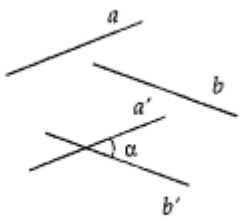
Hai đường thẳng vuông góc

1. Định nghĩa:



Góc giữa hai đường thẳng cắt nhau a và b là góc nhỏ nhất trong bốn góc mà a và b cắt nhau tạo nên.

Góc giữa hai đường thẳng cắt nhau a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b.

Chú ý: góc giữa hai đường thẳng luôn là góc nhọn (hoặc vuông).

2. Phương pháp

Phương pháp 1: Sử dụng định lý hàm số cosin hoặc tỉ số lượng giác.

Phương pháp 2: Sử dụng tích vô hướng: nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là hai vecto chỉ phương (hoặc vecto pháp tuyến) của hai đường thẳng a và b thì góc φ của hai đường thẳng này được xác định bởi công thức

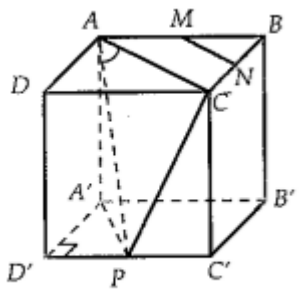
$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right| = \frac{\left|\vec{u}.\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}.$$

Ví dụ 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, $C'D'$. Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP.

A. 45^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0

Đáp án A.

Lời giải



Phương pháp 1: Giả sử hình lập phương có cạnh bằng a và $MN//AC$ nên: $\left(\widehat{MN,AP}\right) = \left(\widehat{AC,AP}\right)$. Ta tính góc $\widehat{PAC}$.

Vì $\Delta A'D'P$ vuông tại D' nên $A'P = \sqrt{A'D'^2 + D'P^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\Delta AA'P$ vuông tại A' nên $AP = \sqrt{A'A^2 + A'P^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2}$.

$\Delta CC'P$ vuông tại C' nên $CP = \sqrt{CC'^2 + C'P^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Ta có AC là đường chéo của hình vuông $ABCD$ nên $AC = a\sqrt{2}$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ACP ta có:

$$CP^2 = AC^2 + AP^2 - 2AC.AP.\cos\widehat{CAP}$$

$$\Rightarrow \cos\widehat{CAP} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\widehat{CAP} = 45° < 90°$$

Nên $\left(\widehat{AC;AP}\right) = \widehat{CAP} = 45°$ hay $\left(\widehat{MN;AP}\right) = 45°$. Chọn A.

Phương pháp 2: Ta có $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AP} = \left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{AP}\right|.\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AP}\right) \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AP}\right) = \dfrac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AP}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{AP}\right|}$ (*)

Ta có: $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AP} = \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}\right)\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'P}\right)$

$$= \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{D'P} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{D'P}$$

$$= 0 + 0 + \frac{a}{2}.\frac{a}{2} + 0 + \frac{a}{2}.a + 0 = \frac{3a^2}{4} (1)$$

$$\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{AP}\right| = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{3a}{2} = \frac{3\sqrt{2}a^2}{4} (2)$$

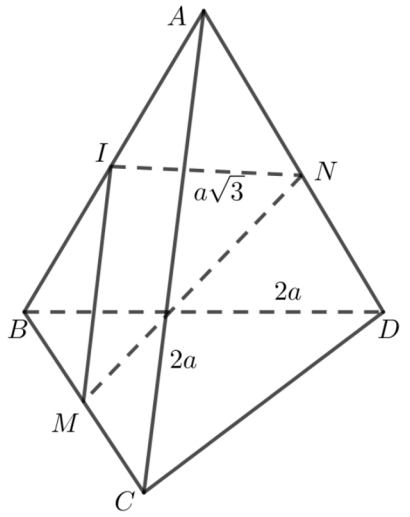
Thay $(1),(2)$ vào $(*)$ ta được: $\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AP}\right) = \dfrac{\frac{3a^2}{4}}{\frac{3\sqrt{2}a^2}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\widehat{MN,AP}\right) = 45^0$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC, AD. Biết rằng $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc của AB và CD.

A. 45^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Đáp án C.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của AC. Ta có $IM = IN = a$.

Áp dụng định lý cosin cho ΔIMN ta có:

$$\cos\widehat{MIN} = \frac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2.IM.IN} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2.a.a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MIN} = 120^0.$$

Vì $IM // AB, IN // CD \Rightarrow \left(\widehat{AB,CD}\right) = \left(\widehat{IM,IN}\right) = 180^0 - 120^0 = 60^0$.

Ví dụ 3: Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', $B'C'$.

Lời giải

Chọn D

Phương pháp 1:

Gọi H là trung điểm của BC, φ là góc giữa AA' và $B'C'$.

Ta có $AA' // BB'$ và $B'C' // BC$ nên góc giữa $\left(\widehat{AA',B'C'}\right) = \left(\widehat{BB',BC}\right)$.

Ta tính góc $\widehat{B'BH}$

ΔABC vuông tại A nên ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$.

$AH = \frac{1}{2}BC = a \Rightarrow A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Vì $AH \perp (A'B'C')$ nên $\Delta A'B'H$ vuông tại A'

$B'H = \sqrt{A'H^2 + A'B'^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$.

$\cos\widehat{B'BH}=\dfrac{B'B^2+BH^2-B'H^2}{2B'B.BH}=\dfrac{4a^2+a^2-4a^2}{2.2a.a}=\dfrac{1}{4}$ Chọn A

Phương pháp 2:

Ta có

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{AA'};\overrightarrow{B'C'}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{B'C'}\right|}{\left|\overrightarrow{AA'}\right|.\left|\overrightarrow{B'C'}\right|}=\frac{\left|\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HA'}\right).\overrightarrow{BC}\right|}{2a.2a}=\frac{\left|\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HA'}.\overrightarrow{BC}\right|}{4a^2}=\frac{\left|\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}\right|}{4a^2}$$

$$=\frac{\left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\right|}{4a^2}=\frac{\left|\frac{1}{2}\left(AC^2-AB^2\right)\right|}{4a^2}=\frac{\left|\frac{1}{2}\left(3a^2-a^2\right)\right|}{4a^2}=\frac{1}{4}.$$

Ví dụ 5. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD. Gọi M là trung điểm CD. Tính cosin góc của AC và BM.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1. Gọi N là trung điểm AD ta có: $MN//AC\Rightarrow\left(\widehat{AC;BM}\right)=\left(\widehat{MN;BM}\right)$. Ta tính góc $\widehat{BMN}$

. Ta có: $BM=BN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (trung tuyến tam giác đều).

$MN=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a}{2}$.

Áp dụng định lý cosin cho ΔBMN, ta được:

$$\cos\widehat{BMN}=\frac{BM^2+MN^2-BN^2}{2BM.MN}=\frac{MN}{2BM}=\frac{\sqrt{3}}{6}>0.$$

Vậy $\cos\left(\widehat{AC;BM}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Cách 2. $\cos\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BM}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BM}\right|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CB}\right)\right|}{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}$

$$=\frac{\left|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}\right|}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\left|a.\frac{a}{2}\cos120^0-a.a.\cos120^0\right|}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\left|-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}\right|}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$