KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0.

Kí hiệu: $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$. Vậy $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

STUDY TIP

Nếu $\Delta x=x-x_0$ và $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ thì $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

- ✓ Δx gọi là số gia của đối số tại điểm x_0.
- ✓ Δy gọi là số gia của hàm số tương ứng.

2. Đạo hàm bên trái, bên phải.

a) Đạo hàm bên trái.

$f'(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ trong đó $x\to x_0^-$ được hiểu là $x\to x_0$ và $x<x_0$.

b) Đạo hàm bên phải.

$f'(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ trong đó $x\to x_0^+$ được hiểu là $x\to x_0$ và $x>x_0$.

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 $\Leftrightarrow f'(x_0^+)$ và $f'(x_0^-)$ tồn tại và bằng nhau. Khi đó $f'(x_0^+)=f'(x_0^-)=f'(x_0)$.

3. Đạo hàm trên khoảng, trên đoạn.

a) Hàm số $y=f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu có đạo hàm tại mọi điểm trên khoảng đó.

b) Hàm số $y=f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$ nếu có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và có đạo hàm phải tại a và đạo hàm trái tại b.

4. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số.

- Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

STUDY TIP

- ✓ Hàm số liên tục tại điểm x_0 có thể không có đạo hàm tại điểm đó.
- ✓ Hàm số không liên tục tại x_0 thì không có đạo hàm tại điểm đó.

B. CÁC DẠNG TOÁN TÍNH ĐẠO HÀM BẰNG ĐỊNH NGHĨA

Phương pháp:

1. Tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa.

Cách 1:

- Tính $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (1).
- Nếu tồn tại giới hạn (1) thì hàm số có đạo hàm tại x_0 và ngược lại thì hàm số không có đạo hàm tại x_0.

Cách 2: Tính theo số gia.

- Cho x_0 một số gia Δx : $\Delta x=x-x_0 \Rightarrow \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.
- Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Tính giới hạn $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. Mối quan hệ giữa tính liên tục vào đạo hàm.

- Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}=0$.
- Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 \Rightarrow y=f(x)$ liên tục tại điểm x_0.
- Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm x_0 chưa chắc có đạo hàm tại điểm x_0.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x+1}$. Tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x_0=1$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Đáp án A.

Cách 1: Xét $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Cách 2:

$\Delta y=f(\Delta x+1)-f(1)=\sqrt{\Delta x+2}-\sqrt{2}$.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{\Delta x+2}-\sqrt{2}}{\Delta x}$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x+2}-\sqrt{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

STUDY TIP

Nhân lượng liên hợp: $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ và $\sqrt{a}-b=\dfrac{a-b^2}{\sqrt{a}+b}$.

Giải theo cách 1 tỏ ra đơn giản và nhanh hơn cách 2.

Câu 2. Khi tính đạo hàm của hàm số $f(x)=x^2+5x-3$ tại điểm $x_0=2$, một học sinh đã tính theo các bước sau:

Bước 1: $f(x)-f(2)=f(x)-11$.

Bước 2: $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{x^2+5x-3-11}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x+7)}{x-2}=x+7$.

Bước 3: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+7)=9$. Vậy $f'(2)=9$.

Tính toán trên nếu sai thì sai ở bước nào.

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3 . **D.** Tính toán đúng.

Lời giải

Học sinh tính đạo hàm bằng định nghĩa theo cách 1 các bước đều đúng.

STUDY TIP

Phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2 \Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)=0$.

Câu 3. Số gia của hàm số $f(x)=x^2$ ứng với số gia Δx của đối số x tại $x_0=-1$ là:

A. $(\Delta x)^2-2\Delta x-1$. **B.** $(\Delta x)^2+2\Delta x+2$. **C.** $(\Delta x)^2+2\Delta x$. **D.** $(\Delta x)^2-2\Delta x$.

Lời giải

Đáp án D.

Với số gia Δx của đối số x tại điểm $x_0=-1$, ta có: $\Delta y=(-1+\Delta x)^2-1=(\Delta x)^2-2\Delta x$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=x^2-x$, đạo hàm của hàm số ứng với số gia Δx của đối số x tại x_0 là:

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^2-2x_0.\Delta x-\Delta x\right)$. **B.** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0-1)$.

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0+1)$. **D.** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^2+2x_0.\Delta x+\Delta x\right)$.

Lời giải

Đáp án B.

Ta có: $\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-(x_0+\Delta x)-(x_0^2-x_0)=(\Delta x)^2+2x_0.\Delta x-\Delta x$

$\Rightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0-1)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây là sai.

A. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

B. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Lời giải

Đáp án D.

- A đúng theo định nghĩa.
- B đúng vì $\Delta x=x-x_0$ nên $x\to x_0\Rightarrow \Delta x\to 0$.
- C đúng. Đặt $h=\Delta x=x-x_0\Rightarrow x=h+x_0$, $h\to 0$ khi $x\to x_0$.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x_0)}{h+x_0-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

- Vậy D sai.

Câu 6. Xét ba mệnh đề sau:

(1) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại điểm đó.

(2) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại điểm đó .

(3) Nếu hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x=x_0$ thì chắc chắn $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm đó .

Trong ba mệnh trên:

A. (1) và (3) đúng. **B.** (2) đúng. **C.** (1) và (2) đúng . **D.** (2) và (3) đúng.

Lời giải

Đáp án A.

Mệnh đề (2) sai vì: Xét hàm số $f(x)=|x|$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, nhưng ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$ và $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

STUDY TIP

- Khi $x\to 0^+\Rightarrow x>0$ nên $|x|=x$.
- Khi $x\to 0^-\Rightarrow x<0$ nên $|x|=-x$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2+|x+1|}{x}$. Tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x_0=-1$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0 . **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Đáp án D.

Hàm số liên tục tại $x_0 = -1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2+2x+1}{x(x+1)} = 0$ (1).

$\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2-1}{x(x+1)} = 2$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ hàm số không có đạo hàm tại điểm $x_0 = -1$.

STUDY TIP

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3-\sqrt{4-x} & khi\, x \neq 0 \\ 1 & khi\, x = 0 \end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{16}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Đáp án A.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2+\sqrt{4-x}} = \dfrac{1}{4}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & khi\, x > 1 \\ x^2 & khi\, x \leq 1 \end{cases}$. Khi đó $f'(1)$ là kết quả nào sau đây.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $f'(1)$ không tồn tại.

Lời giải

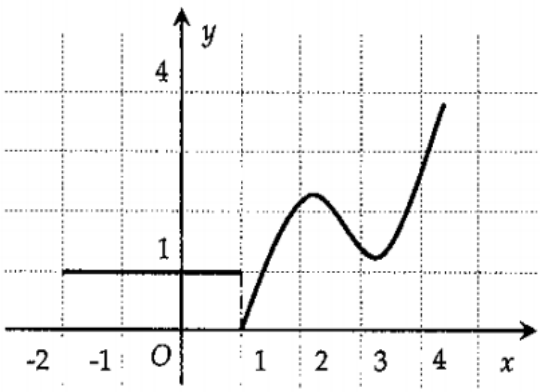
Đáp án D.

Ta có: $f(1) = 1^2 = 1$.

$f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$ và $f'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+1) = 2$.

Vì $f'(1^+) \neq f'(1^-)$ nên hàm số $f(x)$ không tồn tại đạo hàm tại $x_0 = 1$.

Câu 10. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây sai.



A. Hàm số có đạo hàm tại $x=0$.
B. Hàm số có đạo hàm tại $x=1$.
C. Hàm số có đạo hàm tại $x=2$.
D. Hàm số có đạo hàm tại $x=3$.

Lời giải

Đáp án B.

Tại $x=1$ đồ thị hàm số bị ngắt nên hàm số không liên tục. Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x=1$.

STUDY TIP

- Đồ thị của hàm số liên tục trên khoảng là một đường liền trên khoảng đó.
- Hàm số không liên tục tại điểm x_0 thì không có đạo hàm tại x_0.

Câu 11. Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & khi\, x\neq 1\\ a & khi\, x=1\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=1$.

A. $a=-2$.
B. $a=2$.
C. $a=1$.
D. $a=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Đáp án B.

Để hàm số có đạo hàm tại $x=1$ thì trước hết $f(x)$ phải liên tục tại $x=1$.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2=f(1)=a$. Khi đó $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x-1}-2}{x-1}=1$.

Vậy $a=2$.

STUDY TIP

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Câu 12. Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & khi\, x\geq 0\\ ax+b & khi\, x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

A. $\begin{cases}a=-11\\ b=11\end{cases}$.
B. $\begin{cases}a=-10\\ b=10\end{cases}$.
C. $\begin{cases}a=-12\\ b=12\end{cases}$.
D. $\begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}$.

Lời giải

Đáp án D.

Trước tiên hàm số phải liên tục tại $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1=f(0), \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b \Rightarrow b=1$

Xét $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{x+1}=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-} a=a$

Hàm số có đạo hàm tại $x=0 \Leftrightarrow a=-1$

STUDY TIP

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

Câu 13. Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & khi\ x\ge 0 \\ a\sin x+b\cos x & khi\ x<0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x_0=0$

A. $a=1;b=1$. **B.** $a=-1;b=1$. **C.** $a=-1;b=-1$. **D.** $a=0;b=1$.

Lời giải

Đáp án A

Ta có: $f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax^2+bx+1)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a\sin x+b\cos x)=b$

Để hàm số liên tục thì $b=1$

$f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ax^2+x+1-1}{x}=1$

$f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{a\sin x+b\cos x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.\lim\limits_{x\to 0^-}\left(a\cos\dfrac{x}{2}\right)-\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.\lim\limits_{x\to 0^-}\sin\dfrac{x}{2}=a$

Để tồn tại $f'(0)\Rightarrow f'(0^+)=f'(0^-)\Leftrightarrow a=1$

STUDY TIP

Giới hạn lượng giác $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\Rightarrow \lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=x(x-1)(x-2)...(x-1000)$. Tính $f'(0)$.

A. $10000!$. **B.** $1000!$. **C.** $1100!$. **D.** $1110!$.

Lời giải

Đáp án B.

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(x-2)...(x-1000)-0}{x}=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)...(x-1000)$$
$$=(-1)(-2)...(-1000)=1000!$$

STUDY TIP

Hoán vị n phần tử: $P_n=n!=1.2...(n-1)n$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Số gia của hàm số $f(x)=x^3$ ứng với $x_0=2$ và $\Delta x=1$ bằng bao nhiêu?

A. -19. **B.** 7. **C.** 19. **D.** -7.

Câu 2. Tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $f(x)=2x(x-1)$ theo x và Δx là:

A. $4x+2\Delta x+2$. **B.** $4x+2(\Delta x)^2-2$.

C. $4x+2\Delta x-2$. **D.** $4x.\Delta x+2(\Delta x)^2+2\Delta x$.

Câu 3. Số gia của hàm số $f(x)=x^2-4x+1$ ứng với x và Δx là:

A. $\Delta x(\Delta x+2x-4)$. **B.** $2x+\Delta x$. **C.** $\Delta x(2x-4\Delta x)$. **D.** $2x-4\Delta x$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định: $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & khi\ x\neq 0\\ 0 & khi\ x=0\end{cases}$ .Giá trị $f'(0)$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** -2. **D.** Không tồn tại.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ bởi $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-3x+2} & khi\ x\neq 1\\ 0 & khi\ x=1\end{cases}$ .Giá trị $f'(1)$ bằng:

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** Không tồn tại.

Câu 6. Xét hai mệnh đề:

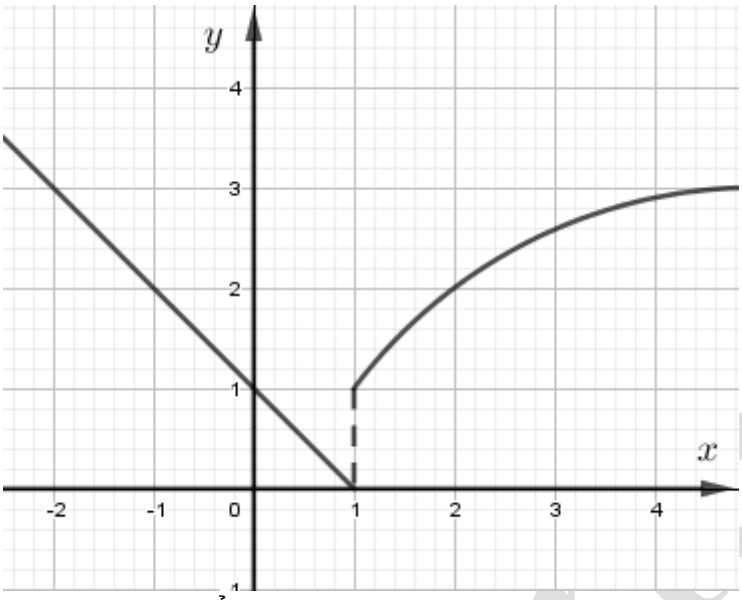
(I) $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0.

(II) $f(x)$ có liên tục tại x_0 thì $f(x)$ đạo hàm tại x_0.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II). **C.** Cả hai đều sai. **D.** Cả hai đều đúng.

Câu 7. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ:



Hàm số không có đạo hàm tại các điểm nào sau đây?

A. $x=0$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=3$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ 0 & khi\ x=1\end{cases}$ .Giá trị $f'(1)$ bằng:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+3 & khi\ x\geq 1\\ \dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} & khi\ x<1\end{cases}$ .Giá trị $f'(1)$ bằng:

A. 0. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Không tồn tại.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^+$ bởi $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{x} & khi\ \ x\neq 0\\ 0 & khi\ \ x=0\end{cases}$ Xét hai mệnh đề sau:

(I) $f'(0)=1$.

(II) Hàm số không có đạo hàm tại $x_0=0$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II). **C.** Cả hai đều đúng. **D.** Cả hai đều sai.

Câu 11. Xét hai câu sau:

(1) Hàm số $y=\dfrac{|x|}{x+1}$ liên tục tại $x=0$.

(2) Hàm số $y=\dfrac{|x|}{x+1}$ có đạo hàm tại $x=0$.

Trong 2 câu trên:

A. (2) đúng. **B.** (1) đúng. **C.** Cả (1), (2) đều đúng. **D.** Cả (1), (2) đều sai.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x} & khi\ x\neq 0\\ 0 & khi\ x=0\end{cases}$ .Giá trị của $f'(0)$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** Không tồn tại.

Câu 13. Với hàm số $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{\pi}{x} & khi\ x\neq 0\\ 0 & khi\ x=0\end{cases}$.Để tìm đạo hàm $f'(x)=0$ một học sinh lập luận qua các bước như sau:

1. $|f(x)|=|x|.\left|\sin\dfrac{\pi}{x}\right|\leq|x|$.

2.Khi $x\to 0$ thì $|x|\to 0$ nên $|f(x)|\to 0\Rightarrow f(x)\to 0$.

3.Do $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=0$ nên hàm số liên tục tại $x=0$.

4.Từ $f(x)$ liên tục tại $x=0\Rightarrow f(x)$ có đạo hàm tại $x=0$.

Lập luận trên nếu sai thì bắt đầu từ bước:

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x^2} & khi\ x\neq 0\\ 0 & khi\ x=0\end{cases}$.

(1) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=0$.

(2) Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm $x=0$.

Trong các mệnh đề trên:

A. Chỉ (1) đúng. **B.** Chỉ (2) đúng. **C.** Cả $(1),(2)$ đều đúng. **D.** Cả $(1),(2)$ đều sai.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx & khi\ x\geq 1\\ 2x-1 & khi\ x<1\end{cases}$ .Tìm a,b để hàm số có đạo hàm tại $x=1$

A. $a=-1,b=0$. **B.** $a=-1,b=1$. **C.** $a=1,b=0$. **D.** $a=1,b=1$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{x} & khi\ x>0\\ x^2+x & khi\ x\leq 0\end{cases}$ .Giá trị của $f'(0)$ bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 17. Xét hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là đoạn $[a;b]$ đồng thời nếu $x\to x_0\in[a;b]$ thì $f(x)\to 1$ với 3 điều kiện:

I. $f(x)$ là hàm số liên tục trái và liên tục phải của x_0.

II. $f(x_0)=1$.

III. $f(x)$ có đạo hàm tại x_0.

Trong ba điều kiện trên, điều kiện cần và đủ để $f(x)$ liên tục tại x_0 là:

A. Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** Chỉ I và II. **D.** Chỉ II và III.

Câu 18. Xét ba hàm số:

I. $f(x)=|x|.x$

II. $g(x)=\sqrt{x}$

III. $h(x)=|x+1|x$

Hàm số không có đạo hàm tại $x=0$ là:

A. Chỉ I. **B.** Chỉ II. **C.** Chỉ I và II. **D.** Chỉ I và III.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. **Đáp án C.**

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3$

Với $x_0=2,\Delta x=1\Rightarrow \Delta y=19$

Câu 2. **Đáp án C.**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{2(x-x_0)(x+x_0)-2(x-x_0)}{x-x_0}=2x+2x_0-2$$

(Với $x_0=x-\Delta x$)

Câu 3. **Đáp án A.**

$$\Delta y=f(\Delta x+x)-f(x)=(\Delta x+x)^2-4(\Delta x+x)+1-(x^2-4x+1)=\Delta x(\Delta x+2x-4)$$

Câu 4. **Đáp án A.**

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{1}{2}$

Vậy $f'(0)=\frac{1}{2}$

Câu 5. **Đáp án D.**

Xét $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+3x}{(x-1)(x^2-3x+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x-3)}{(x-1)(x-2)}=\infty$

Câu 6. **Đáp án A.**

(II) Sai : ví dụ: $f(x)=|x|$ thì $f(x)$ liên tục tại *x* = 0 nhưng $f(x)$ không có đạo hàm tại *x* = 0

(I) Đúng theo đáp án đã trình bày

Câu 7. **Đáp án B.**

Tại *x* = 1, đồ thị hàm số bị gián đoạn nên hàm số không liên tục tại đó

$\Rightarrow$ hàm số không có đạo hàm

Câu 8. **Đáp án C.**

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

Câu 9. **Đáp án D.**

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(2x+3) = 5$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+3x-4) = 0$

Vậy không tồn tại $f'(1)$

Câu 10. Đáp án B.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sqrt{x}} = +\infty$$

Vậy (I) sai, (II) đúng

Câu 11. Đáp án B.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x+1} = 0 = f(0) \Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(x+1)} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{(x+1)} = -1$$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x=0$

Câu 12. Đáp án B.

Ta có:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{4x^2+8} - \sqrt{8x^2+4}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{4x^2+8} - 2 + 2 - \sqrt{8x^2+4}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{4x^2}{\sqrt[3]{(4x^2+8)^2} + 2\sqrt[3]{4x^2+8} + 4} - \frac{8x^2}{2+\sqrt{8x^2+4}} \right) = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$$

Câu 13. Đáp án D.

Một hàm số liên tục tại x_0 chưa chắc có đạo hàm tại điểm đó, hơn nữa $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sin\dfrac{\pi}{x}$ không có giới hạn khi $x \to 0$

Câu 14. Đáp án C.

Ta có: $-|x| \le x.\sin\dfrac{1}{x^2} \le |x|$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(-|x|) \le \lim_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x^2} \le \lim_{x\to 0}|x| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x^2} = 0 = f(0)$$

Vậy hàm số liên tục tại $x=0$

Xét $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\left(\sin\dfrac{1}{x^2}\right)$

Lấy dãy (x_n): $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}}$ có:

$$\lim x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1$$

Lấy dãy $\left(x_n'\right): x_n' = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{6}+2\pi n}} = \dfrac{1}{2}$, tương tự ta cũng có:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n' = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f\left(x_n'\right) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \sin\frac{1}{x^2}$$ không tồn tại

Câu 15. Đáp án C.

Ta có: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = a+b = f(1) \\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(2x-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow a+b=1$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{ax^2+bx-(a+b)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}[a(x+1)+b] = 2a+b$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{2x^2-1-(a+b)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{2x-1-1}{x-1} = 2$$

Ta có hệ: $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$

Câu 16. Đáp án A.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sin x}{x}.\sin x\right) = 0$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(x^2+x\right) = 0$$

Suy ra hàm số liên tục tại $x=0$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = 1; \lim_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-} \frac{x^2+x}{x} = 1$$

Vậy: $f'(0) = f'\left(0^-\right) = f'\left(0^+\right) = 1$

Câu 17. Đáp án C.

- *f(x)* liên tục tại x_0 tức là $x \to x_0$ thì $f(x) \to f(x_0)$ nên (I) và (II) đúng.
- *f*(*x*) có đạo hàm tại x_0 là điều điện đủ để *f*(*x*) liên tục tại x_0. *f*(*x*) liên tục tại x_0 nhưng có thể *f*(*x*) không có đạo hàm tại điểm đó.

Câu 18. Đáp án B.

Ta có: $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. Vậy $g(x)$ không có đạo hàm tại $x=0$.