

CỰC TRỊ - 80
CÂU NHẬN BIẾT

BÀI. CỰC TRỊ

PHIẾU BÀI TẬP SỐ 1. MỨC ĐỘ NHẬN BIẾT

PHƯƠNG PHÁP VÀ BÀI TẬP MẪU:

TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bài toán 1: TÌM CỰC TRỊ HÀM SỐ TRÊN TẬP XÁC ĐỊNH.

Phương pháp giải

Tìm tập xác định D của hàm số f .

Tính $f'(x)$.

Tìm nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ (nếu có) và tìm các điểm $x_0 \in D$ mà tại đó hàm f liên tục nhưng $f'(x_0)$ không tồn tại.

Vận dụng định lý 2 (lập bảng xét dấu $f'(x)$) hay định lý 3 (tính $f''(x)$) để xác định điểm cực trị của hàm số.

Chú ý: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D .

Điểm $x = x_0 \in D$ là điểm cực trị của hàm số khi và chỉ khi hai điều kiện sau đây cùng thỏa mãn:

- Tại $x = x_0$ đạo hàm triệt tiêu hoặc không tồn tại
- Đạo hàm đổi dấu khi x đi qua x_0 .

Các ví dụ

Ví dụ 1: Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $y = \frac{1-x^2}{x}$

2. $y = \frac{-x^2 + x + 1}{2x - 4}$

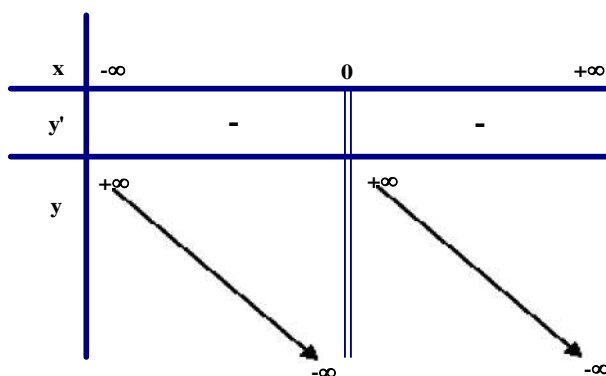
Lời giải.

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ta có: $y' = -1 - \frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in D$, suy ra hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định và không có điểm cực trị.

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$.

Bảng biến thiên

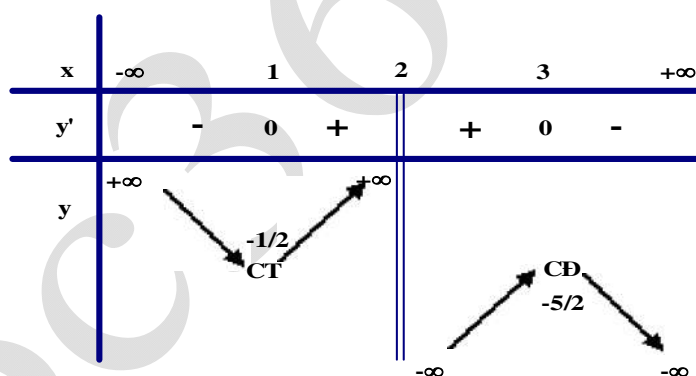


2. Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Ta có: $y' = \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(x-2)^2}$, $\forall x \in D: y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = -\frac{1}{2} \\ x = 3, y = -\frac{5}{2} \end{cases}$

Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$.

Bảng biến thiên



Hàm số đạt cực đại tại $x = 3, y_{CD} = -\frac{5}{2}$, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1, y_{CT} = -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 2 : Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $y = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x + 1$

2. $y = (x - 2)^3 - 3x + 4$.

Lời giải.

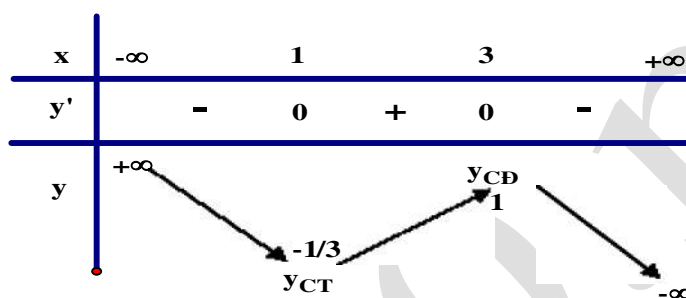
1. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -x^2 + 4x - 3, \forall x \in D: y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y(1) = -\frac{1}{3} \\ x = 3, y(3) = 1 \end{cases}$.

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty;$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty$

Bảng biến thiên



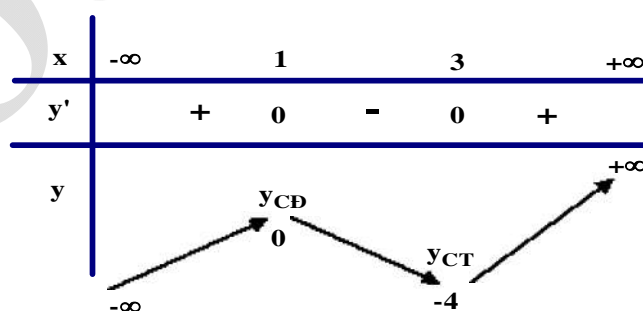
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = -\frac{1}{3}$, hàm số đạt cực đại tại $x = 3$ và $y_{CD} = 1$.

2. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3(x-2)^3 - 3, \forall x \in D: y' = 0 \Leftrightarrow 3(x-2)^2 = 3 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y(1) = 0 \\ x = 3, y(3) = -4 \end{cases}$

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$

Bảng biến thiên



Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ và $y_{CT} = -4$, hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{CD} = 0$.

Ví dụ 3: Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $y = -\frac{1}{4}x^4 - x^2 + \frac{5}{4}$

2. $y = 2x^3 + 3x + 1.$

Lời giải.

1. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -x^3 - 2x = -x(x^2 + 2), \forall x \in D: y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, y(0) = \frac{5}{4}$

Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{4x^4} \right) = -\infty;$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{4x^4} \right) = -\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	<div style="text-align: center;"> CĐ $\frac{5}{4}$ </div>	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0, y_{\text{CĐ}} = \frac{5}{4}$.

2. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 6x^2 + 3 > 0 \forall x \in D$, suy ra hàm số đồng biến trên \mathbb{R}

Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(2 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty;$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(2 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$+\infty$
y'	$+$	$+$
y	$-\infty$	$+\infty$

Ví dụ 4: Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

2. $y = x^4 - 2x^2 - 3$

Lời giải.

1. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1)$, $\forall x \in D: y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y(0) = 3 \\ x = \pm 1, y(\pm 1) = 4 \end{cases}$

Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	\nearrow CĐ 4	\searrow 3 CT	\nearrow CĐ 4	\searrow $-\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, y_{CT} = 3$.

Hàm số đạt cực đại tại hai điểm $x = \pm 1, y_{CĐ} = 4$

2. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$, $\forall x \in D: y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y(0) = -3 \\ x = \pm 1, y(\pm 1) = -4 \end{cases}$

Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right) = +\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	\searrow -4 CT	\nearrow CĐ -3	\searrow -4 CT	\nearrow $+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$, $y_{CD} = -3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại hai điểm $x = \pm 1$, $y_{CT} = -4$

Ví dụ 5: Tìm cực trị của các hàm số sau:

1. $y = x^3 - \frac{3x^2}{2} - 6x + 3$

2. $y = -x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6$

Lời giải.

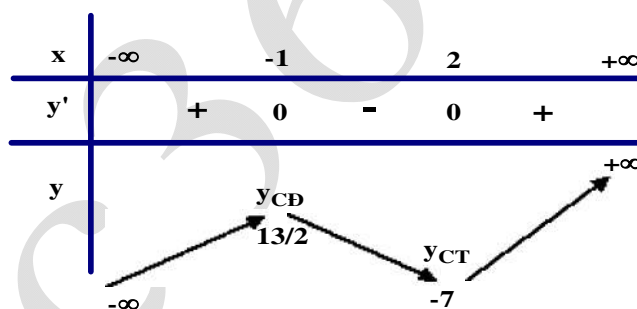
Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 3x - 6$, $\forall x \in D: y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, y(-1) = \frac{13}{2} \\ x = 2, y(2) = -7 \end{cases}$

Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{2x} - \frac{6}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{2x} - \frac{6}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) = +\infty$

Bảng biến thiên



Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2, y_{CT} = -7$, hàm số đạt cực đại tại $x = -1, y_{CD} = \frac{13}{2}$.

2. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -3x^2 + 9x$, $\forall x \in D: y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y(0) = -6 \\ x = 3, y(3) = \frac{15}{2} \end{cases}$

Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{9}{2x} - \frac{6}{x^3} \right) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-1 + \frac{9}{2x} - \frac{6}{x^3} \right) = -\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
y'	-	0	+	0
y	$+\infty$	↘ -6 y_{CT}	↗ $15/2$ y_{CD}	↘ $-\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0, y_{CT} = -6$, hàm số đạt cực đại tại $x=3, y_{CD} = \frac{15}{2}$.

Bài toán 2: TÌM CỰC TRỊ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC.

Các ví dụ

Ví dụ 1 Tìm cực trị (nếu có) của hàm số : $y = 2 \sin 2x - 3$

Lời giải.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 4 \cos 2x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$$

$$y'' = -8 \sin 2x$$

$$y''\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) = -8 \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} -8 & \text{khi } k = 2n \\ 8 & \text{khi } k = 2n + 1 \end{cases}$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \frac{\pi}{4} + n\pi; y\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = -1$ và đạt cực đại tại

$$x = \frac{\pi}{4} + (2n + 1)\frac{\pi}{2}; y\left(\frac{\pi}{4} + (2n + 1)\frac{\pi}{2}\right) = -5$$

Ví dụ 2 Tìm cực trị (nếu có) của hàm số : $y = 3 - 2 \cos x - \cos 2x$

Lời giải.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 2 \sin x(2 \cos x + 1)$ và $y'' = 2 \cos x + 4 \cos 2x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$y''(k\pi) = 2 \cos(k\pi) + 2 \cos 2(k\pi)$$

$$y''(k\pi) = 6 > 0 \text{ nếu } k \text{ chẵn, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm } x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \text{ và } y(2n\pi) = 0$$

$$y''(k\pi) = 2 > 0 \text{ nếu } k \text{ lẻ, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm } x = (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z} \text{ và } y(2n+1)\pi = 4.$$

$$y''\left(\pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi\right) < 0 \text{ suy ra hàm số đạt cực đại tại điểm } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \text{ và } y\left(\pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi\right) = \frac{9}{2}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

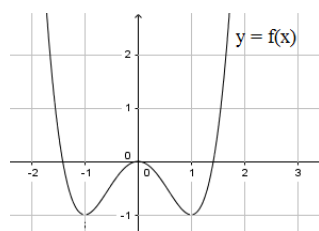
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định liên tục và liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như sau:

X	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	+	0	-	+
$y = f(x)$	$-\infty$	0	-4	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

- A. Hàm số có hai cực trị.
- B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng không.
- C. Hàm số có giá trị cực đại bằng -4.
- D. Hàm số có giá trị cực đại tại $x = 0$.

Câu 2: Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị là:

- A. B. 1 C. 2 D. 3

Câu 3: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$. Số hàm số điểm cực trị của là:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 4: Trong các mệnh đề sau hãy tìm mệnh đề sai. Chọn 1 câu sai

- A. Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ có cực đại và cực tiểu.
B. Hàm số $y = x^3 + 3x + 2$ có cực trị
C. Hàm số $y = -2x + 1 + \frac{1}{x+2}$ không có cực trị
D. Hàm số $y = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ có hai cực trị

Câu 5: Hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ có mấy điểm cực trị ?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 6. Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có một điểm cực trị B. Hàm số không có cực trị
C. Hàm số có ba điểm cực trị D. Hàm số đồng biến trên \mathbb{R}

Câu 7. Số điểm cực trị của hàm số $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 3$ là:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 8: Số điểm cực trị của hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 3$ là

- A. 1 B. 3 C. 2 D. 0

Câu 9. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 18x^2 - 1$ là

- A. (0; -1) B. (0; 1) C. (-1; 0) D. (-3; 80) và (3; 80)

Câu 10. Khoảng cách giữa 2 điểm cực trị của hàm số $y = 4x^3 - 3x - 1$ là

- A. 1 B. 0 C. $\frac{\sqrt{26}}{2}$ D. 2

Câu 11. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Có đúng hai điểm cực trị B. Không có điểm cực trị
C. Có chỉ một điểm cực trị D. Có hai cực trị cùng dấu.

Câu 12. Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ đạt cực đại tại điểm:

- A. $x = -2$ B. $x = 2$ C. $x = 0$ D. $x = 1$

Câu 13. Hàm số nào sau đây có 3 điểm cực trị :

- A. $y = x^4 - 2x^2 - 1$ B. $y = x^4 + 2x^2 - 1$ C. $y = 2x^4 + 4x^2 + 1$ D. $y = -x^4 - 2x^2 - 1$

Câu 14: Đồ thị hàm số $y = \frac{x^4}{2} - x^2 + 3$ có điểm cực tiểu là: