ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG

A. LÝ THUYẾT

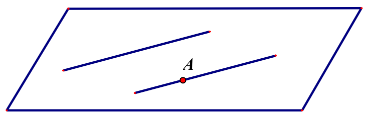
1. Định nghĩa

Trong phần vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian, ta biết rằng hai đường thẳng phân biệt bất kì hoặc chéo nhau hoặc song song hoặc cắt nhau. Nếu hai đường thẳng phân biệt đồng phẳng và không cắt nhau thì ta nói hai đường thẳng đó song song với nhau.

Định nghĩa:

Hai đường thẳng phân biệt a,b trong không gian được gọi là song song với nhau, kí hiệu $a//b$ nếu chúng đồng phẳng và không cắt nhau.

2. Tính chất

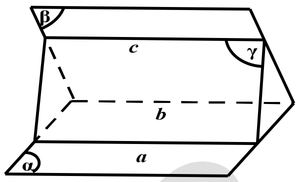


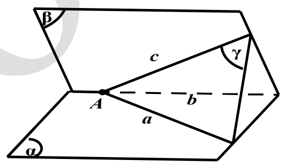
Định lí 1: Trong không gian cho đường thẳng d và điểm A nằm ngoài d. Lúc đó tồn tại duy nhất một đường thẳng a và A và song song với đường thẳng d.

Chú ý:

Định lí này cho ta thêm một cách xác định đường thẳng trong không gian: đó là đường thẳng đi qua một điểm và song song với một đường thẳng cho trước không chứa điểm đó. Kết hợp với định lí 2 dưới đây cho ta một cách để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.

Định lí 2 (Về giao tuyến của ba mặt phẳng):





Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

Hệ quả:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

Đến đây ta có thể bổ sung một phương pháp tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

> ***Bước 1:*** Chỉ ra hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ lần lượt chứa hai đường thẳng song song a,b.
>
> ***Bước 2:*** Tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng
>
> ***Bước 3:*** Khi đó $(\alpha)\cap(\beta)=Mx//a//b$

Định lí 3:

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Như vậy, cho hai đường thẳng phân biệt thỏa mãn $\begin{cases} a//b \\ b//c \end{cases} \Rightarrow a//b$

3. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

a) Định nghĩa

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không là góc giữa hai đường thẳng a'và b'cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.

b. Phương pháp tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Bước 1: Dựng góc

- Tìm trên hình vẽ xem góc giữa hai đường thẳng có sẵn không?

- Nếu không có sẵn thì ta tiến hành:
+ Chọn một điểm O bất kì trong không gian.
+ Qua O dựng đường thẳng $a' \parallel a,\ b' \parallel b$. Góc nhọn hay góc vuông tọc bởi a', b' chính là góc giữa a và b.

Lưu ý:
+ Ta thường lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng a và b.
+ Chọn O sao cho góc giữa a', b' là góc của một tam giác mà độ dài các cạnh của nó đã biết hoặc có thể tính dễ dàng

Bước 2: Tính góc

Dùng hệ thức lượng trong tam giác, tỉ số lượng giác hay định lí cosin, sin. Trường hợp góc giữa hai đường thẳng a và b bằng 90^0 ta nói $a \perp b$.

B. DẠNG TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG

DẠNG 1. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

Phương pháp chung: Để chứng minh hai đường thẳng song song trong không gian ta sẽ sử dụng một trong các sách sau:
+ Cách 1: Chứng minh hai đường thẳng đồng phẳng, sau đó áp dụng các phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng như tính chất đường trung bình, định lí Thales đảo, tính chất song song của hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3…
+ Cách 2: Sử dụng tính chất bắc cầu: Chứng minh hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba.
+ Cách 3: Áp dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD. Đường thẳng IJ song song với đường thẳng:

A. CM trong đó M là trung điểm BD. **B.** AC.
C. DB. **D.** CD.

Lời giải:

Đáp án D.

Cách 1: (Đưa về cùng mặt phẳng và vận dụng kiến thức hình học phẳng)

Gọi E là trung điểm của AB. Ta có $\begin{cases} I \in CE \\ J \in DE \end{cases}$ nên suy ra IJ và CD đồng phẳng.

Do I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD nên ta có: $\frac{EI}{EC} = \frac{EJ}{ED} = \frac{1}{3}$. Suy ra $IJ \parallel CD$.

Cách 2: (Sử dụng tính chất bắc cầu)

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD và BC. Suy ra $MN \parallel CD$ (1).

Do I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD nên ta có: $\frac{AI}{AN} = \frac{AJ}{AM} = \frac{2}{3}$. Suy ra $IJ \parallel MN$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $IJ \parallel CD$.

Cách 3: (Sử dụng định lí giao tuyến của 3 mặt phẳng).

Có lẽ trong ví dụ này cách này hơi dài, song chúng tôi vẫn sẽ trình bày ở đây, để các bạn có thể hiểu và vận dụng cách 3 hợp lí trong các ví dụ khác.

Dễ thấy, bốn điểm D, C, I, J đồng phẳng.

Ta có: $\begin{cases} (DCIJ)\cap(AMN)=IJ \\ (DCIJ)\cap(BCD)=CD \\ (AMN)\cap(BCD)=MN \\ MN \parallel CD \end{cases} \Rightarrow IJ \parallel CD \parallel MN$.

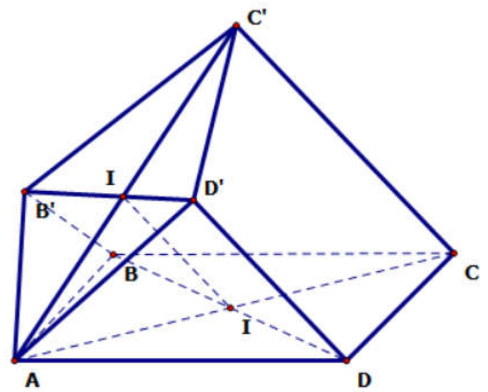
Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi Bx, Cy, Dz là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua B, C, D và nằm về một phía của mặt phẳng $(ABCD)$, đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng đi qua A và cắt Bx, Cy, Dz lần lượt tại B', C', D' với $BB'=2$, $DD'=4$. Khi đó CC' bằng:

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải:

Đáp án D.

Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. I là trung điểm của $B'D'$.



Do Bx, Dz song song với nhau nên $BDD'B'$ là hình thang và OI là đường trung bình của hình thang đó. Suy ra $IO=\dfrac{BB'+DD'}{2}=3$.

Mặt khác OI song song với CC' (vì cùng song song với DD') nên có bốn điểm C, C', O, I đồng phẳng.

Giao tuyến của hai mặt phẳng $(AB'D')$ với (ACC') là AC'. Lại có I thuộc $(AB'D')$, I thuộc (ACC'). Do đó A, I, C' thẳng hàng. Từ đây dễ dàng suy ra, I là trung điểm đoạn AC'. Do vậy, $CC'=2OI=6$.

Nhận xét: Ta có bài toán tổng quát cho bài toán này như sau:

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi At, Bx, Cy, Dz là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua A, B, C, D đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng cắt At, Bx, Cy, Dz lần lượt tại A', B', C', D'. Khi đó $A'B'C'D'$ là hình bình hành và $AA'+CC'=BB'+DD'$.

Do đó khi biết 3 trong 4 đối tượng AA', BB', CC', DD' ta sẽ dễ dàng tính được đối tượng còn lại.

Ví dụ 3. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi At, Bx, Cy, Dz là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua A, B, C, D và nằm về một phía của mặt phẳng $(ABCD)$, đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng (α) di động cắt At, Bx, Cy, Dz lần lượt tại A', B', C', D' sao cho $AA'+CC'+BB'+DD'=a$ (O có độ dài cho trước). Mặt phẳng (α) luôn đi qua điểm cố định I. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI=\dfrac{a}{2}$.

B. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI=\dfrac{a}{4}$.

C. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI = \frac{3a}{2}$.

D. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI = a$.

Lời giải:

Đáp án B.

Theo ví dụ 2, ta có : $AA' + CC' = 2OI = BB' + AA' + CC' + BB' + DD' = a$ nên $OI = \frac{a}{4}$.

Bài tập tương tự: Cho tam giác ABC. Ở về một phía của (ABC), người ta kẻ các đường thẳng song song Ax, By, Cz. lần lượt lấy trên Ax, By, Cz các điểm A', B', C'.

a) M và M' lần lượt là trung điểm $AB, A'B'$. Chứng minh rằng MM' song song với CC'.

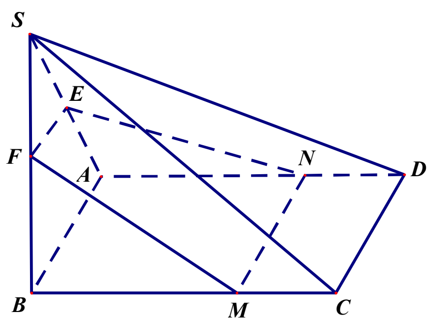
b) G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng GG' song song với CC'.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm M, N thứ tự thuộc các đoạn BC và SD sao cho $\frac{MB}{MC} = \frac{NS}{ND} = \frac{1}{2}$. Gọi I là giao điểm của MD và AB.

a) Chứng minh rằng $MN // SI$.

b) Qua M kẻ $MN // CD$ (P là điểm trên BD). Chứng minh rằng $MP // SB$.

Lời giải:



a) Ta có $BI // CD \Rightarrow \frac{IM}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{1}{2}$

Trong tam giác SDI có $\frac{SN}{ND} = \frac{IM}{MD}\left(= \frac{1}{2}\right) \Rightarrow MN // SI$.

b) Ta có $MP // AB \Rightarrow \frac{BP}{PD} = \frac{MB}{MC} = \frac{1}{2}$

Trong tam giác SBD có $\frac{BP}{PD} = \frac{SN}{ND} = \frac{1}{2} \Rightarrow NP // SB$.

DẠNG 2. TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG (cách 2). THIẾT DIỆN QUA MỘT ĐƯỜNG THẲNG VÀ SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC.

- *Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (cách 2)*

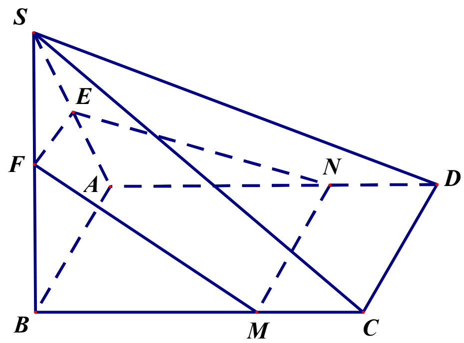
Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng a và b song song, ta tìm:
+ Một điểm chung của hai mặt phẳng đó.
+ Giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng qua điểm chung và song song với a và b (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $SA = SB = a, SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SB. M là điểm tùy ý trên cạnh BC (không trùng với B, C)

a) Xác định giao tuyến của các mặt phẳng (SAB) và (SCD); (SAD) và (SBC).

b) Xác định giao tuyến của các mặt phẳng (MEF) và $(ABCD)$. Từ đó suy ra giao điểm N của AD và (MEF). Chứng minh rằng $MNEF$ là hình thang cân.

Lời giải:



a) Ta có $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB // CD, AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx // AB // CD.$

Tương tự $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SBC) \\ AD // BC, AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sy // AD // BC.$

b) Do E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB nên EF là đường trung bình của tam giác SAB.

Do đó $EF // AB, EF/ = \frac{1}{2} AB$ (1)

Ta có $\begin{cases} EF // AB, EF \subset (MEF), AB \subset (ABCD) \\ M \in (MEF) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (MEF) \cap (ABCD) = Mt // AB // CD$ (2)

Gọi N là giao điểm của Mt với AD. Ta có:

$\begin{cases} N \in Mt, Mt \subset (MEF), AB \subset (ABCD) \\ M \in AD \end{cases} \Rightarrow \{N\} = AD \cap (MEF)$.

Từ (1) và (2) suy ra $EF // MN, EF = \frac{1}{2} AB < MN$. Suy ra $MNEF$ là hình thang.

Dễ thấy $\Delta SAD = \Delta SBC (c.c.c) \Rightarrow \widehat{SAD} = \widehat{SBC} \Rightarrow \Delta EAN = \Delta FBM (c.g.c) \Rightarrow FM = EN$ vậy $MNEF$ là hình thang cân.

Thiết diện qua một đường thẳng và song song với một đường thẳng cho trước
Được xác dịnh bằng cách phối hợp hai cách xác định giao tuyến đã biết:
Cách 1: Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng.
Cách 2: Tìm một điểm chung và phương (song song với một đường thẳng cho trước) của giao tuyến.

Ví dụ 2. *Cho tứ diện* $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC, Gọi E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

A. Tam giác MNE.

B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD.

C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD mà $EF // BC$.

D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD và $EF // BC$.

Lời giải:

Trong mặt phẳng (BCD), Gọi F là giao điểm của đường thẳng qua E, song song BC với BD.

Ta có $\begin{cases}(MNE)\cap(ABC)=MN;(MNE)\cap(BCD)=EF\\(MNE)\cap(ABD)=MF;(MNE)\cap(ACD)=NE\end{cases}$

Vậy tứ giác $MNEF$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNE).

Lại có $\begin{cases}(MNE)\cap(ABC)=MN\\(MNE)\cap(BCD)=EF\\(MCD)\cap(ABC)=BC\\BC//MN\end{cases}\Rightarrow EF//MN.$

Suy ra tứ giác $MNEF$ là hình thang $(EF>MN)$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA. Thiết diện của mặt phẳng (MCD) với hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A. Tam giác. **B.** Hình bình hành.
C. Hình thang. **D.** Hình thoi.

Lời giải:

Đáp án C.

Gọi N là trung điểm của SB. Do $MN//AB$, $AB//CD\Rightarrow MN//CD$.
Như vậy suy ra N thuộc mặt phẳng (MCD).

Ta có: $\begin{cases}(MCD)\cap(SAD)=MD\\(MCD)\cap(SAB)=MN\\(MCD)\cap(SBC)=NC\\(MCD)\cap(ABCD)=CD\end{cases}$

Vậy tứ giác $MNCD$ là thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (MCD).
Kết hợp với $MN//CD$, suy ra $MNCD$ là hình thang.

DẠNG 3: GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a$, $AC=BD=b$, $AD=BC=c$. Xét các khẳng định sau:

a. Cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $\frac{|b^2-c^2|}{a^2}$.

b. Cosin của góc giữa hai đường thẳng AC và BD bằng $\frac{|a^2-c^2|}{b^2}$.

c. Cosin của góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng $\frac{b^2-a^2}{c^2}$.

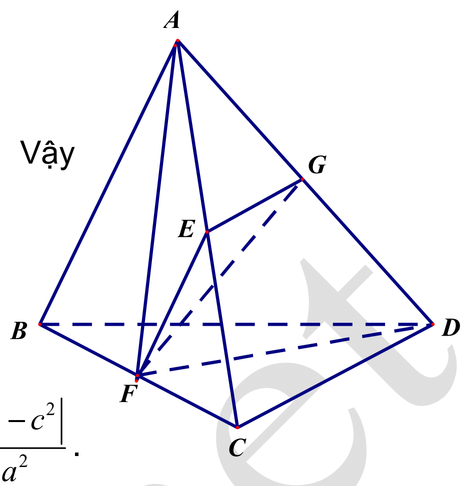
Trong các khẳng định trên có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải:

Đáp án C.

Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của AC, BC, AD.
Ta có: $EF//AB$, $EG//CD$, suy ra góc giữa hai đường thẳng AB và CD.



Ta có: $AF^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$.

Do $\Delta ABC = \Delta DBC\left(c.c.c\right)$ nên $AF = DF$.

Suy ra ΔAFD cân tại F. Vậy $FG \perp AD \Rightarrow FG = \sqrt{FA^2 - AG^2} = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$.

Xét tam giác EFG có: $\cos\widehat{FEG} = \dfrac{EF^2 + EG^2 - FG^2}{2EF.EG} = \dfrac{c^2 - b^2}{a^2}$.

Vì $0^o \le \left(\widehat{EF,EG}\right) \le 90^o \Rightarrow \cos\left(\widehat{EF,EG}\right) = \left|\cos\widehat{FEG}\right| = \dfrac{\left|b^2 - c^2\right|}{a^2}$.

Vậy cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $\dfrac{\left|b^2 - c^2\right|}{a^2}$.

Tương tự ta cũng suy ra cosin của góc giữa AC và BD bằng $\dfrac{\left|a^2 - c^2\right|}{b^2}$.

Nhận xét: Từ ví dụ này, ta còn suy ra được một trong ba giá trị $a^2\cos\left(AB,CD\right)$; $b^2\cos\left(AC,BD\right)$; $c^2\cos\left(AD,BC\right)$ bằng tổng hai giá trị còn lại. Cũng từ ví dụ này ta còn suy ra được với tứ diện đều $ABCD$ thì góc giữa các cặp cạnh đối diện luôn bằng 90^o

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Tồn tại hai đường thẳng c, d song song với nhau, mỗi đường đều cắt cả a và b.

B. Không thể tồn tại hai đường thẳng c, d phân biệt mỗi đường đều cắt cả a và b.

C. Không thể tồn tại một đường thẳng cắt cả a và b.

D. Cả ba câu trên đều sai.

Câu 2. Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy

A. Đôi một cắt nhau. **B.** Đồng quy.
C. Hoặc đồng quy hoặc đôi một song song. **D.** Đôi một song song.

Câu 3. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) sẽ:

A. Song song với hai đường thẳng đó.
B. Song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.
C. Trùng với một trong hai đường thẳng đó.
D. Cắt một trong hai đường thẳng đó.

Câu 4. Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Xét hai đường thẳng p, q mà mỗi đường thẳng đều cắt cả a và b, p cắt a tại M, q cắt a tại N (M không trùng với N). Khi đó hai đường thẳng p và q:

A. Cắt nhau. **B.** Trùng nhau.
C. Song song với nhau. **D.** Hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.

Câu 5. Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng đó:

A. Song song. **B.** Trùng nhau.

C. Chéo nhau. **D.** Hoặc song song hoặc trùng nhau.

Câu 6. Giả sử (P), (Q), (R) là ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt a, b, c. Trong đó: $a=(P)\cap(R)$, $b=(Q)\cap(R)$, $c=(P)\cap(Q)$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. a và b cắt nhau hoặc song song với nhau.

B. Ba giao tuyến a, b, c đồng quy hoặc đôi một cắt nhau.

C. Nếu a và b song song với nhau thì a và c không thể cắt nhau, cũng vậy, b và c không thể cắt nhau.

D. Ba giao tuyến a, b, c đồng quy hoặc đôi một song song.

Câu 7. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) là đường thẳng d:

A. Đi qua S . **B.** Đi qua điểm S và song song với AB.

C. Đi qua điểm S và song song với AD. **D.** Đi qua điểm S và song song với AC.

Câu 8. Giả sử có ba đường thẳng a, b, c trong đó $b//a$ và $c//a$. Hãy chọn câu đúng:

A. Nếu mặt phẳng (a,b) không trùng với mặt phẳng (a,c) thì b và c chéo nhau.

B. Nếu mặt phẳng (a,b) trùng với mặt phẳng (a,c) thì ba đường thẳng a, b, c song song với nhau từng đôi một.

C. Dù cho hai mặt phẳng (a,b) và (a,c) có trùng nhau hay không, ta vẫn có $b//c$.

D. Cả ba câu trên đều sai.

Câu 9. Cho hai đường thẳng a, b. Hai đường thẳng này sẽ nằm ở một trong các trường hợp:

(1) Hai đường thẳng phân biệt trong không gian.

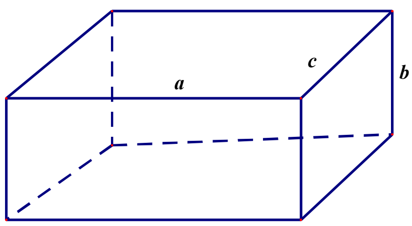
(2) Hai đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng.

(3) a là giao tuyến của (P) và (R), b là giao tuyến của (Q) và (R), trong đó (P), (Q), (R) là ba mặt phẳng khác nhau từng đôi một.

Tương ứng với mỗi trường hợp trên, số các khả năng có thể xảy ra giữa a và b lần lượt là:

A. 3, 2, 2. **B.** 3, 2, 3. **C.** 2, 3, 2. **D.** 3, 2, 1.

Câu 10. Xét hình bên dưới:



Các cạnh của hình hộp nằm trên các đường thẳng a, b, c như hình vẽ:

(1) Đường thẳng a và đường thẳng b cùng nằm trên một mặt phẳng.

(2) Có một mặt phẳng qua hai đường thẳng a và c.

(3) Có một mặt phẳng qua hai đường thẳng b và c.

Trong ba câu trên:

A. Chỉ có (1) và (2) đúng. **B.** Chỉ có (1) và (3) đúng.

C. Chỉ có (2) và (3) đúng. **D.** Cả ba câu trên đều đúng.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn là CD. Gọi M là trung điểm của SA, N là giao điểm của cạnh SB và mặt phẳng (MCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. MN và SD cắt nhau. **B.** MN và CD chéo nhau.
C. MN và SC cắt nhau. **D.** MN và CD song song với nhau.

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,AD,CD,BC. Mệnh đề nào sau đây sai?
A. MP,NQ chéo nhau. **B.** $MN // PQ$ và $MN = PQ$.
C. $MNPQ$ là hình bình hành. **D.** $MN // BD$ và $MN = \frac{1}{2}BD$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA,SB,SC,SD. Đường thẳng nào sau đây không song song với đường thẳng MN?
A. AB. **B.** CD. **C.** PQ. **D.** SC.

Câu 14. Cho hình chóp $A.BCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N,P,Q,R,S lần lượt là trung điểm của các cạnh AC,BD,AB,CD,AD,BC. Các điểm nào sau đây không đồng phẳng?
A. M,P,R,Q. **B.** M,R,S,N. **C.** P,Q,R,S. **D.** M,P,Q,N.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang với đáy AD và BC $(AD = a > BC = b)$. Gọi I,J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB,SC lần lượt tại M,N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA,SD lần lượt tại P,Q. Gọi E là giao điểm của AM và PB, F là giao điểm của CQ và DN. Trong các mệnh đề dưới đây, có bao nhiêu mệnh đề sai?
1) MN và PQ song song với nhau.
2) MN và EF song song với nhau.
3) $EF = \frac{2}{5}(a+b)$.
4) $EF = \frac{1}{4}(a+b)$
A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AC,BC. K là điểm trên đoạn BD sao cho $KB = 2KD$, F là giao điểm của AD và (IJK). Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (IJK) song song với đường thẳng?
A. AJ. **B.** BI. **C.** IJ. **D.** CI.

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của BC,BD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (AIJ) và (ACD) là:
A. Đường thẳng d đi qua A và $d // BC$. **B.** Đường thẳng d đi qua A và $d // BD$.
C. Đường thẳng d đi qua A và $d // CD$. **D.** Đường thẳng AB.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$, M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M song song với SA,SB,SC cắt các mặt phẳng $(SBC),(SAC),(SAB)$ lần lượt tại A',B',C'.
a) $\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}$ có giá trị không đổi bằng bao nhiêu khi M di động trong tam giác ABC?
A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{2}{3}$.

b) $\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}$ nhận giá trị lớn nhất. Khi đó vị trí của M trong tam giác ABC là:

A. Trực tâm ΔABC. **B.** Trọng tâm ΔABC.
C. Tâm ngoại tiếp ΔABC. **D.** Tâm nội tiếp ΔABC.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Mặt phẳng (α) di động đi qua AB và cắt SC,SD lần lượt tại M,N.

a) Tứ giác $ABMN$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình thang.
C. Hình thoi. **D.** Tứ giác lồi có các cặp cạnh đối cắt nhau.

b) Giao điểm của hai đường thẳng AM và BN luôn chạy trên đường thẳng cố định:

A. SO. **B.** Đường thẳng đi qua S.
C. Đường thẳng đi qua S, song song với AB. **D.** Đường thẳng đi qua S, song song với AD.

c) Giao điểm của hai đường thẳng AN và BM luôn chạy trên đường thẳng cố định:

A. SO. **B.** Đường thẳng đi qua S.
C. Đường thẳng đi qua S, song song với AB. **D.** Đường thẳng đi qua S, song song với AD.

d) Tính $\frac{AB}{MN}-\frac{BC}{SK}$?

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD và M là điểm nằm bên trong tam giác BCD. Đường thẳng qua M và song song với GA lần lượt cắt các mặt phẳng $(ABC),(ACD),(ADB)$ tại P,Q,R.

a) Khi M di động trong tam giác BCD, đại lượng $\frac{MP+MQ+MR}{GA}$ không đổi và bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

b) Xác định vị trí của M để $MP.MQ.MR$ đạt giá trị lớn nhất?

A. M là trực tâm tam giác BCD. **B.** M là tâm ngoại tiếp tam giác BCD.
C. M là trọng tâm tam giác BCD. **D.** M là tâm ngoại tiếp tam giác BCD.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và $\widehat{SAD}=90°$. Gọi Dx là đường thẳng qua D và song song với SC.

a) Giao điểm I của đường thẳng Dx với mặt phẳng (SAB) chạy trên đường thẳng:

A. Qua S và song song với AB. **B.** Qua S và song song với AD
C. SO. **D.** SD.

b) Diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (AIC) là:

A. $\frac{a^2\sqrt{7}}{8}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{7}}{2}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{7}}{16}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Mặt bên (SAB) là tam giác đều, $SC=SD=a\sqrt{3}$. Gọi H,K lần lượt là trung điểm của SA,SB. M là điểm trên cạnh AD. Mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N.

a) $HKNM$ là hình gì?