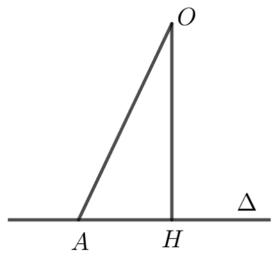
KHOẢNG CÁCH

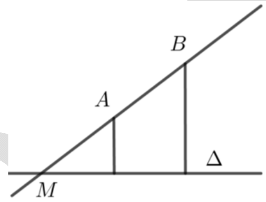
A. LÝ THUYẾT

I. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng

1. Cho điểm O và đường thẳng Δ. Hạ $OH \perp \Delta (H \in \Delta)$. Khi đó khoảng cách từ O tới Δ bằng độ dài đoạn OH. Kí hiệu là $d(O, \Delta)$.

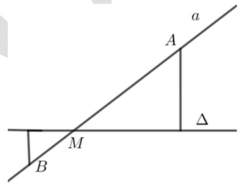


2. $d(O, \Delta) \le OA$,với A là điểm bất kì thuộc Δ.



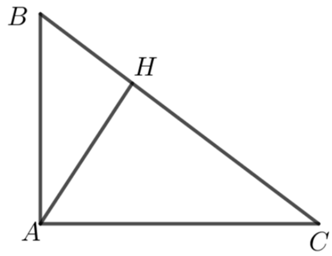
3. Cho hai đường thẳng a và Δ cắt nhau tại M. Trên a lấy hai điểm A, B. Khi đó:

$$\frac{d(A, \Delta)}{d(B, \Delta)} = \frac{MA}{MB}$$



4. Cho ΔABC vuông tại A. Dựng đường cao AH, khi đó ta có: $AH = d(A, BC)$ và AH được tính theo công thức: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

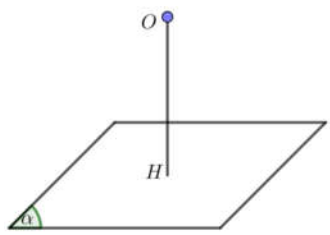
hoặc $AH = \frac{AB.AC}{BC}$.



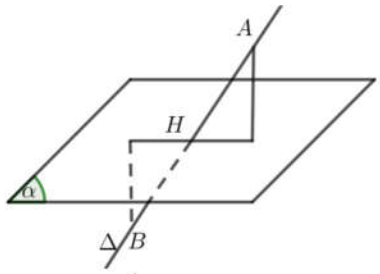
II. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

1. Định nghĩa

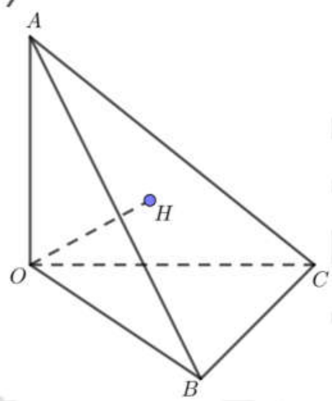
Cho điểm O và mặt phẳng (α). Dựng $OH \perp (\alpha), (H \in (\alpha))$. Khi đó khoảng cách từ O tới (α) bằng độ dài đoạn OH và được kí hiệu là $d(O, (\alpha))$.



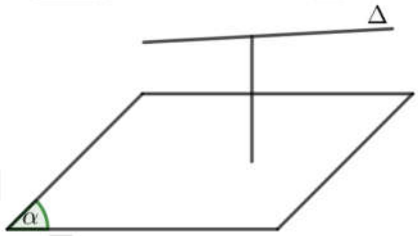
2. Giả sử đường thẳng Δ cắt (α) tại M. Trên Δ lấy hai điểm A,B. Khi đó: $\dfrac{d(A,(\alpha))}{d(B,(\alpha))}=\dfrac{AM}{BM}$.



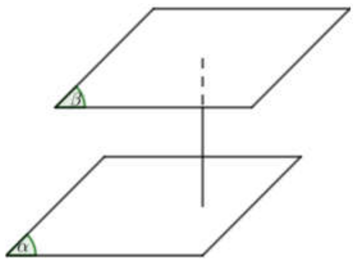
3. (Tính chất tứ diện vuông)
Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc. Gọi H là hình chiếu của O trên (ABC).
Khi đó $OH=d(O,(ABC))$ và
$\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$.



4. Cho đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (α). Khi đó khoảng cách giữa Δ và (α) được định nghĩa bằng khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc Δ tới (α).



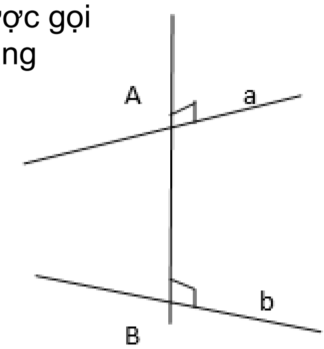
5. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song. Khi đó khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc (α) tới (β).

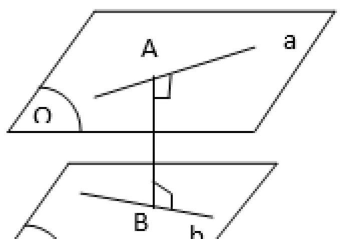


III. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

1.Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Khi đó tồn tại duy nhất một đường thẳng Δ vuông góc với cả hai đường thẳng a và b và cắt cả hai đường thẳng

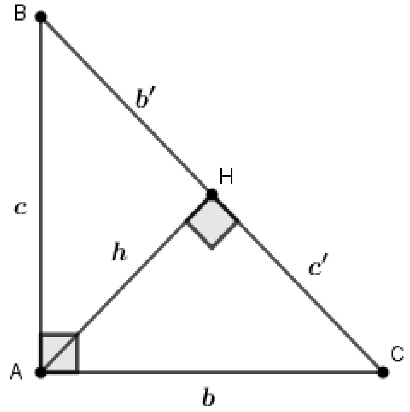
a và b. Δ được gọi là đường vuông góc chung của a và b. Đoạn thẳng AB được gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b bằng độ dài đoạn vuông góc chung AB
2.Nếu gọi (P);(Q) là hai mặt phẳng song song với nhau và lần lượt chứa hai thẳng a và b chéo nhau thì AB=d(A;(Q))=d(b;(P))=d((P);(Q)
Nhận xét:
-Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn còn lại.
-Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.





IV.Bổ sung kiến thức

1.Hệ thức lượng trong tam giác vuông



$+a^2 = b^2 + c^2$

$+b^2 = a.b'; c^2 = a.c'$

$+h^2 = b'.c'$

$+a.h = b.c$

$+\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

$+b = a\sin B = a\cos C = c\tan B = c\cot C$

$+c = a\sin C = a\cos B = b\tan C = b\cot B$

2.Hệ thức lượng trong tam giác đều

-Cho tam giác đều ABC cạnh a,trung tuyến AM,trọng tâm G ta có

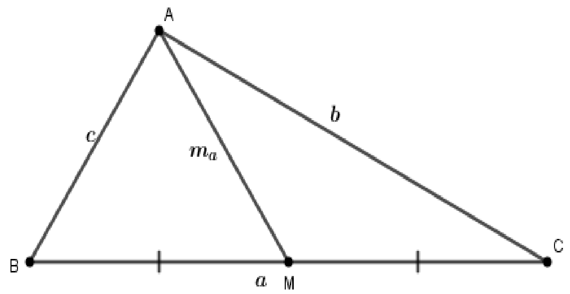
$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AG = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}; GM = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

-Diện tích $S = \frac{1}{2}AM.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

3.Hệ thức lượng trong tam giác thường

-Định lý cosin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

-Định lý sin : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$



-Công thức trung tuyến: $m^2_a = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$

-Công thức diện tích:

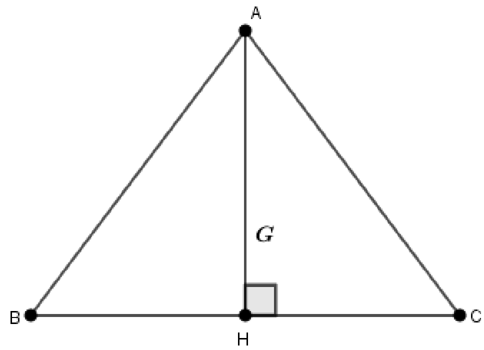
$+S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$

$+S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$

$+S = \frac{abc}{4R}$

$+S = p.r$

$+S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; (p = \frac{a+b+c}{2})$



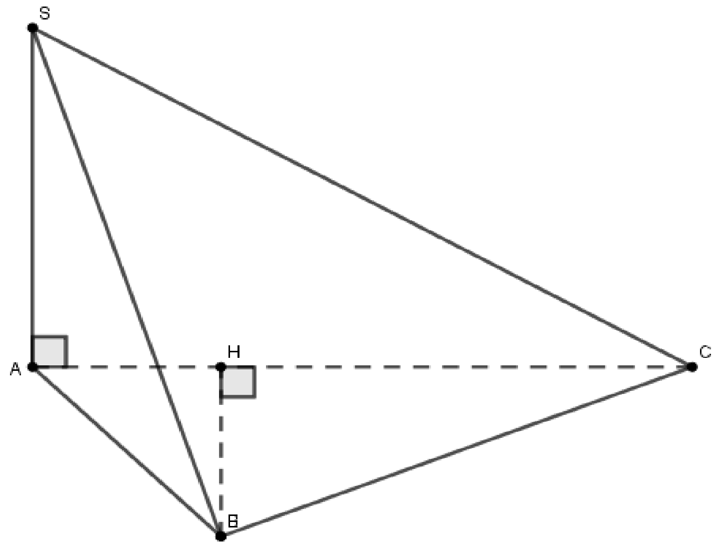
B.Các bài toán về khoảng cách

Ví dụ 1: Cho chóp $S.ABC$ đáy là tam giác vuông tại B và AB=2BC=2a.Biết $SA \perp (ABC)$ .Tính $d(B;(ABC))$

A. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ **B.** a **C.** $2a$ **D.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$

Đáp án A.

Lời giải



-Dựng $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp SA; (SA \perp (ABC))$.

Vậy $BH \perp (SAC) \Rightarrow$ BH là khoảng cách từ B đến (SAC)

theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

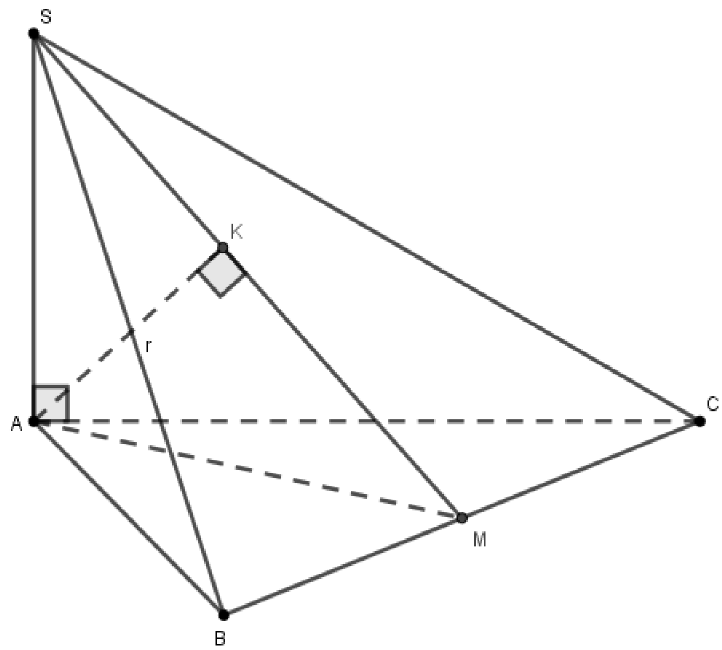
$$BH = \frac{BA.BC}{\sqrt{BA^2 + BC^2}} = \frac{2a.a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} = d(B;(ABC))$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = h$ và $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC đều cạnh a.Tính $d(A;(SBC))$

A. $\frac{ah\sqrt{7}}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}$ **C.** $\frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}$ **D.** $\frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2 + 3h^2}}$

Đáp án:c

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC$\Rightarrow BC\perp(SAM)$ .Dựng $AK\perp SM$

$\Rightarrow AK\perp BC;(BC\perp(SAM))\Rightarrow AK\perp(SBC)\Rightarrow AK=d(A;(SBC))$

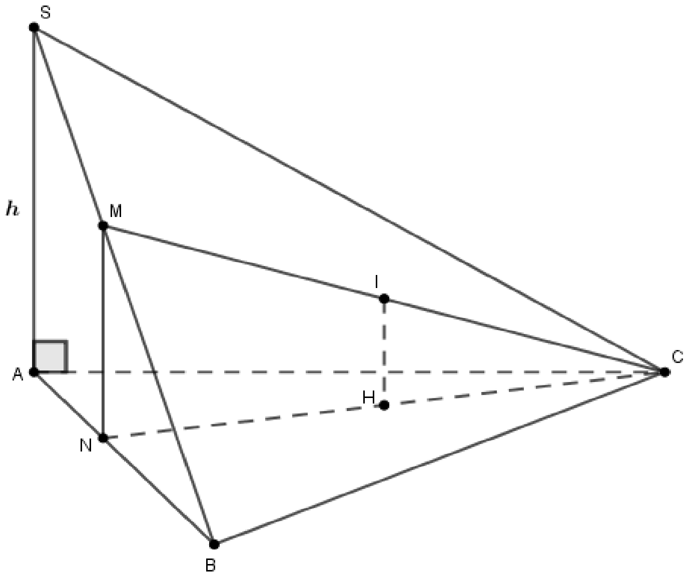
Có $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;tam giác SAM vuông tại A

$$\Rightarrow AK=\frac{AM.AS}{\sqrt{AM^2+AS^2}}=\frac{a\dfrac{\sqrt{3}}{2}.h}{\sqrt{(\dfrac{a\sqrt{3}}{2})^2+h^2}}=\frac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2+4h^2}}=d(A;(SBC))$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC có $SA=h$ và $SA\perp(ABC)$ .Lấy điểm $M\in SB$ sao cho $SM=\frac{1}{2}MB;(M\in AB)$ .Gọi I là trung điểm của CM.Tính $d\left(I;\left(ABC\right)\right)$

A. $\frac{h}{2}$ **B.** $\frac{h}{3}$ **C.** $\frac{2h}{3}$ **D.** h

Đáp án B.



Dựng $MN//SA,N\in AB\Rightarrow MN\perp(ABC)$

Dựng $IH\perp CN\Rightarrow IH\perp(ABC)$

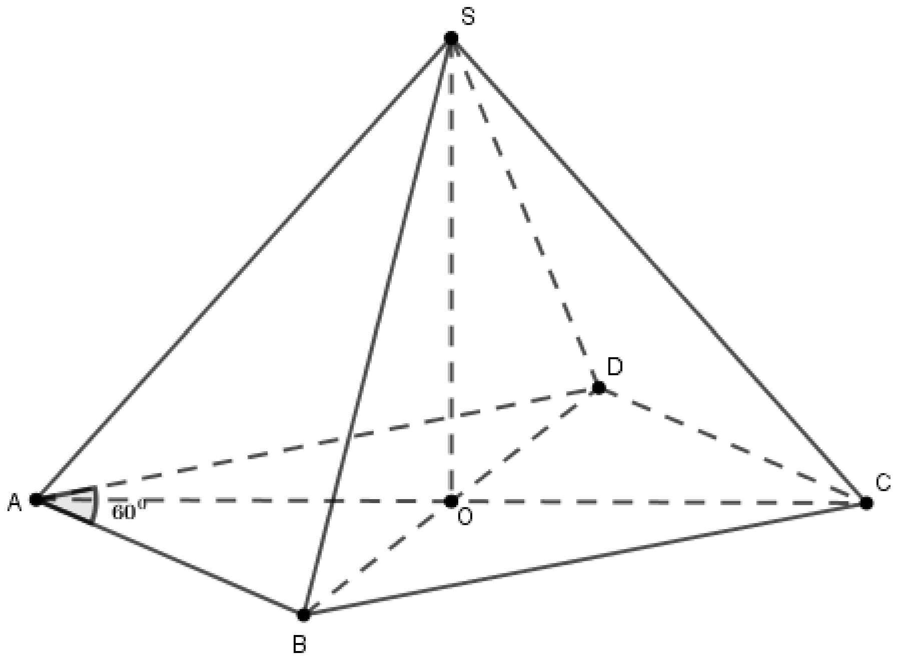
$\Rightarrow IH=d(I;(ABC))$

$$\Rightarrow IH=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}SA=\frac{h}{3}$$

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a, $\widehat{BAD}=60^\circ$; $SO\perp(ABCD);SO=\frac{3a}{4}$.Đặt $x=d\left(O;\left(SBC\right)\right);y=d\left(A;\left(SBC\right)\right);z=d\left(AD;SB\right)$. Tính $x+y+z$

A. $\frac{9a}{8}$ B. $\frac{3a}{4}$ C. $\frac{15a}{4}$ D. $\frac{15a}{8}$

Đáp án D.



Vì $\hat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \Delta \quad BAD$ đều cạnh a

$\Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; BD = a $\Rightarrow OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; OB $= \frac{a}{2}$

Suya ra tứ diện OSBC vuông tại O

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{(\frac{3a}{4})^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{64}{9a^2}$$

$\Rightarrow x = \frac{3a}{8}$ .Ta có $AC = 2AO \Rightarrow d(A;(SBC)) = 2\,\mathrm{d}(\mathrm{O};(\mathrm{SBC})) = \frac{3a}{4} = y$

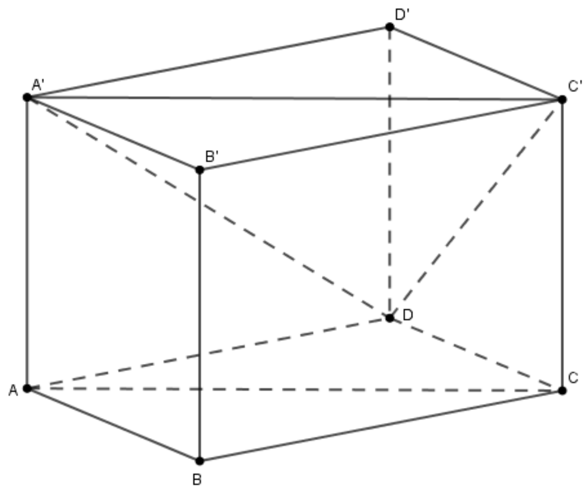
Vì $AD // (SBC) \Rightarrow z = d(AD;SB) = d(AD;(SBC)) = d(A;(SBC)) = \frac{3a}{4}$

$\Rightarrow x + y + z = \frac{3a}{8} + \frac{3a}{4} + \frac{3a}{4} = \frac{15a}{8}$

Ví dụ 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .Tính $d\left(AC;DC'\right)$

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a}{3}$ **D.** a

Đáp án A.



$d\left(AC;DC'\right)=d\left(AC;\left(DA'C'\right)=d\left(A;\left(DA'C'\right)=d\left(D';\left(DA'C'\right)\right.\right.\right.$

Vì $AC//\left(DA'C'\right)$ nên

Tứ diện $D'A'DC'$ vuông tại D' nên

$$\frac{1}{d^2(\mathrm{D'};(\mathrm{DA'C'})}=\frac{1}{D'A'^2}+\frac{1}{D'D^2}+\frac{1}{D'C'^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{3}{a^2}$$

$$\Rightarrow d(D';(DA'\mathrm{C'})=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}=d(AC;DC')$$

Ví dụ 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB=BC=a$,cạnh bên $\mathrm{AA'}=\sqrt{2}$.Gọi M là trung điểm BC .Tính $d\left(AM;B'C\right)$

A. $a\sqrt{7}$ **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{7}$ **C.** $\frac{\sqrt{7}}{a}$ **D.** $\frac{a^2}{7}$

Đáp án B.

Trước hết ta đi dựng 1 mặt phẳng chứa đường này và song song với đường kia để chuyển về khoảng cách từ 1 điểm đến mặt phẳng.Lấy E là trung điểm BB'

$\Rightarrow ME//CB' \Rightarrow CB'//(AME)$

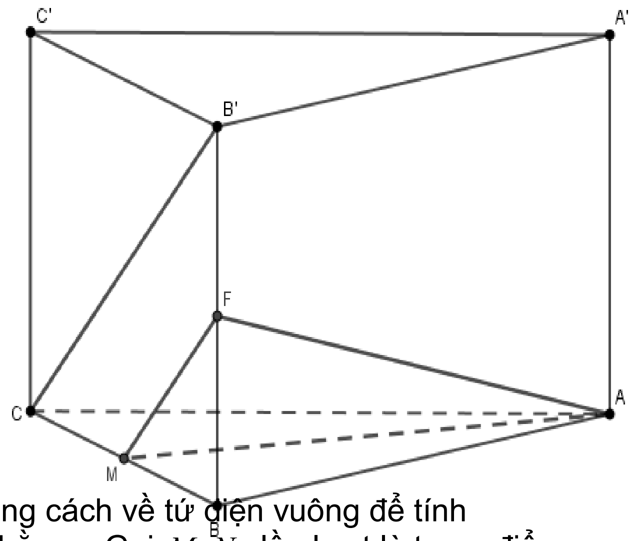
$\Rightarrow d(AM;B'C)=d(\mathrm{B'C};(\mathrm{AME}))=\mathrm{d}(\mathrm{C};(\mathrm{AME}))=\mathrm{d}(\mathrm{B};(\mathrm{AME}))$

Mà tứ diện $BAME$ vuông ở B nên:

$$\frac{1}{d^2(B;(AME))}=\frac{1}{BM^2}+\frac{1}{BE^2}+\frac{1}{BA^2}=\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\frac{1}{a^2}$$

$$=\frac{4}{a^2}+\frac{4}{2a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{7}{a^2}$$

$$\Rightarrow d(B;(AME))=\frac{a}{\sqrt{7}}=d(AM;B'C)$$



Nhận xét: Qua 2 ví dụ trên ta luôn chuyển khoảng cách về tứ diện vuông để tính

Ví dụ 7: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a.Gọi $M;N$ lần lượt là trung điểm của AA' và BB'. Tính $d=d(B'M;CN)$

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{8}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

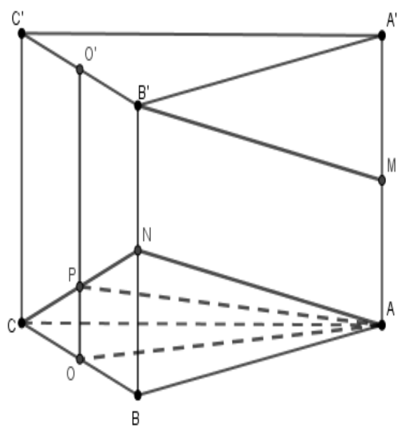
Gọi O và O' lần lượt là trung điểm của BC và B'C' và $P=OO'\cap CN$ vì $B'M//(CAN)$

Nên Tứ diện OACP vuông tại O

$$\Rightarrow \frac{1}{d^2(O;(CAP))}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OC^2}$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{4}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{16}{a^2}+\frac{4}{a^2}=\frac{64}{3a^2}$$

$$\Rightarrow d(O;(CAP))=\frac{a\sqrt{3}}{8}\Rightarrow d=\frac{a\sqrt{3}}{4}$$



Nhận xét: Ngoài việc chuyển khoảng cách giữa B'M và CN ta còn dựng thêm được tứ diện vuông OACP và nhờ vào tính chất tứ diện vuông ta tính được khoảng cách

Ví dụ 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang , $\widehat{ABC}=\widehat{BAD}=90^\circ$, $BA=BC=a, AD=2a$ .Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{2}$ .Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB.Tính $d\left(H;(SCD)\right)$

A. $\frac{a}{2}$ **B.** $\frac{2a}{3}\ \frac{2a}{3}$ **C.** $\frac{a}{3}$ **D.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$

Đáp án C.

ọi $M = AB \cap CD; K = AH \cap SM$

Vì BC là đường trung bình của $\Delta MAD \Rightarrow$ B là trung điểm của AM

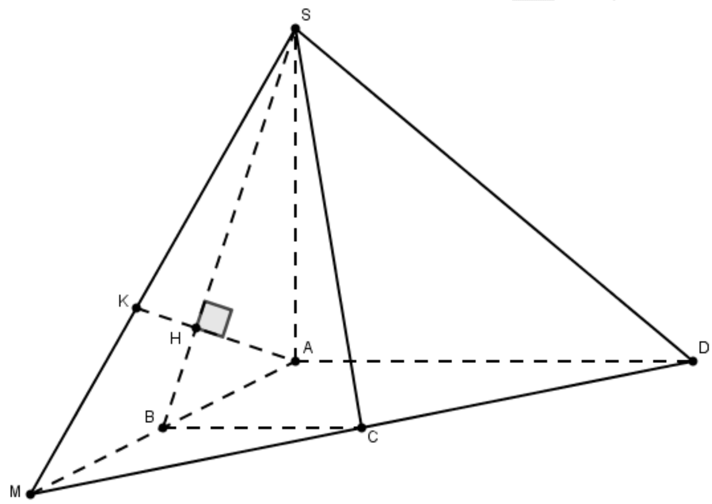
Ta có: $\frac{BH}{BS} = \frac{BH.BS}{BS^2} = \frac{BA}{BS^2} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ H là trọng tâm của ΔSAM

Từ đó $\frac{d(H;(SCD))}{d(A;(SCD))} = \frac{KH}{KA} = \frac{1}{3}$.

Tứ diện ASDM vuông tại A nên

$$\frac{1}{d^2(\text{A};(\text{SCD}))} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow d(A;(SCD)) = a \Rightarrow d(H;(SCD)) = \frac{a}{3}$$



Ví dụ 9: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BD'

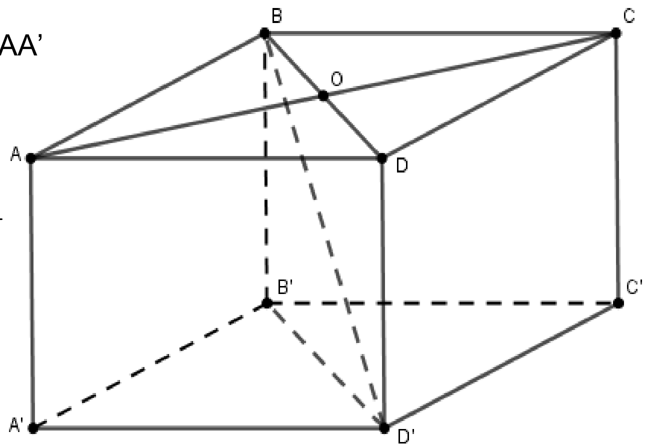
A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $a\sqrt{2}$ C. $\frac{a}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Đáp án A.

Xét mặt phẳng (BB'D'D) chứa BD' và song song với AA'

Ta có $\begin{cases} AO \perp BD \\ AO \perp BB' \end{cases}$ (O là tâm hình vuông ABCD)

$$\Rightarrow AO \perp (BB'D'D) \Rightarrow d(\text{AA}';\text{BD}')=\text{AO}=\frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



Ví dụ 10: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a; AD = 2a, AA' = a$ .Gọi M là điểm chia đoạn AD với $\frac{AM}{MD} = 3$.Đặt $x = d\left(AD';B'C\right); y = d\left(M;\left(AB'C\right)\right)$. Tìm $x.y$

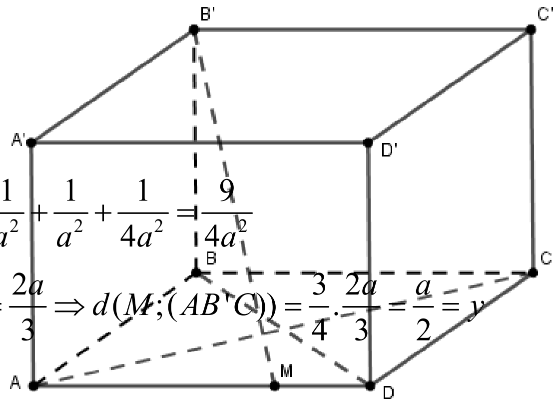
A. $\frac{3a^2}{2\sqrt{6}}$ B. $\frac{5a^2}{3\sqrt{6}}$ C. $\frac{a^2}{2}$ D. $\frac{3a^2}{4}$

Đáp án C.

Ta có $B'C//(AA'D'D) \Rightarrow d(B'C;AD') = B'A' = a = x$

$$\text{Goi } I = BM \cap AC \Rightarrow \frac{d(M;(AB'C))}{d(B;(AB'C))} = \frac{MI}{BI} = \frac{AM}{BC} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow d(M;(AB'C)) = \frac{3}{4} d(B;(AB'C))$$



Tứ diện BAB'C vuông tại B nên ta có $\frac{1}{d^2(B;(AB'C))} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{9}{4a^2}$

$$\Rightarrow d(B;(AB'C)) = \frac{2a}{3} \Rightarrow d(M;(AB'C)) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{a}{2} = y$$

Vậy $x.y = a.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$

Ví dụ 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm DD'. Tính $d\left(CK;A'D\right)$.

A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{3a}{4}$. **D.** $\frac{4a}{3}$.

Lời giải