Các dạng toán liên quan đến hàm số lượng giác

DẠNG. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số lượng giác.

*Các kiến thức về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên miền $D\subset R$.

1. Số thực M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu $\begin{cases} f(x)\le M,\forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=M \end{cases}$
2. Số thực N được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu $\begin{cases} f(x)> m,\forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=m \end{cases}$

Một số kiến thức ta sử dụng trong các bài toán này:

1. Tính bị chặn của hàm số lượng giác .
2. Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc nhất giữa $\sin$ và $\cos$.
3. Bảng biến thiên của hàm số lượng giác.
4. Kỹ thuật sử dụng máy tính cầm tay.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=2017\cos(8x+\frac{10\pi}{2017})+2016.$

A. $\min y=1; \max y=4033.$ **B.** $\min y=-1; \max y=4033.$
C. $\min y=1; \max y=4022.$ **D.** $\min y=-1; \max y=4022.$

Phân tích

Ta có các bước để giải quyết bài toán như sau:

Bước 1: Chỉ ra $f(x)\le M,\forall x\in D.$

Bước 2 : Chỉ ra $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=M$.

Kết luận : $\max\limits_{D} f(x)=M$

Tương tự với tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Hàm số xác định trên R .

Ta có $-1\le \cos\left(8x+\frac{10\pi}{2017}\right)\le 1,\forall R.$

$\Leftrightarrow -2017\le 2017\cos\left(8x+\frac{10\pi}{2017}\right)+2016\le 4033,\forall \in R$.

$\Leftrightarrow -1\le 2017\cos\left(8x+\frac{10\pi}{2017}\right)+2016\le 4033,\forall \in R$

Ta có $y=-1$ khi $\cos\left(8x+\frac{10\pi}{2017}\right)=-1$; $y=4033$ khi $\cos\left(8x+\frac{10\pi}{2017}\right)=1$.

Vậy $\min y=-1; \max y=4033$.

Cách 2: sử dụng máy tính cầm tay.

Trong bốn phương án chỉ có hai giá trị max là $4022; 4033$.

Chỉ có hai giá trị min là 1;-1.

Lúc này ta sử dụng chức năng SHIFT CALC để thử giá trị:

Ví dụ ta nhập vào màn hình $2017\cos\left(8x+\frac{10\pi}{2017}\right)+2016=4033$ ta thấy phương trình có nghiệm.

Tương tự nhập $2017\cos\left(8x+\frac{10\pi}{2017}\right)+2016=-1$ ta thấy phương trình có nghiệm.

Từ đây ta chọn **B**.

STUDY TIP

Trong bài toán ta chọn thử hai giá trị trên vì 4033 là giá trị lớn hơn và -1 là giá trị nhỏ hơn nên ta thử trước. Nếu phương trình không có nghiệm thì sẽ là trường hợp còn lại.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+1$

A. $\min y=0; \max y=4$

B. $\min y=1-\sqrt{3}; \max y=3+\sqrt{3}$.

C. $\min y=-4; \max y=0$.

D. $\min y=-1+\sqrt{3}; \max y=3+\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Để sử dụng tính bị chặn của hàm số ở trong STUDY TIP ta đưa ra ở trên, ta sẽ đưa $y=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+1$ về theo $\sin u(x)$ hoặc $\cos u(x)$.

Ta có $y=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+1$ $=2\cos^2 x-1-\sqrt{3}\sin 2x+2$ $=\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x+2(*)$

$=2\left(\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)+2$ $=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2$

Mặt khác $-1\le 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2\le 4, \forall x\in R$ $\Leftrightarrow 0\le y\le 4, \forall x\in R$.

Ta có bài toán tổng quát:

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=a\sin u+b\cos u$ trên R . Với $a,b\in R; a^2+b^2>0$.

Lời giải tổng quát

$y=a\sin u+b\cos u$ $\Rightarrow y=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin u+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos u\right)\sqrt{a^2+b^2}$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=1$ $\Rightarrow \exists\ \alpha\in R$ sao cho $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Rightarrow y=\sqrt{a^2+b^2}(\sin u.\cos\alpha+\cos u.\sin\alpha)$ $\Rightarrow y=\sqrt{a^2+b^2}.\sin(u+\alpha)$

Vì $-1\le\sin(u+\alpha)\le 1$ $\Rightarrow -\sqrt{a^2+b^2}\le y\le\sqrt{a^2+b^2}$

Ngoài ra ta có thể mở rộng bài toán như sau:

$y=a\sin[f(x)]+b\cos[f(x)]+c$. Ta có $-\sqrt{a^2+b^2}+c\le y\le\sqrt{a^2+b^2}+c$

Từ bài toán tổng quát trên ta có thể giải quyết nhanh bài toán ví dụ 2 từ dòng (*) như sau: Ta có $-\sqrt{1+3}+2\le y\le\sqrt{1+3}+2$ $\Leftrightarrow 0\le y\le 4$.

STUDY TIP

Ngoài cách nhớ công thức ở bài toán tổng quát phía bên phải ta có thể nhớ theo điều kiện có nghiệm của phương trình bậc nhất theo sin và cos như sau:
Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = a\sin\left[f(x)\right] + b\cos\left[f(x)\right] + c$

$a\sin\left[f(x)\right] + b\cos\left[f(x)\right] + c - y = 0$ điều kiện có nghiệm $a^2 + b^2 \ge (c-y)^2$. Từ đây ta tìm được $\min, \max$ của y.

Ví dụ 3. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 3}{2 + \cos x}$

A. $\min y = -\dfrac{2}{3}; \max y = 2$.

B. $\min y = \dfrac{2}{3}; \max y = 2$

B. $\min y = \dfrac{1}{2}; \max y = \dfrac{3}{2}$

D. $\min y = -\dfrac{1}{2}; \max y = \dfrac{3}{2}$

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Ta có $\cos x + 2 > 0, \forall x \in R$.

$y = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 3}{2 + \cos x} \Leftrightarrow \sin x + 2\cos x + 3 = 2y + y\cos x \Leftrightarrow \sin x + (2-y)\cos x + 3 - 2y = 0$

Ta sử dụng điều kiện ở STUDY TIP trong bài tổng quát trên.

Ta có $1^2 + (2-y)^2 \ge (3-2y)^2 \Leftrightarrow 4y^2 - 12y + 9 - y^2 + 4y - 4 - 1 \le 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 8y + 4 \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3} \le y \le 2$

Cách 2 : sử dụng máy tính cầm tay

Tương tự như ở ví dụ 1 thì ta có thể sử dụng SHIFT SOLVE: $\dfrac{\sin x + 2\cos x + 3}{2 + \cos x} = 2$ thì phương trình có nghiệm. Do 2 là số lớn nhất trong các phương án A;B;C;D nên ta không cần thử trường hợp $\max = \dfrac{3}{2}$.

Lúc này chỉ còn A và B. Thử với $\min y = -\dfrac{2}{3}$ thì không có nghiệm.

Từ đây chọn B.

STUDY TIP

Nếu hàm số có dạng $y = \dfrac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a_2\sin x + b_2\cos x + c_2}$ ta tìm miền xác định của hàm số rồi quy đồng mẫu số, đưa về dạng phương trình trong STUDY TIP ở phía trên và tiếp tục lời giải.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x}$.

A. $\min y = -1; \max y = 1$.

B. $\min y = 0; \max y = 1$

C. $\min y = -1; \max y = 0$.

D. $\min y = -1; \max y$ không tồn tại.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1 : Ta có $\begin{cases} 0 \le \sqrt[4]{\sin x} \le 1 \\ 0 \le \sqrt{\cos x} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \sqrt[4]{\sin x} \le 1 \\ -1 \le -\sqrt{\cos x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le y \le 1$.

Vậy khi $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = k2\pi; k \in Z$

Cách 2 : sử dụng máy tính cầm tay

STUDY TIP
Nhiều độc giả không lưu ý đổi dấu của bpt thứ hai của hệ khi nhân các vế với -1 dẫn đến chọn đáp án sai.

Ví dụ 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \cot^4 a + \cot^4 b + 2\tan^2 a.\tan^2 b + 2$

A. $\min y = 2$. **B.** $\min y = 6$.

C. $\min y = 4$. **D.** Không tồn tại GTLN.

Lời giải

Chọn B.

$P = \left(\cot^2 a - \cot^2 b\right)^2 + 2\cot^2 a.\cot^2 b + 2\tan^2 a.\tan^2 b + 2$

$= \left(\cot^2 a - \cot^2 b\right)^2 + 2\left(\cot^2 a.\cot^2 b + \tan^2 a.\tan^2 b - 2\right) + 6$

$= \left(\cot^2 a - \cot^2 b\right)^2 + 2\left(\cot^2 a.\cot^2 b + \tan^2 a.\tan^2 b - 2\cot a.\mathrm{cotb}.\tan a.\tan b\right) + 6$

$= \left(\cot^2 a - \cot^2 b\right)^2 + 2\left(\cot a.\cot b - \tan a.\tan b\right)^2 + 6 \ge 6$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \cot^2 a = \cot^2 b \\ \cot a.\cot b = \tan a.\tan b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot^2 a = 1 \\ \cot^2 b = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow a = b = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

STUDY TIP:
Với các bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm lượng giác ta có thể đưa về dạng $y = A^2(x) + B \ge B$. Nhưng cần lưu ý xem dấu bằng có xãy ra hay không.

Tiếp theo ta có ví dụ 6 là một câu hỏi khác cho ví dụ 2 như sau

Ví dụ 6. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x.\cos x + 1$ trên đoạn $\left[0, \frac{7\pi}{12}\right]$ lần lượt là

A. $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y = 2; \max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y = 3$. **B.** $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y = 0; \max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y = 2$.

C. $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y = 0; \max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y = 4$. **D.** $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y = 0; \max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y = 3$.

Lời giải

Chọn B.

Từ ví dụ 2 ta có $y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2$. Đặt $u=2x+\frac{\pi}{3}$

Từ đề bài ta xét $x\in\left[0;\frac{7\pi}{12}\right]\Rightarrow u\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right]$

Ta lập BBT của hàm số $y=2\cos u+2$ trên $\left[\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right]$.

u	$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$2\cos u+2$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right]} f(\text{u})=0$ khi $u=\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$

$\max\limits_{\left[\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right]} f(\text{u})=3$ khi $u=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=0$

Hay $\min\limits_{\left[0;\frac{7\pi}{12}\right]} y=0;\max\limits_{\left[0;\frac{7\pi}{12}\right]} y=3$.

STUDY TIP:

Với các bài toán tìm min, max của hàm số lượng giác trên một đoạn ta thường phải xét nhanh BBT để giải quyết bài toán. Ở chương trình 11 ta chưa học đạo hàm nên chưa giải quyết được bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm số sử dụng đạo hàm. Sau khi học xong đạo hàm ta sẽ giải quyết bài toán này nhanh chóng hơn.

Ví dụ 7. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin^2 x-\sin x+2$.

A. $\min y=\frac{7}{4};\max y=4$.

B. $\min y=\frac{7}{4};\max y=2$.

C. $\min y=-1;\max y=1$.

D. $\min y=\frac{1}{2};\max y=2$.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $\sin x=u;\ u\in[-1;1]$

Xét hàm số: $y=u^2-u+2$ trên $[-1;1]$.

Ta có: $\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2}\in[-1;1]$. Từ đây có bảng biến thiên

u	-1		$\frac{1}{2}$		1
y	4	$\searrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$	2

Ta kết luận: $\min\limits_{[-1;1]} f(u) = \frac{7}{4}$ và $\max\limits_{[-1;1]} y = 4 \Leftrightarrow u = -1$.

Hay $\min y = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ và $\max y = 4 \Leftrightarrow \sin x = -1$.

Ngoài các phương pháp giải các bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm số lượng giác ta rút ra từ các ví dụ trên ta còn phương pháp sử dụng bất đẳng thức cơ bản. Phương pháp này được coi là một phương pháp khó vì đòi hỏi tính sang tạo và kĩ thuật trong việc sử dụng bất đẳng thức.

Một số bất đẳng thức ta thường dung:

1.Bất đẳng thức AM – GM.

a. Với hai số:

Cho hai số thực a,b là hai số dương, ta có $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ dấu bằng xảy ra khi $a=b$.

b. Với n số:

Cho hai số thực $x_1;x_2;x_3;...;x_n$ là các số dương $n \in N^*$, ta có $\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1.x_2.x_3...x_n}$ dấu bằng xảy ra khi $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n$.

2. Bất đẳng thức Bunyakovsky

a. Bất đẳng thuwcsBunyakovsky dạng thông thường.

$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) \ge (ac+bd)^2$. Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

b. Bất đẳng thức Bunyakovsky cho bộ hai số

Với hai bộ số $(a_1;a_2;...;a_n)$ và $(b_1;b_2;...;b_n)$ ta có

$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right) \ge \left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2$

STUDY TIP

Ta có thể sử dụng tính chất của tam thức bậc hai để giải các bài toán tìm min max hàm lượng giác như sau:

Cho hàm số $y = ax^2+bx+c$

+ Nếu $a<0$ thì $ax^2+bx+c \le \frac{-\Delta}{4a}$ dấu bằng xảy ra khi $x = -\frac{b}{2a}$.

+ Nếu $a>0$ thì $ax^2+bx+c \ge \frac{-\Delta}{4a}$ dấu bằng xảy ra khi $x = -\frac{b}{2a}$.

+ Nếu hàm số đã cho là hàm bậc hai mà điều kiện không phải là $\forall x \in R$ thì ta phải lập BBT để tìm min max

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=....=\frac{a_n}{b_n}$ với quy ước nếu một số b_i nào đó $(i=1,2,3\ldots)$ bằng 0 thì a_i tương đương bằng 0.

c. Hệ quả của bất đẳng thức Bunyakopvsky ta có $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\ge 4abcd$

Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}+\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sin^2 x}$

A. $1+\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{22}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$. **D.** $1+\sqrt{5}$.

Đáp án B

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y=\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}+\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sin^2 x}\Leftrightarrow y=\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}+\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakopvsky cho 4 số: 1; 1; $\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}$; $\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x}$ ta có:

$$1.\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}+1.\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x}\le\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x}=\sqrt{2}.\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{2.1}}=\frac{\sqrt{22}}{2}$$

Hay $y\le\frac{\sqrt{22}}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $1+\frac{1}{2}\cos^2 x=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

STUDY TIP

Trong bài toán ta có thể nhanh chóng nhận ra sử dụng bất đẳng thức Bunyakopvsky bởi ở trong căn lần lượt có $\sin^2 x$ và $\cos^2 x$. Ta cân bằng hệ số của $\sin^2 x$ và $\cos^2 x$ để áp dụng tính chất $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Áp dụng Bunyakopvsky thì vế phải sẽ là hằng số, từ đó giải quyết được bài toán.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=\frac{1}{2-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}$ với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{4}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$T **B.** $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{2}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}$

C. $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{2}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$ **D.** $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{4}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1: Ta thấy $2-\cos x>0,\forall x\in R$ và $1+\cos x>0,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra $\frac{1}{2-\cos x}$ và $\frac{1}{1+\cos x}$ là hai số dương. Áp dụng vất đẳng thức AM- GM cho hai số dương ta có

$$\frac{1}{2-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}\ge\frac{2}{\sqrt{(2-\cos x)(1+\cos x)}}$$

Mặt khác tiếp tục áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{(2-\cos x)(1+\cos x)}\le\frac{2-\cos x+1+\cos x}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y\ge\frac{2}{\sqrt{(2-\cos x)(1+\cos x)}}\ge\frac{4}{3}$$

STUDY TIP

Trong bài toán ta có thể nhanh chóng nhận ra sử dụng bất đẳng thức AM-GM bởi vì ta thấy mẫu số của hai phân thức cộng lại sẽ ra hằng số, nên ở đây ta có thể sử dụng bất đẳng thức AM-GM.

Ta có thể giải quyết bài toán theo hướng khác đó là sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu.

Với x, y là hai số thực dương ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ dấu bằng xảy ra khi $x=y$

Vậy $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{4}{3}$, dấu bàng xảy ra khi $\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$ vì $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Cách 2: Để ý đề bài hỏi tìm GTLN, GTNN của hàm số trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Trên đây là hai ví dụ sử dụng bất đẳng thức tìm GTLN, GTNN của hàm số lượng giác mà không có liên hệ cho trước. Ví dụ 10 dưới đây là một ví dụ khó hơn về sử dụng bất đẳng thức kết hợp với lượng giác để giải quyết.

Ví dụ 10. Cho $x, y, z>0$ và $x+y+z=\frac{\pi}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$y=\sqrt{1+\tan x.\tan y}+\sqrt{1+\tan y.\tan z}+\sqrt{1+\tan z.\tan x}$$

A. $y_{\max}=1+2\sqrt{2}$. **B.** $y_{\max}=3\sqrt{3}$. **C.** $y_{\max}=\sqrt{4}$. **D.** $y_{\max}=2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $x+y+z=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x+y=\frac{\pi}{2}-z\Rightarrow\tan(x+y)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\Leftrightarrow\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}=\frac{1}{\tan z}$

$\Leftrightarrow\tan x.\tan z+\tan y.\tan z=1-\tan x.\tan y \Leftrightarrow\tan x.\tan z+\tan y.\tan z+\tan x.\tan y=1$

Ta thấy $\tan x.\tan z;\ \tan y.\tan z;\ \tan x.\tan y$ lần lượt xuất hiện trong hàm số đề cho dưới căn thức, tương tự như ví dụ 8, áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho 6 số ta có: $1.\sqrt{1+\tan x.\tan y}+1.\sqrt{1+\tan y.\tan z}+1.\sqrt{1+\tan z.\tan x}\le$

$\le\sqrt{1^2+1^2+1^2}.\sqrt{1.\tan x.\tan z+1.\tan y.\tan z+1.\tan x.\tan y}=$

$=\sqrt{3}\sqrt{3+(\tan x.\tan z+\tan y.\tan z+\tan x.\tan y)}=2\sqrt{3}$

Vậy $y_{\max}=2\sqrt{3}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG
TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 1. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = 4\cos\sqrt{x}$ là:
A. 0 và 4. **B.** -4 và 4. **C.** 0 và 1. **D.** -1 và 1.

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{1-\cos^2 x} - 2$ là:
A. 0 và $\sqrt{2}-1$. **B.** -1 và $\sqrt{2}-1$. **C.** -2 và -1 **D.** -1 và 1

Câu 3. Cho hàm số $y = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Giá trị lớn nhất của hàm số là:
A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Câu 4. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x$ là:
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 2 .

Câu 5. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x + 2}$ là:
A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{-\sqrt{2}}{2}$. **D.** 0 .

Câu 6. Giá trị lớn nhất của hàm số là: $y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$
A. 0. **B.** $3-2\sqrt{3}$.. **C.** $2-2\sqrt{2}$.. **D.** -1. .

Câu 78. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 3 - \frac{1}{5}\sin^2 x\cos^2 x$ là
A. $\frac{59}{20}$ **B.** $\frac{14}{5}$ **C.** 3 **D.** $\frac{29}{10}$

Câu 79. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4\sin x + 2\cos x$ là
A. $2\sqrt{5}$ **B.** $-2\sqrt{5}$ **C.** 0 **D.** 20

Câu 80. Hàm số $y = 4\sin x - 4\cos^2 x$ đạt giá trị nhỏ nhất là
A. -1 **B.** -4 **C.** $\frac{-5}{4}$ **D.** -5

Câu 81. Hàm số $y = 4\cot^2 2x - \frac{\sqrt{3}\left(1-\tan^2 x\right)}{\tan x}$ đạt giá trị nhỏ nhất là
A. 0 **B.** $3-2\sqrt{3}$ **C.** $2-2\sqrt{2}$ **D.** -1

Câu 82. Hàm số $y = 2\cos x + \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ đạt giá trị lớn nhất là
A. $5-2\sqrt{2}$ **B.** $5+2\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$ **D.** $\sqrt{5-2\sqrt{2}}$

Câu 83. Tổng của giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin x\cos x$ là

A. $\frac{9}{8}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** 1 **D.** $\frac{4}{3}$

Câu 84. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin x\sqrt{\cos x}+\cos x\sqrt{\sin x}$ là

A. 0 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt[4]{2}$ **D.** $\sqrt{6}$

Câu 85. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{\cos^2 x+7\sin^2 x}+\sqrt{\sin^2 x+7\cos^2 x}$ là

A. $1+\sqrt{7}$ **B.** $-1+\sqrt{7}$ **C.** 4 **D.** 14

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Dạng: Tìm giá trị lớn nhất , nhỏ nhất của hàm lượng giác .

Câu 1. **Đáp án B.**

Tập xác định $D=[0;+\infty)$ .Ta có $-1\le\cos\sqrt{x}\le 1$, $\forall x\in D$. $\Leftrightarrow -4\le y\le 4$. Vậy $\min_D y=-4\Leftrightarrow\cos\sqrt{x}=-1$. $\max_D y=4\Leftrightarrow\cos\sqrt{x}=1$.

Câu 2. **Đáp án C .**

Ta có $y=\sqrt{1-\cos^2 x}-2=\sqrt{\sin^2}-2=|\sin x|-2$ $0\le|\sin x|\le 1\Leftrightarrow -2\le y\le -1$

Câu 3. **Đáp án C.**

Ta có $-1\le\sin(x+\frac{\pi}{4})\le 1$

Câu 4. **Đáp án B.**

Ta có $\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\left(1-2\sin^2 2x\right)=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$

Ta có $\cos 4x\le 1,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x\le 1,\forall x\in\mathbb{R}.$ Dấu bằng xảy ra khi $\cos 4x=1$.

Câu 5. **Đáp án D.**

Cách 1 : Tương tự như phần lý thuyết đã giới thiệu thì ta thấy $\cos x+2>0,\forall x$. Vậy

$y=\frac{\sin x+1}{\cos x+2}\Leftrightarrow\sin x+1=y(\cos x+2)\quad\Leftrightarrow\sin x-y\cos x+1-2y=0$. Ta có

$1^2+(-y)^2\ge(1-2y)^2\Leftrightarrow y^2+1\ge 4y^2-4y+1\quad\Leftrightarrow 3y^2-4y\le 0\Leftrightarrow 0\le y\le\frac{4}{3}$. Vậy $\min y=0$.

Cách 2 : Ta có $\begin{cases}\sin x+1\ge 0\\ \cos x+2\ge 0\end{cases}\Rightarrow y\ge 0\Rightarrow\min y=0\ khi\ \sin x=-1$.

Câu 6. **Đáp án C.**

Ta có $2\cos x-\sin x+4\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}.$ $y=\frac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4}$

$\Leftrightarrow 2y\cos x-y\sin x+4y=\cos x+2\sin x+3\quad\Leftrightarrow(2y-1)\cos x-(y+2)\sin x+4y-3=0$. Ta có

$(2y-1)^2+(y+2)^2\ge(4y-3)^2\quad\Leftrightarrow 5y^2+5\ge 16y^2-24y+9\quad\Leftrightarrow 11y^2-24y+4\le 0\Leftrightarrow\frac{2}{11}\le y\le 2.$

Vậy GTLN của hàm số đã cho là 2.

Câu 7. **Đáp án A.**

Ta có $f(x)=3-\frac{1}{5}\sin^2 x\cos^2 x=3-\frac{1}{20}.(2\sin x.\cos x)^2=3-\frac{1}{20}\sin^2 x\ \le 3-\frac{1}{20}=\frac{59}{20}$. Vậy GTNN của hàm số là $\frac{59}{20}$.

Câu 8. **Đáp án B.**

Ta có $4^2+2^2\ge y^2\Leftrightarrow -2\sqrt{5}\le y\le 2\sqrt{5}$.

Câu 9. **Đáp án D.**

Ta có $y=4\left(\sin x-(1-\sin^2 x)\right)=4\left(\sin^2 x+\sin x-1\right)=4\left(\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right)\ge -5.$

Dấu bằng xảy ra khi $\sin x=-\frac{1}{2}\Rightarrow \min y=-5$

Câu 10. **Đáp án D.**

Ta có $\cot 2x=\frac{1-\tan^2 x}{2\tan x}$. Từ đó suy ra $y=3\cot^2 2x-\frac{2\sqrt{3}\left(1-\tan^2 x\right)}{2\tan x}=3\cot^2 2x-2\sqrt{3}\cot 2x$ = $\left(\sqrt{3}\cot 2x-1\right)^2-1\ge -1, \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy $\min y=-1\Leftrightarrow \cot 2x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 11. **Đáp án C.**

Ta có $y=2\cos x+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow 2\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\quad \Leftrightarrow 2\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin x+\cos x\right)$

$\Leftrightarrow y=\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$. Ta có $y^2\le\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\Leftrightarrow y^2\le 5+2\sqrt{2}$. Do đó ta có $-\sqrt{5+2\sqrt{2}}\le y\le\sqrt{5+2\sqrt{2}}$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.

Câu 12. **Đáp án A.**

Ta có $y=\sin^4 x+\cos^4 x+\sin x\cos x\Leftrightarrow y=1-2\sin^2 x\cos^2 x+\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\quad\Leftrightarrow y=1-\frac{1}{2}\left[\left(\sin 2x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]\Leftrightarrow y=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}\left(\sin 2x-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{9}{8}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\sin 2x=\frac{1}{2}$.

Câu 13. **Đáp án A.**

Ta có $\sin x\sqrt{\cos x}+\cos x\sqrt{\sin x}\ge 2\sqrt{\sin x.\cos x\sqrt{\sin x.\cos x}}\quad\Leftrightarrow y\ge 2.\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2x\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2x}}\ge 0$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sin 2x=0.$

Câu 14. **Đáp án C.**

Ta có $y^2\le\left(1^2+1^2\right)\left(\cos^2 x+7\sin^2 x+\sin^2 x+7\cos^2 x\right)\Leftrightarrow y^2\le 2(1+7)=16\Rightarrow y\le 4$. Dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 4.