KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

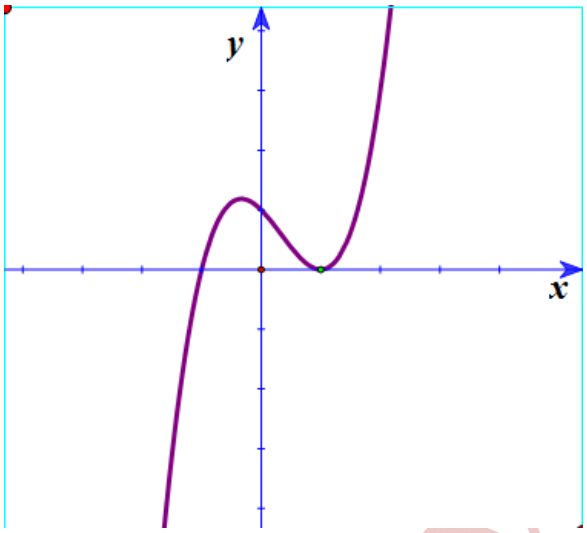
Các bước khảo sát và vẽ đồ thị hàm số:

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Tìm cực trị: Tính y', giải phương trình y' = 0
3. Tìm tiệm cận (nếu có).
4. Lập bảng biến thiên.
5. Vẽ đồ thị (tìm thêm các điểm thích hợp và chú ý giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ)

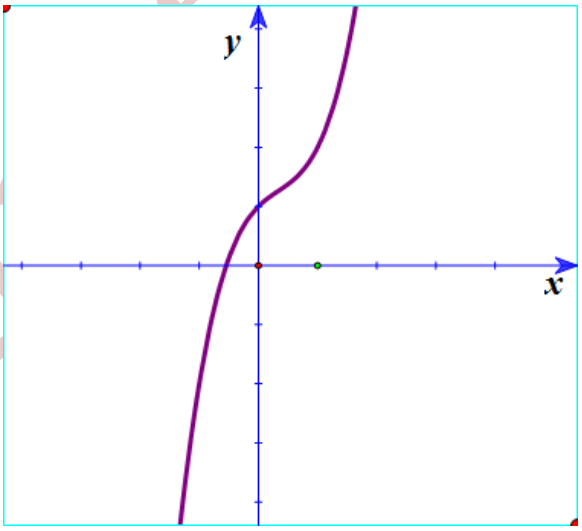
B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

I. Đồ thị hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \ (a \neq 0)$ (C)

1. Khi a > 0:

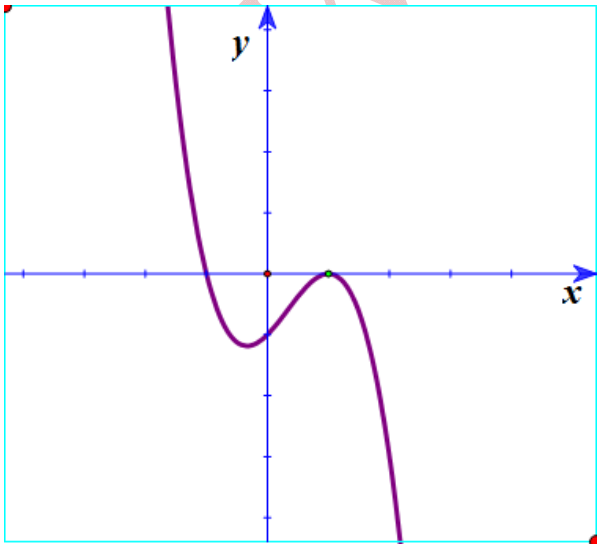


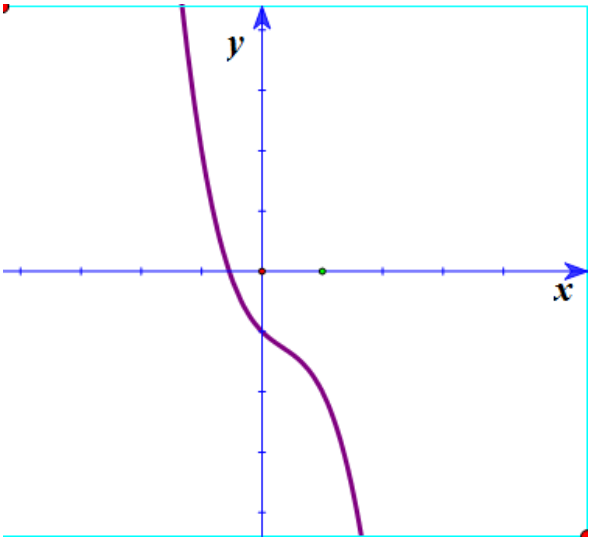
(C) có 2 điểm cực trị ($b^2 - 3ac > 0$)



(C) không có điểm cực trị ($b^2 - 3ac \leq 0$)

2. Khi a < 0:

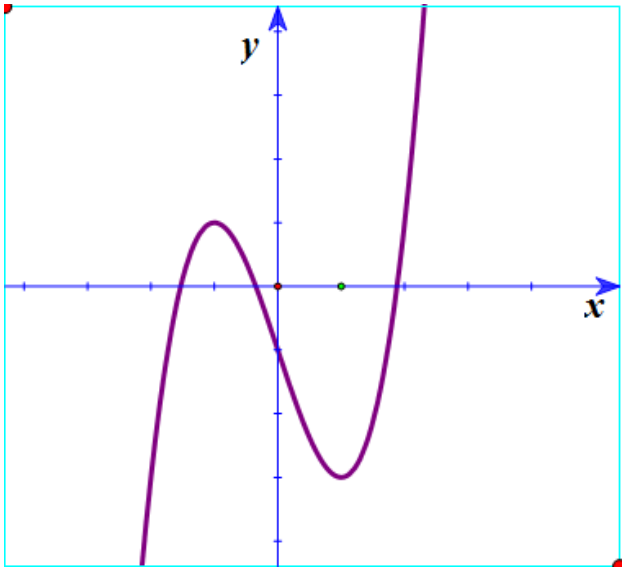




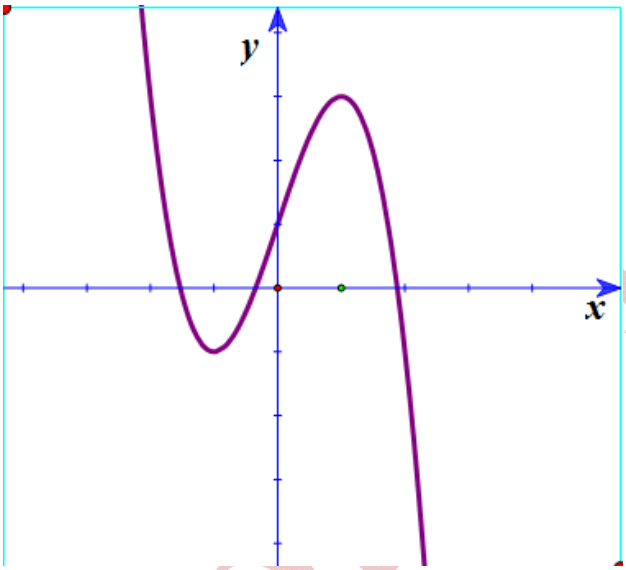
(C) có 2 điểm cực trị ($b^2-3ac>0$)

(C) không có điểm cực trị ($b^2-3ac\le 0$)

Đặc biệt: (C) có 2 điểm cực trị nằm 2 phía so với trục Oy khi $ac<0$



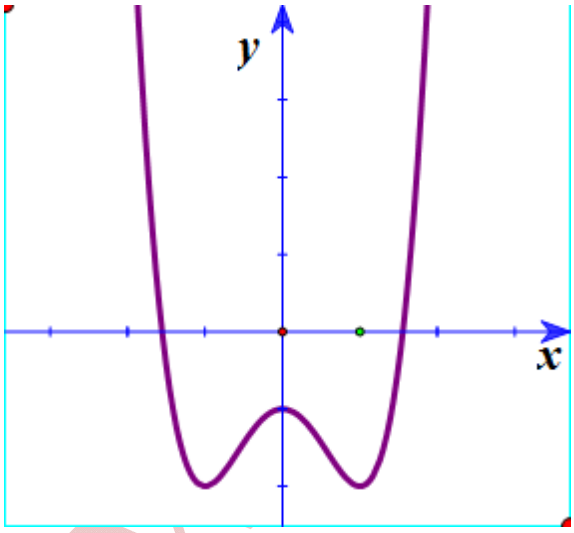
Khi a > 0



Khi a < 0

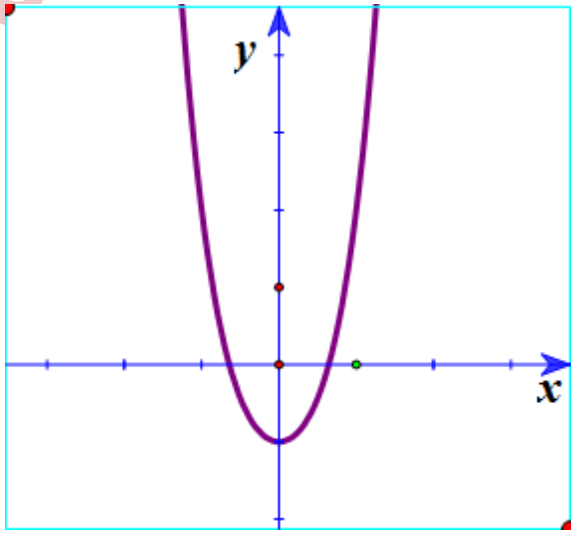
II. Đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương: $y=ax^4+bx^2+c\ \ (a\neq 0)$ (C)

1. Khi a > 0:



(C) có 3 điểm cực trị ($b<0$)

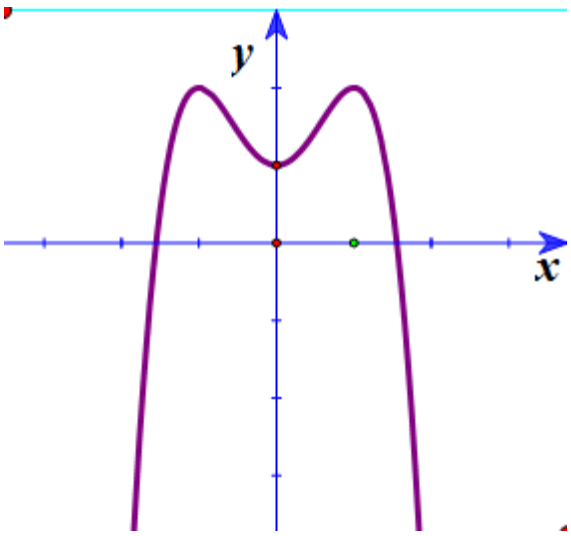
(1 CĐ, 2 CT)



(C) có điểm cực trị ($b\ge 0$)

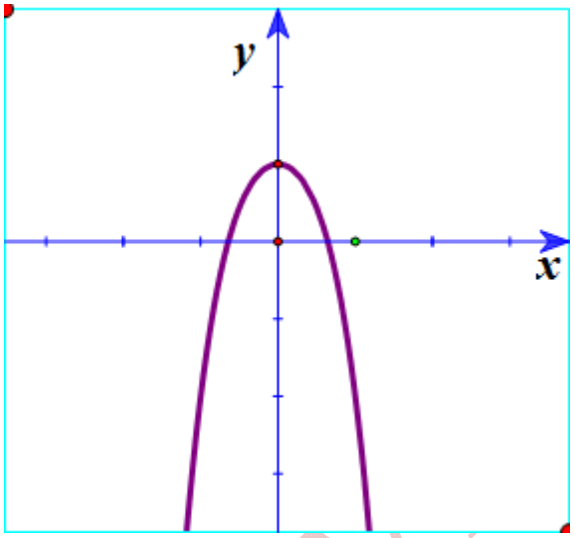
(1 CT)

2. Khi a < 0:



(C) có 3 điểm cực trị ($b<0$)

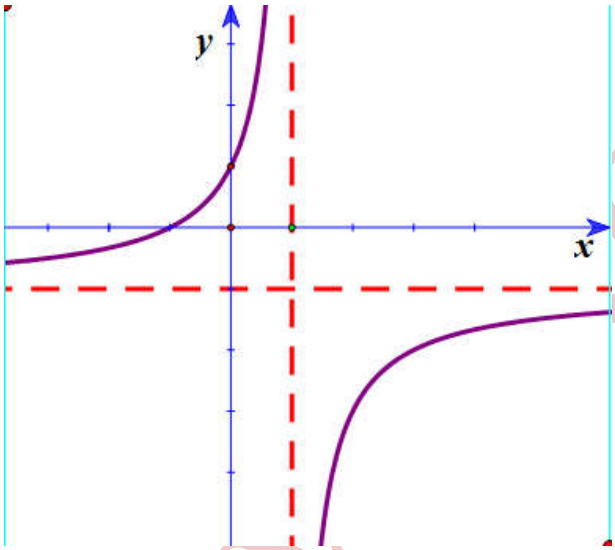
(2 CĐ, 1 CT)



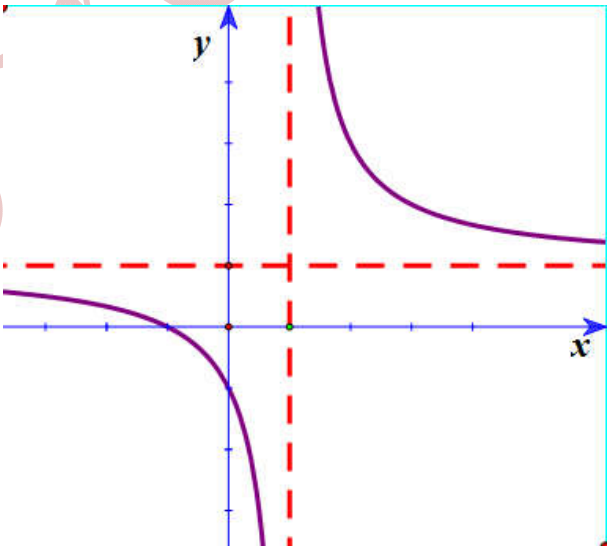
(C) có điểm cực trị ($b\geq 0$)

(1 CĐ)

III. Đồ thị hàm số nhất biến: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (ad-bc\neq 0)$ (C)



Khi $ad-bc>0$



Khi $ad-bc<0$

IV. Biến đổi đồ thị:

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C). Khi đó, với số a > 0 ta có:

1. Hàm số $y=f(x)+a$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Oy lên trên a đơn vị.

2. Hàm số $y=f(x)-a$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Oy xuống dưới a đơn vị.

3. Hàm số $y=f(x+a)$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Ox qua trái a đơn vị.

4. Hàm số $y=f(x-a)$ có đồ thị (C') là tịnh tiến (C) theo phương của Ox qua phải a đơn vị.

5. Hàm số $y=-f(x)$ có đồ thị (C') là đối xứng của (C) qua trục Ox.

6. Hàm số $y=f(-x)$ có đồ thị (C') là đối xứng của (C) qua trục Oy.

7. Hàm số $y=f(|x|)=\begin{cases} f(x) & khi\ x>0 \\ f(-x) & khi\ x\le 0 \end{cases}$ có đồ thị (C') bằng cách:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy và bỏ phần (C) nằm bên trái Oy.

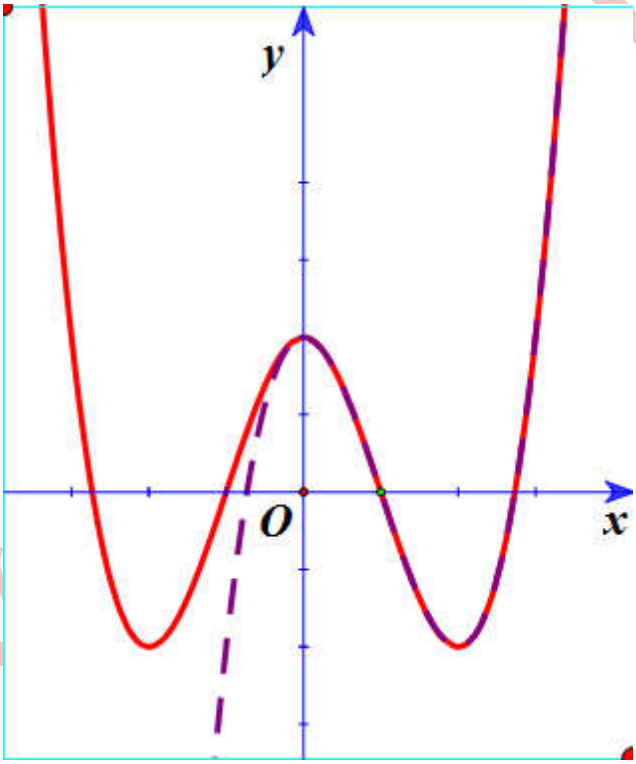
+ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy qua Oy.

Ví dụ: Vẽ đồ thị hàm số (C'): $y=|x|^3-3x^2+2$ từ đồ thị (C): $y=x^3-3x^2+2$.

Giả sử (C) là đường đứt khúc trong hình vẽ.

Bước 1: Giữ nguyên đường đứt khúc phía bên phải trục Oy bằng cách tô đậm phần đường đứt khúc bên phải Oy, và bỏ phần đường đứt khúc bên trái Oy.

Bước 2: lấy đối xứng qua Oy phần đường mới tô đậm, ta được đồ thị (C').



8. Hàm số $y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & khi\ f(x)>0 \\ -f(x) & khi\ f(x)\le 0 \end{cases}$ có đồ thị (C') bằng cách:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên Ox.

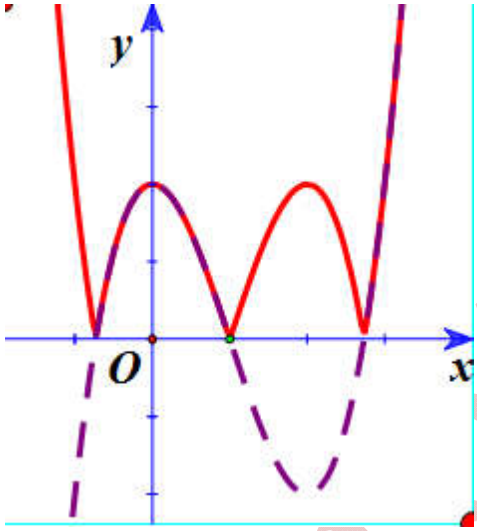
+ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm dưới Ox qua Ox và bỏ phần đồ thị (C) nằm dưới Ox.

Ví dụ: Vẽ đồ thị hàm số (C'): $y=|x^3-3x^2+2|$ từ đồ thị (C): $y=x^3-3x^2+2$.

Giả sử (C) là đường đứt khúc trong hình vẽ.

Bước 1: Giữ nguyên đường đứt khúc phía trên trục Ox bằng cách tô đậm phần đường đứt khúc phía trên Ox.

Bước 2: lấy đối xứng qua Ox phần đường đứt khúc nằm dưới Ox qua Ox rồi xóa phần đường đứt khúc nằm dưới Ox, ta được đồ thị (C').



KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

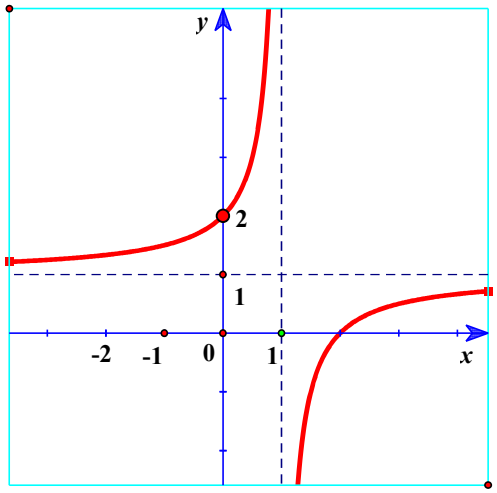
C. BÀI TẬP

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU (tối thiểu 30 câu)

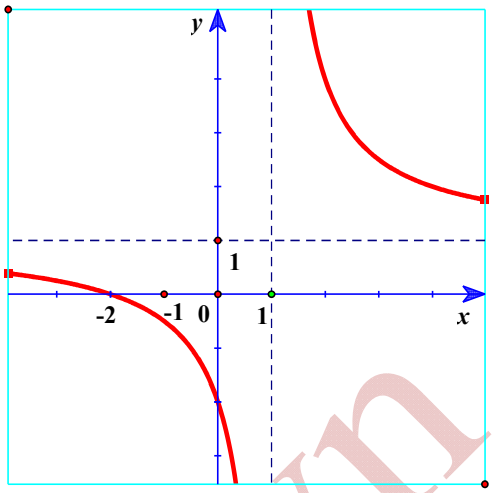
Câu 1. Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ có đồ thị là hình vẽ nào sau đây? Hãy chọn câu trả lời đúng.

www.carot.vn

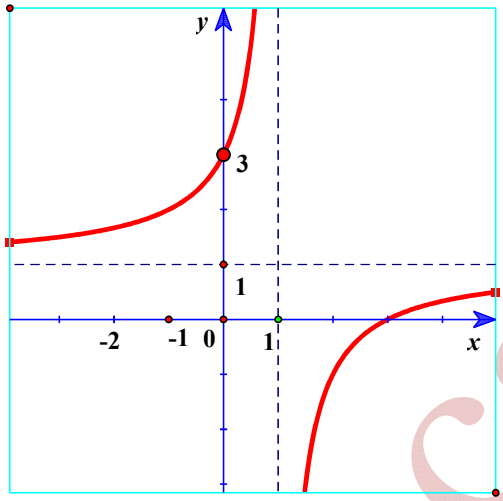
A.



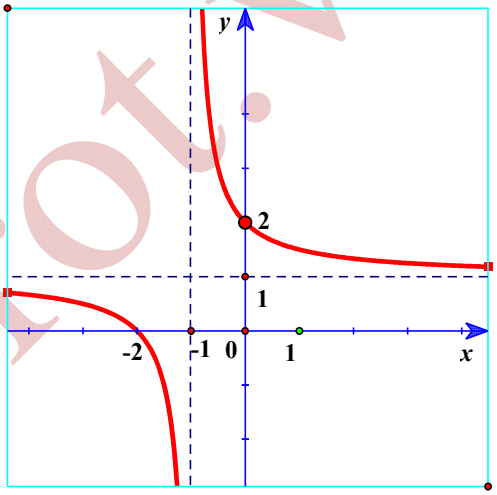
B.



C.



D.



Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ có tiệm cận đứng $x=1$, Tiệm cận ngang $y=1$ nên loại **trường hợp D.**

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ đi qua điểm $(0;2)$ nên chọn **đáp án A.**

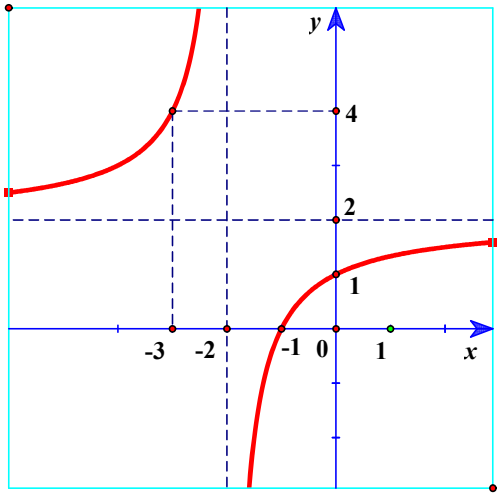
[Phương pháp trắc nghiệm]

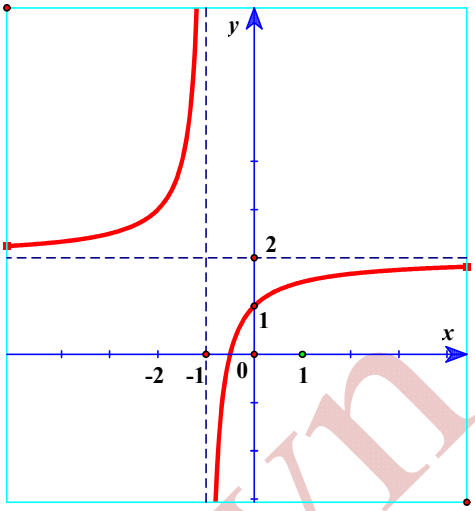
$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)\Big|_{x=10}=\dfrac{1}{81}>0$ suy ra hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ đồng biến trên tập xác định**, loại đáp án B, D.**

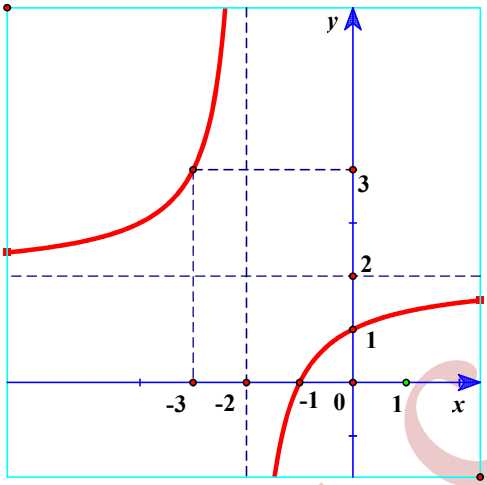
Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ đi qua điểm $(0;2)$ nên chọn **đáp án A.**

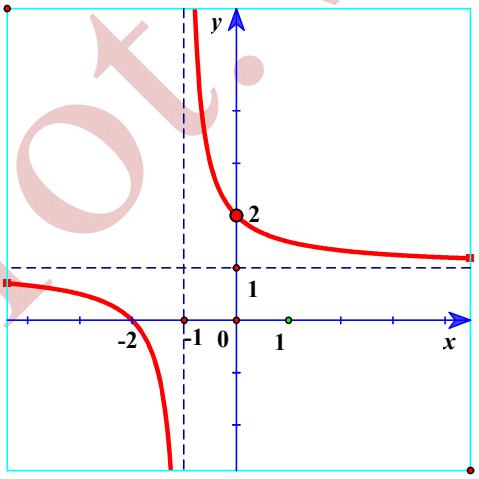
Câu 2. Hàm số $y=\dfrac{2+2x}{2+x}$ có đồ thị là hình vẽ nào sau đây? Hãy chọn câu trả lời đúng.

www.carot.vn

A. 

B. 

C. 

D. 

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Hàm số $y=\dfrac{2+2x}{2+x}$ có tiệm cận đứng $x=-2$, Tiệm cận ngang $y=2$ nên loại **đáp án B, D.**

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2+2x}{2+x}$ đi qua điểm $(-3;4)$ nên chọn **đáp án A.**

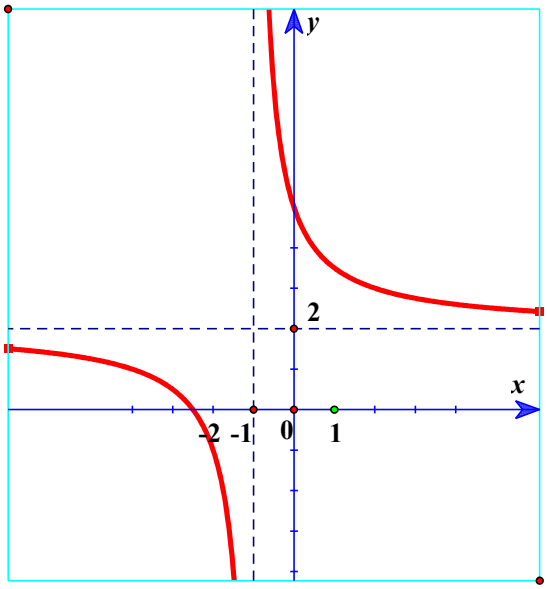
[Phương pháp trắc nghiệm]

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2+2x}{2+x}\right)\Big|_{x=1}\approx 0,2>0$ suy ra hàm số $y=\dfrac{2+2x}{2+x}$ đồng biến trên tập xác định**, loại đáp án D.**

Sử dụng chức năng CALC của máy tính: $CALC\rightarrow -3=4$ nên chọn **đáp án A.**

Câu 3. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

www.carot.vn



A. $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$; B. $y=x^3+3x^2+1$; C. $y=x^4-x^2+1$; D. $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Nhìn vào đồ thị ta thấy ngay đây là hàm có dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ nên loại đáp án **B, C.**

Hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ **có** $ad-bc=2.1-1.1=1>0$ nên loại đáp án **D.**

Hàm số $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$ **có** $ad-bc=2.1-1.5=-3<0$ nên chọn đáp án **A.**

[Phương pháp trắc nghiệm]

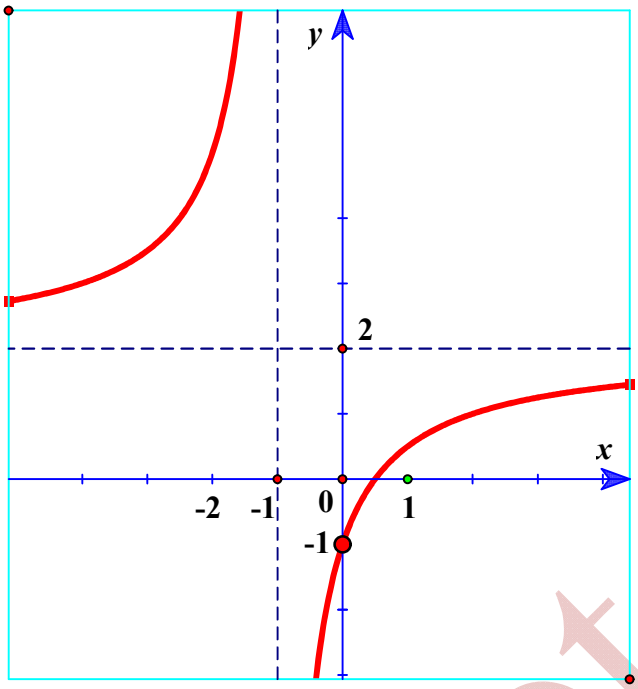
Nhìn vào đồ thị ta thấy ngay đây là hàm có dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ nên loại đáp án **B, C.**

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)\Big|_{x=1}=0,25>0$ suy ra hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ đồng biến trên tập xác định**, loại đáp án D.**

Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 4. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

www.carot.vn



A. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$; B. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$; C. $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$; D. $y=\dfrac{1-2x}{x-1}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Nhìn vào đồ thị ta thấy ngay tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=2$. Loại đáp án **B, D.**

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;-1)$.

$y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ khi $x=0\Rightarrow y=1$. Loại đáp án **B.**

$y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ khi $x=0\Rightarrow y=-1$. Chọn đáp án **A.**

[Phương pháp trắc nghiệm]

Câu 5. Bảng biến thiên trong hình dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	-1

www.carot.vn

A. $y=\dfrac{-x+3}{x-1}$; B. $y=\dfrac{-x-2}{x-1}$; C. $y=\dfrac{x+3}{x-1}$; D. $y=\dfrac{-x-3}{x-1}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy ngay tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-1$.

suy ra loại đáp án **C.**

Nhìn vào bảng biến thiên , hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

$y=\dfrac{-x-2}{x-1}$ có $ad-bc=-1.(-1)-1.(-2)=3>0$. Loại đáp án **B.**

$y=\dfrac{-x-3}{x-1}$ có $ad-bc=-1.(-1)-1.(-3)=4>0$. Loại đáp án **D.**

$y=\dfrac{-x+3}{x-1}$ có $ad-bc=-1.(-1)-1.3=-2<0$. Chọn đáp án **A.**

[Phương pháp trắc nghiệm]

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy ngay tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-1$.

suy ra loại đáp án **C.**

Nhìn vào bảng biến thiên , hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

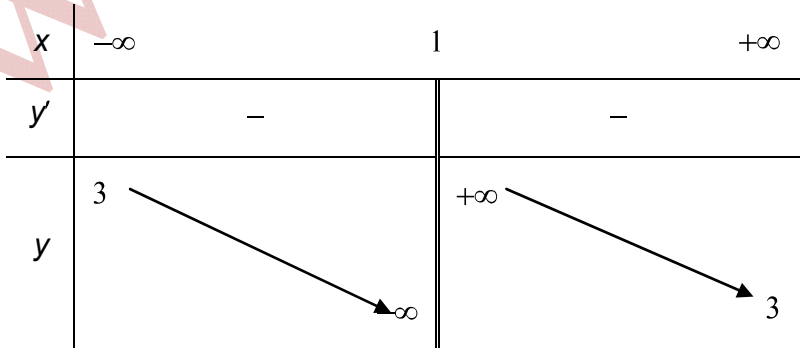
$\left.\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-x-2}{x-1}\right)\right|_{x=0}=3>0$ suy ra loại đáp án **B.**

$\left.\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-x-3}{x-1}\right)\right|_{x=0}=4>0$ suy ra loại đáp án **C.**

$\left.\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-x+3}{x-1}\right)\right|_{x=0}=-2<0$ suy ra chọn đáp án **A.**

Câu 6. Hàm số $y=\dfrac{3x+2}{x-1}$ có bảng biến thiên nào dưới đây. Chọn đáp án đúng?

A.



www.carot.vn