GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

I. Định nghĩa giới hạn của hàm số tại một điểm

1. Giới hạn hữu hạn tại một điểm

Định nghĩa 1:

Cho $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\setminus\{x_0\}$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_n\in(a;b)\setminus\{x_0\}, x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L.$

Nhận xét:

- Giới hạn của hàm số được định nghĩa thông qua khái niệm giới hạn của dãy số.
- Hàm số không nhất thiết phải xác định tại x_0.

Định nghĩa 2 (Giới hạn một bên):

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_0<x_n<b, x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L.$

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $a<x_n<x_0, x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L.$

STUDY TIP

$x\to x_0^+$ nghĩa là $x\to x_0$ và $x>x_0$.

$x\to x_0^-$ nghĩa là $x\to x_0$ và $x<x_0$.

Định lí 1

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L.$

2. Giới hạn vô cực tại một điểm

Định nghĩa 3

Cho $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\setminus\{x_0\}$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_n\in(a;b)\setminus\{x_0\}, x_n\to x_0$ ta có $f(x_n)=+\infty.$

Lưu ý:

Các định nghĩa $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

3. Lưu ý:

a) $f(x)$ không nhất thiết phải xác định tại điểm x_0.

b) Ta chỉ xét giới hạn của $f(x)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $(a;b)$ (dù nhỏ) chứa x_0 mà $f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\setminus\{x_0\}$.

Chẳng hạn, hàm số $f(x)=\sqrt{x}$ có tập xác định là $D=[0;+\infty)$. Do đó ta không xét giới hạn của hàm số tại điểm $x_0=0$, do không có một khoảng $(a;b)$ nào chứa điểm 0 mà $f(x)$ xác định trên đó cả. Tương tự vậy ta cũng không xét giới hạn của $f(x)$ tại mọi điểm $x_0<0$.

c) Ta chỉ xét giới hạn bên phải của $f(x)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $(x_0;b)$ (khoảng nằm bên phải x_0) mà $f(x)$ xác định trên đó.

Tương tự, ta chỉ xét giới hạn bên trái của $f(x)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $(a;x_0)$ (khoảng nằm bên trái x_0) mà $f(x)$ xác định trên đó.

Chẳng hạn, với hàm số $f(x)=\sqrt{x-1}$, tại điểm $x_0=1$, ta chỉ xét giới hạn bên phải. Với hàm số $g(x)=\sqrt{1-x}$, tại điểm $x_0=1$, ta chỉ xét giới hạn bên trái.

d) $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x^-_o} f(x)=\lim\limits_{x\to x^+_o} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x^-_o} f(x)=\lim\limits_{x\to x^+_o} f(x)=-\infty$

II. Định nghĩa giới hạn của hàm số tại vô cực

1. Giới hạn hữu hạn tại vô cực

Định nghĩa 4

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số (x_n), $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta đều có $\lim f(x)=L$.

LƯU Ý: Định nghĩa $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

2. Giới hạn vô cực tại vô cực

Định nghĩa 5

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ với mọi dãy số (x_n), $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ ta đều có $\lim f(x) = +\infty$.

LƯU Ý: Các định nghĩa: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

III. Một số giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{x\to x_o} x = x_o$.

b) $\lim\limits_{x\to x_o} c = c; \lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$ (c là hằng số)

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$ (c là hằng số, k nguyên dương).

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số nguyên lẻ; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số nguyên chẵn.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \left[-f(x)\right] = -\infty$.

IV. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 2

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = M$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x\to x_o} \left[f(x) \pm g(x)\right] = L \pm M$.

b) $\lim\limits_{x\to x_o} \left[f(x)g(x)\right] = LM$; $\lim\limits_{x\to x_o} \left[cf(x)\right] = cL$ với c là một là một hằng số.

c) $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M} (M \neq 0)$.

STUDY TIP: Giới hạn hữu hạn, giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số tại một điểm bằng tổng, hiệu, tích, thương các giới hạn của chúng tại điểm đó (trong trường hợp thương, giới hạn của mẫu phải khác không).

Định lí 3

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = L$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x\to x_o} |f(x)| = |L|$.

b) $\lim\limits_{x\to x_o} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$.

c) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $J \setminus \{x_o\}$, trong đó J là khoảng nào đó chứa x_o, thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_o} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

LƯU Ý: Định lí 2, định lí 3 vẫn đúng khi thay $x \to x_o$ bởi $x \to x^-_o, x \to x^+_o$.

V. Quy tắc về giới hạn vô cực

Các định lí và quy tắc dưới đây được áp dụng cho mọi trường hợp: $x \to x_o, x \to x^-_o, x \to x^+_o, x \to +\infty$ và $x \to -\infty$.

Tuyên nhiên, để cho gọn, ta chỉ phát biểu cho trường hợp $x \to x_o$.

Quy tắc 1 (Quy tắc tìm giới hạn của tích).

$L = \lim\limits_{x \to x_o} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_o} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_o} \left[f(x)g(x) \right]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

STUDY TIP: Giới hạn của tích hai hàm số

- Tích của một hàm số có giới hạn hữu hạn khác 0 với một hàm số có giới hạn vô cực là một hàm số có giới hạn vô cực.

- Dấu của giới hạn theo quy tắc dấu của phép nhân hai số.

Quy tắc 2 (Quy tắc tìm giới hạn của thương)

$L = \lim\limits_{x \to x_o} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_o} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
		-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
		-	$+\infty$

(Dấu của $g(x)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_o$).

STUDY TIP: Giới hạn của thương hai hàm số. Tử thức có giới hạn hữu hạn khác 0:

- Mẫu thức càng tang (dần đến vô cực) thì phân thức càng nhỏ (dần đến 0).

- Mẫu thức càng nhỏ (dần đến 0) thì phân thức có giá trị tuyệt đối càng lớn (dần đến vô cực).

- Dấu của giới hạn theo quy tắc dấu của phép chia hai số.

VI. Các dạng vô định: Gồm $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty$ **và** $\infty - \infty$**.**

hoc360.net