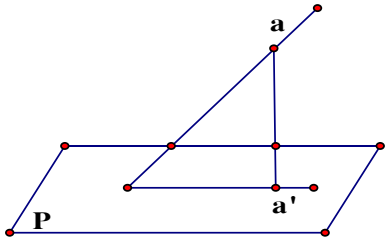
Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

1. Định nghĩa.

Nếu đường thẳng $a \perp (P)$ thì góc giữa đường thẳng a và (P) bằng 90^0.

Nếu đường thẳng a không vuông góc với (P) thì góc giữa đường thẳng a và (P) là góc giữa a và hình chiếu a' của a trên (P).



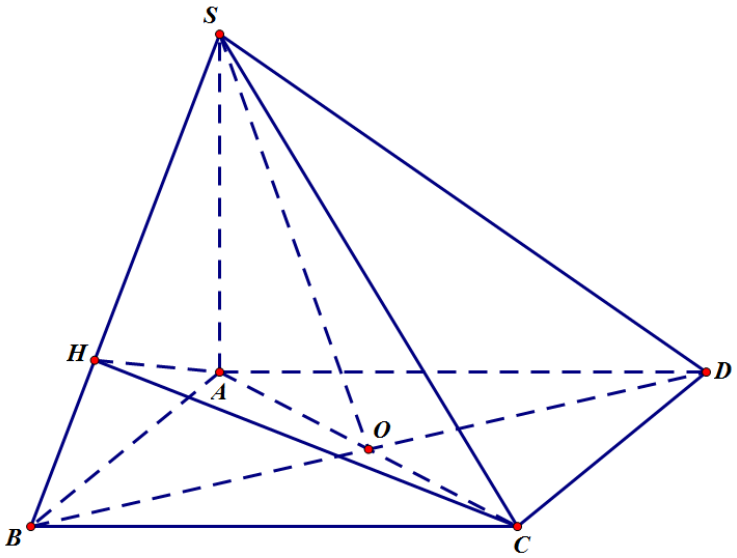
2. Phương pháp tính.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và (SAB), β là góc giữa AC và (SBC). Giá trị $\tan\alpha + \sin\beta$ bằng?

A. $\frac{1+\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{19}}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{1+\sqrt{20}}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Để xác định góc giữa SC và (SAB) ta xác định hình chiếu của SC lên mặt phẳng (SAB).

Ta có: S là hình chiếu của S trên (SAB), B là hình chiếu của C trên (SAB) vì $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases}$.

Vậy SB là hình chiếu của SC trên $(SAB) \Rightarrow (SC,(SAB)) = \widehat{BSC} = \alpha$.

ΔSBC vuông tại B $\Rightarrow \tan\alpha = \tan\widehat{BSC} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{a}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

Kẻ $AH \perp SB$ tại H mà $BC \perp (SAB)$ nên $AH \perp BC$.

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow HC$ là hình chiếu vuông góc của AC trên (SBC)

$\Rightarrow (AC,(SBC)) = \widehat{ACH} = \beta$.

ΔSAB vuông nên $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$.

ΔACH vuông tại H $\Rightarrow \sin\beta = \sin\widehat{ACH} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $\tan\alpha + \sin\beta = \dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{21}}{7}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp đều $S.ABCD$, đáy có cạnh bằng a và có tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC. Biết góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính góc giữa MN và (SAO).

A. $\varphi = \arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$.

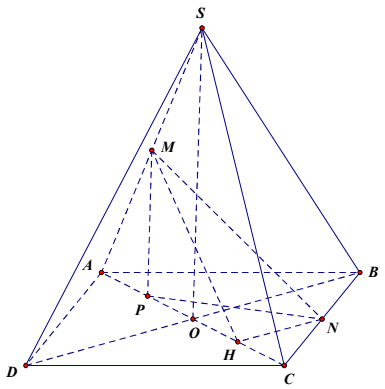
B. $\varphi = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

C. $\varphi = \arcsin\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$.

D. $\varphi = \arcsin\dfrac{1}{4\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi P là trung điểm của $AO \Rightarrow MP$ là đường trung bình của $\Delta SAO \Rightarrow MP//SO$ $\Rightarrow MP \perp (ABCD) \Rightarrow$ Góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{MNP} = 60°$.

Áp dụng định lý cosin cho ΔPNC ta có:

$$NP^2 = CN^2 + CP^2 - 2CN.CP.\cos 45° = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{3}{4}a\sqrt{2}\right)^2 - 2.\frac{a}{2}.\frac{3}{4}a\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{8} - \frac{3\sqrt{2}a^2}{4\sqrt{2}} = \frac{11a^2}{8} - \frac{3a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$$

Trong tam giác vuông MNP ta có :

$MN = \dfrac{PN}{\cos 60°} = \sqrt{\dfrac{5}{2}}.a$ và $PM = NP.\tan 60° = a\sqrt{\dfrac{15}{8}} \Rightarrow SO = 2MP = \sqrt{\dfrac{15}{2}}.a$.

Gọi H là trung điểm $CO \Rightarrow NH//BD \Rightarrow NH \perp AC$.

Mà $NH \perp SO \Rightarrow NH \perp (SAC)$ do đó $\widehat{(MN,(SAC))} = \widehat{NMH}$.

Ta có : $HN = \dfrac{1}{2}OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $MN = \dfrac{\sqrt{5}a}{\sqrt{2}}$ (tính trên)

Vậy trong ΔMHN ta có : $\sin\widehat{NMH} = \dfrac{NH}{MN} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$. Nên nếu gọi φ là góc giữa MN và (SAO) thì: $\sin\varphi = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ hay $\varphi = \arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\left(0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có a là độ dài cạnh đáy và $\widehat{CBS} = \alpha$. Gọi φ là góc giữa cạnh bên với đáy. Tính $\sin\varphi$ theo α.

A. $\sin\varphi = \dfrac{1}{3}\sqrt{9 - 12\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

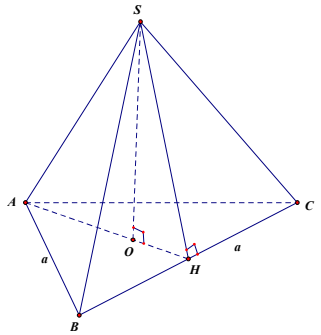
B. $\sin\varphi = \sqrt{9 - 12\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

C. $\sin\varphi = \dfrac{1}{3}\sqrt{9 - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

D. $\sin\varphi = \dfrac{1}{3}\sqrt{9 + 12\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi H là trung điểm BC, O là chân đường cao hạ từ S.

Ta có $AO = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, ΔSHB vuông tại H nên ta có:

Ví dụ 5. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và $\widehat{CBS} = \alpha$. Gọi φ là góc giữa cạnh bên và đáy. Tính $\sin\varphi$ theo α.

A. $\sin\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{9 - 12\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

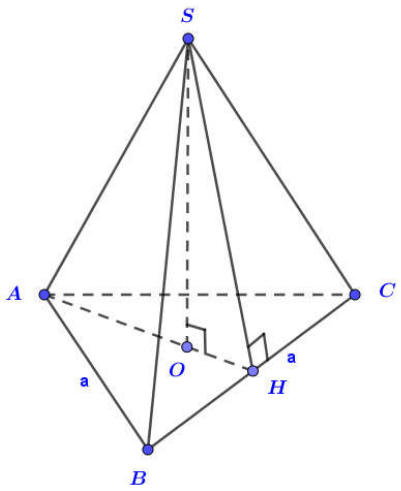
B. $\sin\varphi = \sqrt{9 - 12\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

C. $\sin\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{9 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

D. $\sin\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{9 + 12\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi H là trung điểm BC, O là chân đường cao hạ từ S.

Ta có $AO = \frac{2}{3}AH = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

$\triangle SHB$ vuông tại H nên: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{BH}{SB} \Rightarrow SB = \frac{BH}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow SA = SB = SC = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Trong tam giác vuông SAO ta có: $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}-\dfrac{3}{9}a^2}=\dfrac{a}{6\sin\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{9-12\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

Góc giữa cạnh bên và đáy là $\widehat{SAO}\Rightarrow\sin\varphi=\dfrac{SO}{SA}=\dfrac{1}{3}\sqrt{9-12\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Thiết diện qua đỉnh A và vuông góc với cạnh bên SC có diện tích thiết diện đó bằng nửa diện tích đáy. Gọi α là góc giữa cạnh bên và đáy. Tính α.

A. $\alpha=\arcsin\dfrac{1+\sqrt{33}}{4}$.

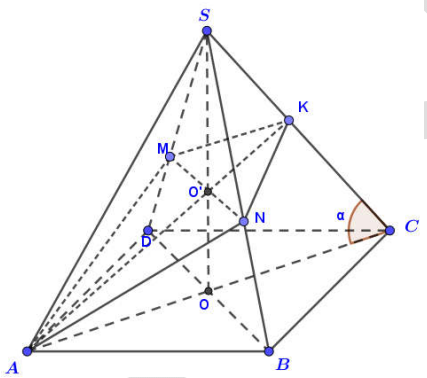
B. $\alpha=\arcsin\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$.

C. $\alpha=\arcsin\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}$.

D. $\alpha=\arcsin\dfrac{2+\sqrt{33}}{8}$.

Lời giải

Chọn B.



Đặt cạnh đáy hình vuông $ABCD$ là $a\Rightarrow AC=a\sqrt{2}$.

Giả sử thiết diện qua A là cắt SC, SB, SD lần lượt tại K, N, M.

Theo giả thiết $SC\perp(ANKM)\Rightarrow MN\perp SC$.

Mặt khác: $BD\perp SC$ (vì $BD\perp(SAC)$) $\Rightarrow MN//BD\Rightarrow MN\perp(SAC)\Rightarrow MN\perp AK$

$\Rightarrow S_{ANKM}=\dfrac{1}{2}AK.MN$.

$\Rightarrow\widehat{SCA}=\alpha\Rightarrow AK=AC\sin\alpha=a\sqrt{2}\sin\alpha$.

$\Rightarrow\dfrac{MN}{BD}=\dfrac{SO'}{SO}=\dfrac{SO-OO'}{SO}=1-\dfrac{OO'}{SO}$ (vì $\widehat{AO'O}=\widehat{ACK}=\alpha$; với $O'=MN\cap AK$).

$\Rightarrow OO'=\dfrac{1}{2}a\sqrt{2}\cot\alpha\Rightarrow\dfrac{MN}{BD}=1-\dfrac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cot\alpha}{OC\tan\alpha}=1-\cot^2\alpha$.

$\Rightarrow MN=BD\left(1-\cot^2\alpha\right)=a\sqrt{2}\left(1-\cot^2\alpha\right)\left(0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ta có $S_{AMKN}=\frac{1}{2}S_{ABCD}\Leftrightarrow\frac{1}{2}AK.MN=\frac{1}{2}a^2\Leftrightarrow a\sqrt{2}\sin\alpha.a\sqrt{2}\left(1-\cot^2\alpha\right)=a^2$

$\Leftrightarrow 2\left(2\sin^2\alpha-1\right)=\sin\alpha\Leftrightarrow 4\sin^2\alpha-\sin\alpha-2=0\left(0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\right)$

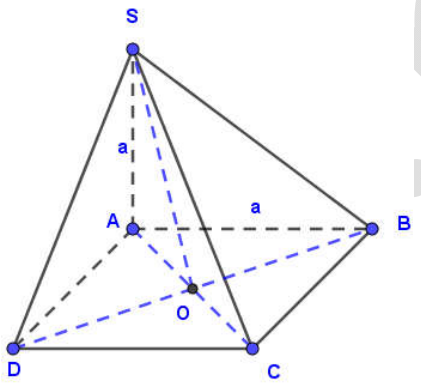
$\Rightarrow\sin\alpha=\frac{1+\sqrt{33}}{8}\Rightarrow\alpha=\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$.

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=AB=a$. Tính diện tích tam giác SBD theo a.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi $O=AC\cap BD$ ta có: $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp SO$.

Khi đó $S_{BCD}=\frac{1}{2}SO.BD=\frac{1}{2}\sqrt{SA^2+AO^2}.a\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=AB=a$. Tính Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SBD).

A. $\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$. **B.** $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. **C.** $\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi H là hình chiếu của C lên SO $(O=AC\cap BD)$ (vì góc $\widehat{SOC}$ tù nên H nằm ngoài SO).

Ta có: $\begin{cases}CH\perp SO\\CH\perp BD\end{cases}\Rightarrow CH\perp(SBD)\Rightarrow\left(\widehat{SC,(SBD)}\right)=\widehat{CSO}$.

Ta có: $\Delta SAO\sim\Delta CHO\Rightarrow\frac{SA}{SH}=\frac{SO}{CO}=\frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow CH=\frac{a}{\sqrt{3}}\Rightarrow\sin\widehat{CSO}=\frac{CH}{SC}=\frac{1}{3}$.

$\Rightarrow \widehat{CSO} = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$.

hoc360.net