HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

1. Định nghĩa

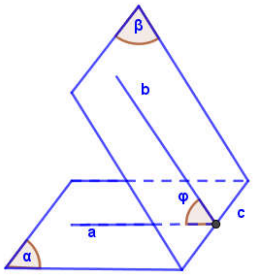
- Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
- Nếu hai mặt phẳng đó song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0.

2. phương pháp tính góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau

❖ **Phương pháp 1:** Dựng hai đường thẳng a, b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β).

Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là $\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right)$. Tính góc $\left(\widehat{a,b}\right)$.

❖ **Phương pháp 2:**

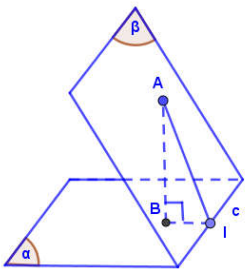


- Xác định giao tuyến c của hai mặt phẳng (α) và (β).
- Dựng hai đường thẳng a, b lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến c tại một điểm trên c. Khi đó: $\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right)$.

  Hay ta xác định mặt phẳng phụ (γ) vuông góc với giao tuyến c mà $(\alpha)\cap(\gamma)=a$, $(\beta)\cap(\gamma)=b$.

  Suy ra $\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right)$.

❖ **Phương pháp 3:** (trường hợp đặc biệt)



- Nếu có một đoạn thẳng nối hai điểm A, B $\left(A\in(\alpha),B\in(\beta)\right)$ mà $AB\perp(\beta)$ thì qua A hoặc B ta dựng đường thẳng vuông góc với giao tuyến c của hai mặt phẳng tại H. Khi đó $\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\widehat{AHB}$.

Ví dụ 1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy $ABCD$ bằng a và $SA=SB=SC=SD=a$. Tính cosin góc giauwx hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi I là trung điểm SA. Do tam giác SAD và SAB đều nên $\begin{cases} BI \perp SA \\ DI \perp SA \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right) = \left(\widehat{BI,DI}\right)$.

Áp dụng định lý cosin cho tam giác BID ta có:

$$\cos\widehat{BID} = \frac{IB^2 + ID^2 - BD^2}{2IB.ID} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}a.\frac{\sqrt{3}}{2}a} = -\frac{1}{3}.$$

Vậy $\cos\left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right) = \frac{1}{3}$.

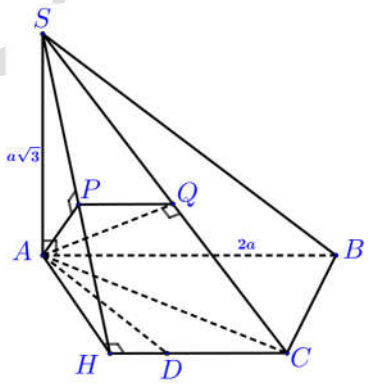
Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$, SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A. $\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\arccos\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Nhận xét: Theo định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng ta đi xác định hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Lời giải

Chọn A.



Vì $ABCD$ là nửa lục giác đều nên $AD = DC = CB = a$.

Dựng đường thẳng đi qua A và vuông góc với (SCD).

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ dựng $AH \perp CD$ tại $H \Rightarrow CD \perp (SAH)$.

Trong mặt phẳng (SAH) dựng $AP \perp SH \Rightarrow CD \perp AP \Rightarrow AP \perp (SCD)$.

Dựng đường thẳng đi qua A và vuông góc với (SBC).

Trong mặt phẳng (SAC) dựng $AQ \perp SC$.

Lại có $AQ \perp BC$ vì $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AQ$.

Vậy $AQ \perp (SBC)$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng ấy là AP và AQ.

- Ta tính góc $\widehat{PAQ}$, có $AH = \sqrt{AD^2 - HD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{AP^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AH^2} \Rightarrow AP = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow AQ = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

ΔAPQ vuông tại $P \Rightarrow \cos\widehat{PAQ} = \frac{AP}{AQ} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \widehat{PAQ} = \arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$.

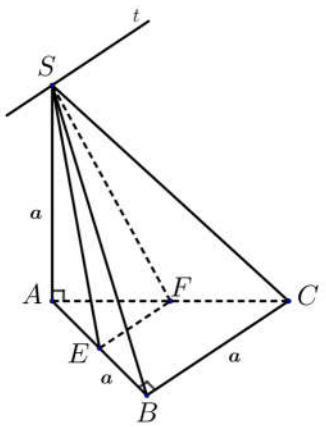
Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với $BA = BC = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC).

A. $\frac{3}{\sqrt{10}}$. **B.** $\frac{5}{\sqrt{10}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **D.** $\frac{3}{2\sqrt{10}}$.

Nhận xét: Giao tuyến của hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là đường thẳng St đi qua S và song song với EF và BC nên ta xác định hai đường thẳng qua S và lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) và cùng vuông góc với St (ta đi chứng minh hai đường thẳng đó là SE và SB).

Lời giải

Chọn A.



Vì $\begin{cases} EF \subset (SEF) \\ BC \subset (SBC) \\ EF // BC \end{cases} \Rightarrow$ giao tuyến của (SEF) và (SBC) là đường thẳng qua S, song song với BC, là St.

$\begin{cases} BC \perp AB \quad (gt) \\ BC \perp SA \quad (vì\ SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$ hay $St \perp SB$.

Tương tự $EF \perp (SAE) \Rightarrow EF \perp SE$ mà $EF // St \Rightarrow St \perp SE$.

Vậy SB và SE cùng đi qua S và cùng vuông góc với St nên góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng SB và SE.

Ta tính góc $\widehat{BSE}$.

Có $SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$; $BE = \frac{a}{2}$.

Theo định lí cosin ta có: $\cos \widehat{BSE} = \frac{SE^2 + SB^2 - BE^2}{2.SE.SB} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \widehat{BSE} = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}$.

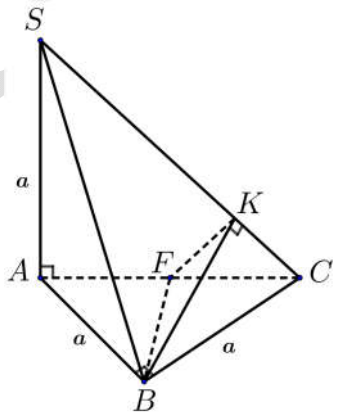
Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA = a$ và $SA \perp (ABC)$, $AB = BC = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Nhận xét: Ta áp dụng phương pháp 3 - trường hợp đặc biệt.

Lời giải

Chọn C.



Ta có $(SAC) \cap (SBC) = SC$.

Gọi F là trung điểm $AC \Rightarrow BF \perp (SAC)$.

Dựng $BK \perp SC$ tại $K \Rightarrow SC \perp (BKF) \Rightarrow \widehat{((SAC),(SBC))} = \widehat{(KB,KF)} = \widehat{BKF}$

$$\Delta CFK \sim \Delta CSA \Rightarrow \frac{FK}{FC} = \frac{SA}{SC} \Rightarrow FK = \frac{FC.SA}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

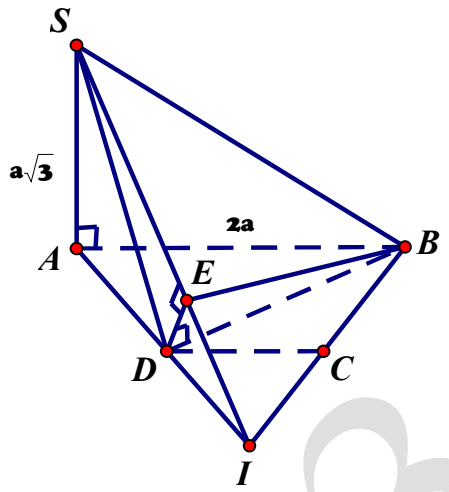
ΔBFK vuông tại $F \Rightarrow \tan\widehat{BKF} = \dfrac{FB}{FK} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{\sqrt{6}}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BKF} = 60^\circ = \widehat{((SAC),(SBC))}$.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$, SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

A. $\sqrt{14}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi $J = AD \cap BC$, $ABCD$ là nửa lục giác đều nên $AD = DC = CB = a$, $AI = IB = a$.

$(SAD) \cap (SBC) = SI \Rightarrow \begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp SI$.

Vì vậy theo trường hợp đặc biệt ta chỉ cần dựng $DE \perp SI$ với $E \in SI$.

Khi đó, $SI \perp (BED) \Rightarrow \widehat{((SAD),(SSBC))} = \widehat{(EB,ED)} = \widehat{BED}$, (Vì ΔBED vuông tại D)

ΔAIB đều nên $BD = a\sqrt{3}$

$SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = a\sqrt{7}$

Hai tam giác vuông SAI và DEI đồng dạng nên: $\dfrac{DE}{SA} = \dfrac{DI}{SI} \Rightarrow DE = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

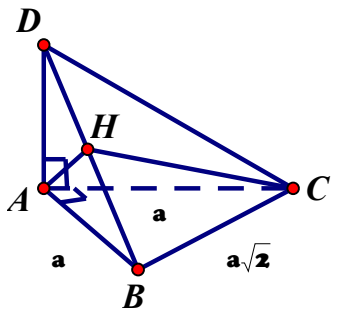
ΔBDE vuông tại $D \Rightarrow \tan\widehat{BED} = \dfrac{BD}{DE} = \sqrt{7}$ A

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$, trên đường thẳng d vuông góc với (ABC) tại điểm A ta lấy một điểm D. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC), trong trường hợp (DBC) là tam giác đều.

A. $\arccos\frac{1}{3}$ **B.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$

Đáp Án: B

Lời giải:



Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC).

Theo công thức diện tích hình chiếu của đa giác, ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta DBC}.\cos\varphi$

Mà: $S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2}DB.DC.\sin 60^0 = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Mặt khác: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}a^2$

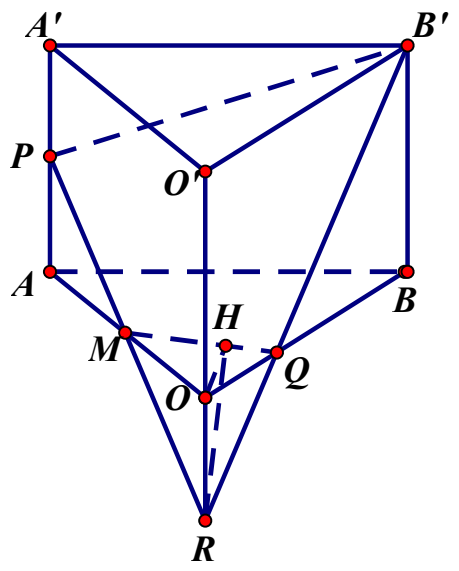
$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DBC}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ví Dụ 7: Cho lăng trụ đứng $OAB.O'A'B'$ có các đáy là các tam giác vuông cân $OA = OB = a, AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M, P lần lượt là trung điểm các cạnh OA, AA'. Tính diện tích thiết diện khi cắt lăng trụ bởi $(B'MP)$?

A. $\frac{a^2\sqrt{15}}{12\sqrt{2}}$ B. $\frac{5a^2\sqrt{15}}{12\sqrt{2}}$ C. $\frac{5a^2\sqrt{15}}{6\sqrt{2}}$ D. $\frac{a^2\sqrt{15}}{6\sqrt{2}}$

Đáp Án: C

Lời giải:



Gọi R là giao điểm của MP và OO' , Q là giao điểm của $B'R$ với OB .

Thiết diện là tứ giác $MPB'Q$, ta có: $\frac{OQ}{O'B'}=\frac{RO}{RO'}=\frac{1}{3}\Rightarrow OQ=\frac{a}{3}$.

Tứ giác $AMQB$ là hình chiếu vuông góc của tứ giác $PMQB'$ trên mặt phẳng (OAB) nên:

$S_{PMQB'}=\frac{S_{AMQB}}{\cos\varphi}$.

Với φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (OAB) và $(MPB'Q)$.

Ta có: $S_{AMQB}=S_{OAB}-S_{OMQ}=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{12}a^2=\frac{5}{12}a^2$

Hạ $OH\perp MQ$, ta có: $\begin{cases}MQ\perp OH\\MQ\perp OR\end{cases}\Rightarrow MQ\perp(OHR)$

Vậy: $\varphi=\widehat{OHR}$ ($\widehat{OHR}$ nhọn)

Ta có: $\cos\varphi=\cos\widehat{OHR}=\frac{OH}{RH}=\frac{OH}{\sqrt{OH^2+OR^2}}=\frac{\frac{a}{\sqrt{13}}}{\sqrt{\frac{a^2}{13}+\frac{a^2}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$

Vậy: $S_{PMQB'}=\frac{5a^2\sqrt{15}}{12\sqrt{2}}$

Ví dụ 8: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là một tam giác cân với $AB=AC=a,\widehat{BAC}=120^0$, cạnh bên $BB'=a$. Gọi I là trung điểm CC'. Chứng minh rằng tam giác $AB'I$ vuông ở A. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.