho $f(x)$ bằng kết quả các đáp án. Vào MODE \rightarrow 5 \rightarrow 4 nhập hệ số phương trình. Thông thường máy tính cho số nghiệm thực nhỏ hơn số bậc của phương trình là 1 thì ta chọn đáp án đó.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ. Cho hàm số $(C): y = -4x^3 + 3x + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1; 2)$.

A. $\begin{cases} y = -9x - 7 \\ y = 2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y = 4x + 2 \\ y = x + 1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} y = x - 7 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$ D. $\begin{cases} y = -x - 5 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = -12x^2 + 3$.

+ Gọi d là phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua $A(-1; 2)$ với hệ số góc k có phương trình là: $d: y = k(x+1) + 2$.

+ d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} -4x^3 + 3x + 1 = k(x+1) + 2 & (1) \\ -12x^2 + 3 = k & (2) \end{cases}$$

Thay k từ (2) vào (1) ta được $-4x^3 + 3x + 1 = (-12x^2 + 3)(x+1) + 2$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

+ Với $x = -1 \Rightarrow k = -9$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -9x + 7$.

+ Với $x = \frac{1}{2} \Rightarrow k = 0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 2$.

Dạng 4. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị hàm số $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$.

Phương pháp

○ **Bước 1.** Gọi d tiếp tuyến chung của $(C_1), (C_2)$ và x_0 là hoành độ tiếp điểm của d và (C_1) thì phương trình d có dạng:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \quad (***)$$

○ **Bước 2.** Dùng điều kiện tiếp xúc của d và (C_2) , tìm được x_0 .

○ **Bước 3.** Thế x_0 vào (***) ta được tiếp tuyến cần tìm.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ. Cho hai hàm số:

$$(C_1): y = f(x) = 2\sqrt{x}, \quad x > 0 \quad \text{và} \quad (C_2): y = g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{8-x^2}, \quad -\sqrt{8} < x < \sqrt{8}.$$

Phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị hàm số là:

A. $y = \frac{1}{2}x + 2$. B. $y = \frac{1}{2}x - 1$. C. $y = \frac{1}{2}x + 5$. D. $y = \frac{1}{2}x - 3$.

Hướng dẫn giải

+ Gọi d là phương trình tiếp tuyến chung của $(C_1), (C_2)$ và x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (C_1) thì phương trình d là:

$$y = f'(x)(x - x_0) + y_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) + 2\sqrt{x_0}$$

+ d tiếp xúc với (C_2) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{8-x^2} = \frac{x}{\sqrt{x_0}} + \sqrt{x_0} & (1) \\ \frac{-x}{2\sqrt{8-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x_0}} & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được phương trình hoành độ tiếp điểm của d và (C_2) .

$$\frac{1}{2}\sqrt{8-x^2} = -\frac{x^2}{2\sqrt{8-x^2}} - \frac{2\sqrt{8-x^2}}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{8} < x < \sqrt{8} \\ x \neq 0 \\ x(8-x^2) = -x^3 - 4(8-x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{8} < x < \sqrt{8} \\ x \neq 0 \\ x^2 - 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Thay $x = -2$ vào (2) ta được $\frac{1}{\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0 = 4$.

Vậy phương trình tiếp tuyến chung cần tìm là: $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Bài toán 2: Một số công thức nhanh và tính chất cần biết.

Bài toán 2.1: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, x \neq -\frac{d}{c}$) có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến

Δ tại M thuộc (C) và I là giao điểm 2 đường tiệm cận. Ta luôn có:

- (I). Nếu $\Delta \perp IM$ thì chỉ tồn tại 2 điểm M thuộc 2 nhánh của đồ thị (C) đối xứng qua I và $x_M = \frac{\pm\sqrt{|ad-bc|}-d}{c}$.
- (II). M luôn là trung điểm của AB (với A, B là giao điểm của Δ với 2 tiệm cận).
- (III). Diện tích tam giác IAB không đổi với mọi điểm M và $S_{\Delta IAB} = 2 \frac{|bc-ad|}{c^2}$.
- (IV). Nếu E, F thuộc 2 nhánh của đồ thị (C) và E, F đối xứng qua I thì tiếp tuyến tại E, F song song với nhau. (suy ra một đường thẳng d đi qua E, F thì đi qua tâm I).

Chứng minh:

- Ta có: $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$; $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ là giao điểm của 2 tiệm cận.
- Gọi $M\left(x_M; \frac{ax_M+b}{cx_M+d}\right) \in (C)$ ($x_M \neq -\frac{d}{c}$). Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$$\Delta: y = \frac{ad-bc}{(cx_M+d)^2}(x-x_M) + \frac{ax_M+b}{cx_M+d}.$$

Chứng minh (I):

- $\overline{IM}\left(x_M + \frac{d}{c}; \frac{bc-ad}{c(cx_M+d)}\right)$; $\vec{u}_\Delta\left(1; \frac{ad-bc}{(cx_M+d)^2}\right)$
- $\Delta \perp IM \Rightarrow \overline{IM} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow x_M + \frac{d}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx_M+d)} \cdot \frac{ad-bc}{(cx_M+d)^2} = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{(cx_M+d)^4 - (ad-bc)^2}{c(cx_M+d)^3} = 0 \Leftrightarrow x_M = \frac{\pm\sqrt{|ad-bc|}-d}{c}$.
- Cách nhớ: $\underbrace{cx_M+d}_{\text{mẫu số của hàm số}} = \pm \underbrace{\sqrt{|ad-bc|}}_{\text{tử số của đạo hàm}}$

Chứng minh (II):

- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là: $A\left(2x_M + \frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là: $B\left(-\frac{d}{c}; \frac{acx_M+2bc-ad}{c(cx_M+d)}\right)$.

$$\bullet \text{ Xét } \begin{cases} x_A + x_B = 2x_M + \frac{d}{c} - \frac{d}{c} = 2x_M \\ y_A + y_B = \frac{a}{c} + \frac{acx_M + 2bc - ad}{c(cx_M + d)} = 2 \cdot \frac{ax_M + b}{cx_M + d} = 2y_M \end{cases}.$$

- Vậy M luôn là trung điểm của AB .

Chứng minh (III):

$$\bullet \overline{IA} \left(\frac{2(cx_M + d)}{c}; c \right) \text{ và } \overline{IB} \left(0; \frac{2(bc - ad)}{c(cx_M + d)} \right).$$

- ΔIAB vuông tại I

$$\Rightarrow S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} |\overline{IA}| |\overline{IB}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{2(cx_M + d)}{c} \right| \cdot \left| \frac{2(bc - ad)}{c(cx_M + d)} \right| = 2 \frac{|bc - ad|}{c^2} = \text{hằng số.}$$

- Vậy diện tích ΔIAB không đổi với mọi điểm M .

Chứng minh (IV):

$$\bullet \text{ Gọi } E \left(x_E; \frac{ax_E + b}{cx_E + d} \right) \in (C) \left(x_E \neq -\frac{d}{c} \right) \Rightarrow F \left(-\frac{2d}{c} - x_E; \frac{2a}{c} - \frac{ax_E + b}{cx_E + d} \right)$$

(E, F đối xứng qua I).

- Phương trình tiếp tuyến tại E có hệ số góc: $k_E = \frac{ad - bc}{(cx_E + d)^2}$ (1).

- Phương trình tiếp tuyến tại F có hệ số góc:

$$k_F = \frac{ad - bc}{\left[c \left(-\frac{2d}{c} - x_E \right) + d \right]^2} = \frac{ad - bc}{(-2d - cx_E + d)^2} = \frac{ad - bc}{(-d - cx_E)^2} = \frac{ad - bc}{(cx_E + d)^2} \text{ (2).}$$

- Từ (1, 2) suy ra $k_E = k_F$.

Bài toán 2.2: Cho hàm số: $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ có đồ thị là (C) , ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$). Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ trên (C) , biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $OA = n.OB$.

Khi đó x_0 thỏa: $cx_0 + d = \pm \sqrt{n \cdot |ad - bc|}$.

Hướng dẫn giải:

- Xét hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$). Ta có $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

- Gọi $M\left(x_0; \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d}\right) \in (C)$ là điểm cần tìm. Gọi Δ tiếp tuyến với (C) tại M ta có phương trình $\Delta : y = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d} \Rightarrow y = \frac{ad - bc}{(cx_0 + d)^2}(x - x_0) + \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d}$.
- Gọi $A = \Delta \cap Ox \Rightarrow A\left(-\frac{acx_0^2 + 2bcx_0 + bd}{ad - bc}; 0\right)$.
 $B = \Delta \cap Oy \Rightarrow B\left(0; \frac{acx_0^2 + 2bcx_0 + bd}{(cx_0 + d)^2}\right)$.
- Ta có $OA = \left|\frac{acx_0^2 + 2bcx_0 + bd}{ad - bc}\right| = \frac{|acx_0^2 + 2bcx_0 + bd|}{|ad - bc|}$
 $OB = \left|\frac{acx_0^2 + 2bcx_0 + bd}{(cx_0 + d)^2}\right| = \frac{|acx_0^2 + 2bcx_0 + bd|}{(cx_0 + d)^2}$
 (vì A, B không trùng O nên $acx_0^2 + 2bcx_0 + bd \neq 0$).
- Ta có
 $OA = n.OB \Leftrightarrow \frac{|acx_0^2 + 2bcx_0 + bd|}{|ad - bc|} = n \cdot \frac{|acx_0^2 + 2bcx_0 + bd|}{(cx_0 + d)^2}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{|ad - bc|} = n \cdot \frac{1}{(cx_0 + d)^2} \Leftrightarrow (cx_0 + d)^2 = n \cdot |ad - bc| \Leftrightarrow cx_0 + d = \pm \sqrt{n \cdot |ad - bc|}$.

Các em bắt đầu theo dõi phần trắc nghiệm ở dưới nhé. Bắt đầu làm từ bài dễ đến bài khó.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

I. NHẬN BIẾT - THÔNG HIỂU

Câu 1. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại điểm $A(3;1)$ là

- A. $y = 9x - 26$. B. $y = -9x - 26$. C. $y = -9x - 3$. D. $y = 9x - 2$.

Hướng dẫn giải: Tính $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'(3) = 9 \Rightarrow pttt : y = 9x - 26$.

Câu 2. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ tại điểm $B(1; -2)$ là

- A. $y = -4x + 2$. B. $y = 4x + 2$. C. $y = -4x + 6$. D. $y = 4x + 6$.

Hướng dẫn giải: Tính $y' = 4x^3 - 8x \Rightarrow y'(1) = -4 \Rightarrow pttt : y = -4x + 2$.

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ tại điểm $C(-2;3)$ là

- A. $y = 2x + 7$. B. $y = -2x + 7$. C. $y = 2x + 1$. D. $y = -2x - 1$.

Hướng dẫn giải: Tính $y' = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(-2) = 2 \Rightarrow pttt : y = 2x + 7$.

Câu 4. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ tại điểm D có hoành độ bằng 2 có phương trình là

- A. $y = -9x + 14$. B. $y = 9x + 14$. C. $y = -9x + 22$. D. $y = 9x + 22$.

Hướng dẫn giải:

Tính $y_0 = y(2) = -4$ và $y' = -3x^2 + 3 \Rightarrow y'(2) = -9 \Rightarrow pttt : y = -9x + 14$.

Câu 5. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 8x^2$ tại điểm E có hoành độ bằng -3 có phương trình là

- A. $y = 60x + 171$. B. $y = -60x + 171$.
C. $y = 60x + 189$. D. $y = -60x + 189$.

Hướng dẫn giải:

Tính $y_0 = y(-3) = -9$ và $y' = -4x^3 + 16x \Rightarrow y'(-3) = 60 \Rightarrow pttt : y = 60x + 171$.

Câu 6. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ tại điểm F có hoành độ bằng 2 có phương trình là

- A. $y = -x + 5$ B. $y = x + 5$. C. $y = -x - 1$. D. $y = x - 1$.

Hướng dẫn giải: Tính

$y_0 = y(2) = 3$ và $y' = \frac{-1}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(2) = -1 \Rightarrow pttt : y = -x + 5$.

Câu 7. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3x^2$ tại điểm G có tung độ bằng 5 có phương trình là

- A. $y = 12x - 7$. B. $y = -12x - 7$. C. $y = 12x + 17$. D. $y = -12x + 17$.

Hướng dẫn giải: Giải pt:

$2x_0^3 + 3x_0^2 = 5 \Leftrightarrow x_0 = 1$ và $y' = 6x^2 + 6x \Rightarrow y'(1) = 12 \Rightarrow pttt : y = 12x - 7$.