CHỦ ĐỀ : ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

A. LÝ THUYẾT

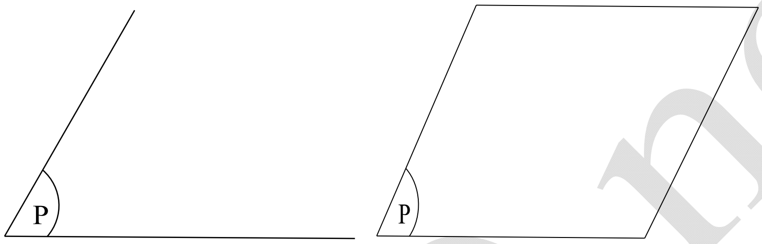
I. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1. Mặt phẳng

Mặt bảng, mặt bàn, mặt nước hồ yên lặng cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn.

Để kí hiệu mặt phẳng, ta thường dùng các chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hy Lạp đặt trong dấu ngoặc (). Ví dụ như mặt phẳng $(P),(Q),(\alpha),(\beta)$ …

Để biểu diễn mặt phẳng, ta thường dùng hình bình hành hoặc một miền góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình biểu diễn.



Đường thẳng và mặt phẳng là tập hợp các điểm. Do đó,

- Nếu điểm A thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $A \in a$ và đôi khi còn nói rằng đường thẳng a đi qua điểm A.
- Nếu điểm A thuộc mặt phẳng (α), ta kí hiệu $A \in (\alpha)$ và đôi khi còn nói rằng mặt phẳng (α) đi qua điểm A.
- Nếu đường thẳng a chứ trong mặt phẳng (α), ta kí hiệu $a \subset (\alpha)$ và đôi khi còn nói rằng mặt phẳng (α) đi qua (hoặc chứa) đường thẳng a.

2. Quy tắc để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian

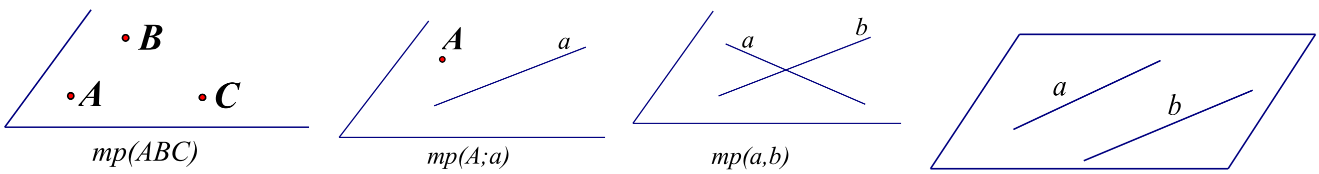
- Hình biểu diễn của một đường thẳng là một đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
- Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau. Hai đoạn thẳng song song và bằng nhau thì phải được vẽ song song và bằng nhau. Trung điểm của một đoạn thẳng phải được lấy ngay tại điểm chính giữa của đoạn thẳng đó.
- Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.
- Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho đường nhìn thấy và nét đứt đoạn biểu diễn cho đường bị che khuất.

3. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

- Tính chất 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.
- Tính chất 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Như vậy, một mặt phẳng trong không gian có thể được xác định bởi một trong các cách thức sau:

- Mặt phẳng đó đi qua 3 điểm không thẳng hàng A,B,C. Kí hiệu là mp(ABC).
- Mặt phẳng đó đi qua một đường thẳng a và một điểm A không thuộc đường thẳng a. Kí hiệu: ; mp(A,a).



mp(ABC) mp(A;a) mp(a,b)

- Mặt phẳng đó đi qua hai đường thẳng cắt nhau a và b. Kí hiệu, mp(a,b).
- Mặt phẳng đó đi qua hai đường thẳng song song a, b.

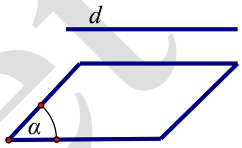
- Tính chất 3: Trong không gian có ít nhất bốn điểm không cùng thuộc bất cứ mặt phẳng nào.
- Tính chất 4: Trong không gian, hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.
- Tính chất 5: Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
- Tính chất 6: Trong mỗi mặt phẳng của không gian, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

3.Vị trí tương đối của các đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

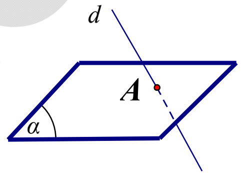
a) Vị trí tương đối của một đường thẳng và một mặt phẳng

Cho đường thẳng d và một mặt phẳng (α). Có thể xãy ra các khả năng sau:

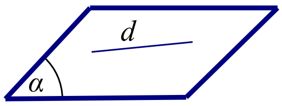
- Đường thẳng d và mặt phẳng (α) không có điểm chung. Trong trường hợp này ta nói đường thẳng d song song với mặt phẳng (α), kí hiệu $d//(\alpha)$.



- Đường thẳng d và mặt phẳng (α) có đúng một điểm chung. Trong trường hợp này ta nói ta nói đường thẳng d cắt mặt phẳng (α) tại A, kí hiệu: $d\cap(\alpha)=\{A\}$



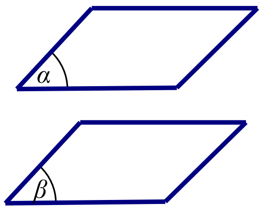
- Đường thẳng d và mặt phẳng (α) có nhiều hơn một điểm chung.Trường hợp này ta nói đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α) ta kí hiệu: $d\subset(\alpha)$ hay $(\alpha)\supset d$.



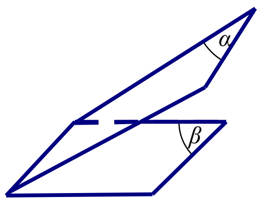
b) Vị trí tương đối của hai mặt phẳng:

Cho hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) . Có thể xảy ra một trong các khả năng sau:

- Hai mặt phẳng (α) và (β) không có điểm chung. Trong trường hợp này ta nói các mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, kí hiệu $(\alpha)//(\beta)$.



- Hai mặt phẳng (α) và (β) có ít nhất một điểm chung. Trong trường hợp này ta nói các mặt phẳng (α) và (β) có phần chung là một đường thẳng, giả sử đường thẳng đó là d , ta kí hiệu $(\alpha)\cap(\beta)=d$.

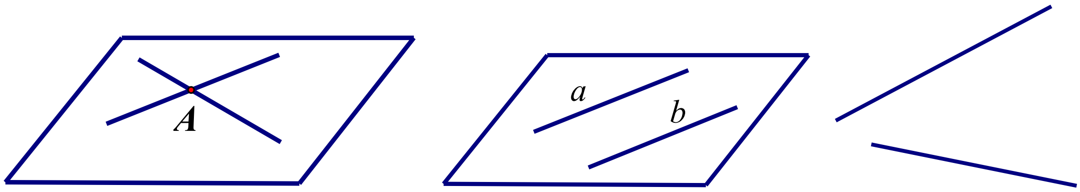


Đường thẳng d được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng. Như vậy, việc xác định giao tuyến của hai mặt phẳng tương ứng với việc xác định hai điểm cùng thuộc đồng thời hai mặt phẳng phân biệt đó. Ngoài ra, nếu biết được rằng ba điểm phân biệt cùng thuộc đồng thời hai mặt phẳng thì ba điểm đó phải nằm trên một đươc thẳng.

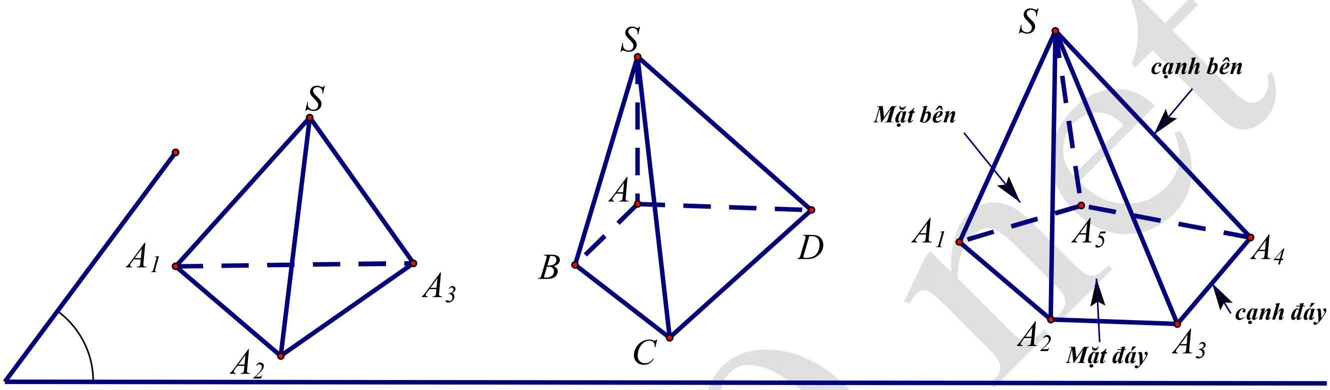
c) Vị trí tương đối của hai đương thẳng: Cho hai đường thẳng phân biệt a và b . Có thể xảy ra một trong các khả năng sau:

- Các đường thẳng a và b cùng thuộc một mặt phẳng. Khi đó a và b hoặc cắt nhau tại một điểm hoạc song song với nhau.

- Các đương thẳng a và b không cùng nằm trong bất kì một mặt phẳng nào. Trong trường hợp này ta nói các đường thẳng a và b chéo nhau.



4. Hình chóp và hình tứ diện



1. Hình chóp:

Trong mặt phẳng (α) , cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ .Lấy điểm S nằrm ngoài mặt phẳng(α) . Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ để được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ .Hình gồm đa giác $A_1, A_2, ..., A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ và gọi là hình chóp và được kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$

Ta gọi S là đỉnh, đa giác $A_1, A_2, ..., A_n$ là mặt đáy, tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ gọi là một mặt bên của hình chóp, Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ gọi là các cạnh bên, các cạnh của đa giác $A_1A_2...A_n$ là các cạnh đáy của hình chóp.

-Cách gọi tên: Hình chóp + tên đa giác.

- Ví dụ: hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác....

Lưu ý: Hình chóp có đáy là đa giác đều, các cạnh bên bằng nhaulaf hình chóp đa giác đều.

b) tứ diện:

Tứ diện $ABCD$ là hình được thành lập từ bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D .Các điểm A, B, C, D là các đỉnh của tứ diện, các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC được gọi là các mặt của tứ diện đối diện với các đỉnh A, B, C, D và các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các cạnh của tứ diện . Trong đó các cặp cạnh AB và CD, AC và DB, AD và BC thường được gọi là các cặp cạnh đối của tứ diện.

B. CÁC DẠNG BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH GIAO TUYẾN GIŨA HAI MẶT PHẲNG

Phương pháp: Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng(α) và (β) ta tiến hành đi tìm hai điểm thuộc cả hai mặt phẳng (α) và (β) .

Lưu ý:

Một điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) thường tìm được bằng cách: Chọn một mặt phẳng (γ) sao cho các giao tuyến Δ_1,Δ_2 của (α) và (β) với (γ) có thể dựng được ngay. Giao điểm I của Δ_1,Δ_2 (trong (γ)) là điểm chung cần tìm.

Ta thường chứng minh ba điểm thẳng hàng bằng cách chứng minh ba điểm đó thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng.

+ Ta cũng có thể chứng minh bà đường thẳng đồng quy bằng cách:

Cách 1: Hai trong ba đường thẳng ấy cắt nhau và lần lượt nằm trong hai mặt phẳng nhận đường thứ ba làm giao tuyến.

Cách 2: Tìm một đoạn thẳng AB trên một đường thẳng nào đó. Chứng minh hai đường thẳng còn lại chia đoạn AB theo cùng một tỉ số đại số.

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG Δ VÀ MẶT PHẲNG (α) .

Phương pháp:

+ Nếu phát hiện ra một đường thẳng d trong mặt phẳng (α) cắt Δ tại I thì I chính là giao điểm của Δ với mặt phẳng (α) .

+ Nếu chưa phát hiện ra đường thẳng d thì ta dựng d bằng cách: Chọn một mặt phẳng (γ) chứa Δ sao cho giao tuyến của (γ) và (α) có thể dựng được ngay, giao tuyến đó chính là đường thẳng d cần tìm.

Hai định lí quan trọng thường dùng:

Định lí Ceva: Cho tam giác ABC . Các điểm M,N,P khác A,B,C và theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC,CA,AB . Khi đó các đường thẳng AM,BN,CP hoặc đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=-1$

Định lí Menelaus : Cho tam giác ABC . Các điểm M,N,P khác A,B,C và theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC,CA,AB . Khi đó các điểm M,N,P thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1$.

*DẠNG 3: **BÀI TOÁN DỰNG THIẾT DIỆN***

Cho trước khối đa diện T và mặt phẳng (α) . Nếu (α) có điểm chung với T thì (α) sẽ cắt một số mặt của T theo các đoạn thẳng. Phần mặt phẳng (α) giới hạn bởi các đoạn đó thường là một đa giác, gọi là mặt cắt (còn gọi là thiết diện) giữa T và (α).

Chú ý:

+ Đỉnh của thiết diện là giao điểm của (α) với các cạnh của T . Cạnh của thiết diện là các đoạn giao tuyến của (α) với các mặt của T . Do đó thực chất của việc dựng thiết diện là bài toán dựng giao điểm giữa đường thẳng và mặt phẳng và dựng giao tuyến giữa hai mặt phẳng.

+ Do mỗi cạnh của thiết diện là đoạn giao tuyến của mặt phẳng (α) với một mặt của T . Do đó số cạnh nhiều nhất mà thiết diện có thể có chính là số mặt của T .

- Đối với hình chóp tam giác (hoặc tứ diện), thiết diện của nó cắt bởi mặt phẳng (α) chỉ có thể là tam giác hoặc tứ giác (ở đay ta quy ước không xét các trường hợp suy biến khi thiết diện là một mặt hoặc một cạnh của hình chóp).

-Đối với hình chóp tứ giác, thiết diện của nó chỉ có thể là tam giác, tứ giác hoặc ngũ giác.

Các bài toán liên quan đến thiết diện gồm các dạng:

+ Dựng thiết diện.
+ Xác định hình dạng thiết diện.
+ tính diện tích thiết diện.
+ Tính tỉ số thể tích hai phần do thiết diện phân chia khối thể tích đã cho (sẽ được trình bày trong Công phá toán tập 3).

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Gọi (P) là mặt phẳng qua 3 điểm M, N, B.

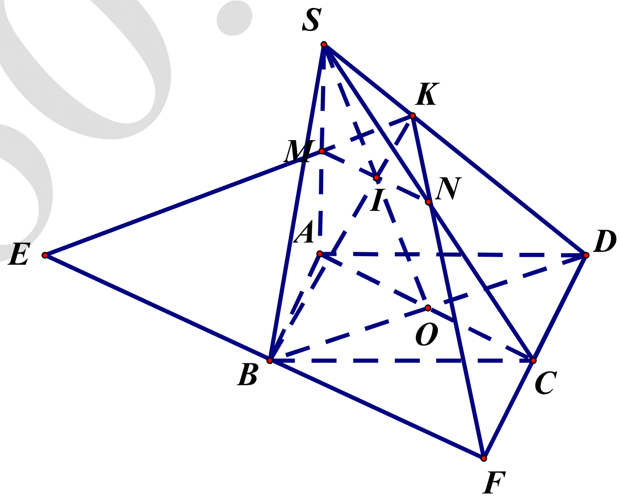
a) Tìm các giao tuyến của (P) và (SAB) ; (P) và (SBC).

b) Tìm giao điểm I của đường thẳng SO với mặt phẳng (P) và giao điểm K của đường thẳng SD với mặt phẳng (P).

c) Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SCD). Từ đó suy ra thiết diện của hình chóp cắt bởi (BMN).

d) Xác định các giao điểm E, F của các đường thẳng DA, DC với (P). Chứng minh rằng E, B, F thẳng hàng.

Lời giải::



a) Ta có:

$M \in SA, SA \subset (SAB) \Rightarrow M \in (SAB) (1)$

Lại có $M \in (BMN)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $M \in (SAB) \cap (BMN) (3)$

Ta có : $B \in (SAB) \cap (BMN) (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $BM = (SAB) \cap (BMN)$.

Tương tự ta cũng suy ra $BM = (SAB) \cap (BMN)$.

b) Trong mặt phẳng (SAC), gọi I là giao điểm của SO với MN

Ta có :

$I \in MN, MN \subset (BMN) \Rightarrow I \in (BMN) \Rightarrow I$ là giao điểm của SO với (BMN).

Trong mặt phẳng (SBD), gọi K là giao điểm của BI với SD. Ta có :

$K \in BI, BI \subset (BMN) \Rightarrow K \in (BMN)$. Suy ra K chính là giao điểm của SD với (BMN).

c) Ta có : $\begin{cases} K \in (BMN) \\ K \in (SAD) \end{cases} \Rightarrow K \in (BMN) \cap (SAD)$.

Ta lại có : $M \in (BMN) \cap (SDC)$.

Như vậy tứ giác $BMKN$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (BMN).

d) Trong mặt phẳng (SAD), gọi $\{E\} = MK \cap AD$. Ta có: $MK \subset (BMN)$ nên $E \in (BMN)$.

Vậy E chính là giao điểm của AD với (BMN).

Trong mặt phẳng (SDC) gọi $\{F\} = NK \cap CD$.

Ta có $NK \subset (BMN)$ nên $F \in (BMN)$,

$\begin{cases} E \in (BMN) \\ E \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow E \in (BMN) \cap (ABCD)$, $\begin{cases} B \in (BMN) \\ B \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow B \in (BMN) \cap (ABCD)$

Suy ra ba điểm B, E, F cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (BMN) và $(ABCD)$. Do đó ba điểm B, E, F thẳng hàng.

Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho MN không song song với AC . M, N, P, Q đồng phẳng khi :

A. $\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{DP} \cdot \frac{DQ}{AQ} = 1$ **B.** $\frac{BM}{AM} \cdot \frac{CN}{BN} \cdot \frac{CP}{DP} \cdot \frac{DQ}{AQ} = 1$

C. $\frac{BM}{AM} \cdot \frac{CN}{BN} \cdot \frac{DP}{CP} \cdot \frac{DQ}{AQ} = 1$ **D.** $\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{DP}{CP} \cdot \frac{AQ}{DQ} = 1$.

Đáp án A.

Lời giải:.

+ Giả sử M, N, P, Q cùng thuộc mặt phẳng (α) .

Nếu MN cắt AC tại K thì K là điểm chung của các mặt phẳng $(\alpha),(ABC)$,(ADC) nên PQ cũng đi qua K.

Áp dụng định lí *Menelaus* cho các tam giác ABC, ADC ta được :

$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CK}{AK} = 1$; $\frac{AK}{CK} \cdot \frac{CP}{DP} \cdot \frac{DQ}{AQ} = 1 \Rightarrow \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{DP} \cdot \frac{DQ}{AQ} = 1$

Nhận xét :

Trường hợp MN song song với AC thì ví dụ trên vẫn đúng.

+ Liệu trường hợp ngược lại, có $\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{DP} \cdot \frac{DQ}{AQ} = 1$ thì M, N, P, Q có đồng phẳng hay không ?

Câu trả lời là trường hợp ngược là ví dụ vẫn đúng. Ta sẽ cùng chứng minh nhé :

Trong mặt phẳng (ACD), KO cắt AD tại Q' thì các điểm M, N, P, Q' đồng phẳng.

Theo ví dụ 2 ta có: $\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{DP} \cdot \frac{AQ'}{DQ'} = 1 \Rightarrow \frac{DQ'}{AQ'} = \frac{DQ}{AQ} \Rightarrow Q \equiv Q'$. Ví dụ được chứng minh.

+ Ví dụ này có thể được mở rộng đối với các điểm M, N, P, Q bất kì trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA như sau :

M, N, P, Q' đồng phẳng khi và chỉ khi $\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{DP}} \cdot \frac{\overline{DQ}}{\overline{AQ}} = 1$ (khẳng định này dôi khi còn được gọi là định lí Menelaus mở rộng trong không gian)

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ và E là điểm thuộc mặt bên (SCD) . E, F lần lượt là trung điểm của AB, AD . Thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG) là :

A. Tam giác. **B.** Tứ giác. **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

Đáp án C.

Lời giải: :

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi I, H lần lượt là giao điểm của FG với BC, CD

Dễ thấy thiết diện là hình lập phương bị cắt bởi mặt phẳng (α) là ngũ giác $MNGFE$.
Vậy đáp án đúng là C.

b) Theo cách dựng ta có E là trung điểm của BB'. Do đó $B'F = BP = \frac{a}{2} = C'Q$

Suy ra : $PE = QF = EF = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow PQ = \frac{3a\sqrt{2}}{2}, \frac{MB}{NC} = \frac{PB}{PC} = \frac{1}{3} \Rightarrow CN = \frac{3}{4}CD = \frac{3}{4}a.$

Do $\begin{cases} (ABB'A')//(DCC'D') \\ KE = (\alpha) \cap (ABB'A') \\ NG = (\alpha) \cap (DCC'D') \end{cases} \Rightarrow KE//NG$

Tương tự ta có : $MN//FG$

Do đó : $\frac{S_{PME}}{S_{PQN}} = \left(\frac{PE}{PQ}\right)^2 = \frac{1}{9}, \frac{S_{QGF}}{S_{QNP}} = \left(\frac{QE}{PQ}\right)^2 = \frac{1}{9}$

Diện tích thiết diện là :

$S_{MNGFE} = S_{PNQ} - (S_{PEM} + S_{QFG}) = \frac{7}{9}S_{PNQ}.$

Do hai tam giác vuông NCP và NCQ bằng nhau (c.g.c) nên $NQ = NP$. Vậy tam giác NPQ cân tại N. Gọi I là trung điểm của PQ

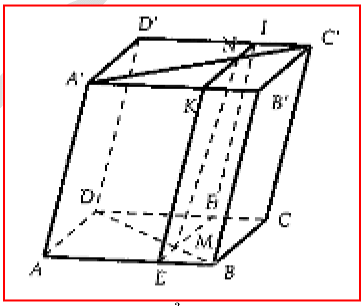
Ta có : $PN = \sqrt{PC^2 + CN^2} = \frac{5a\sqrt{5}}{4}, NI = \sqrt{PN^2 - PI^2} = \sqrt{\frac{45a^2}{16} - \frac{18a^2}{16}} = \frac{3a\sqrt{a}}{4}.$

Diện tích của NPQ bằng :

$S_{NPQ} = \frac{1}{2}NI.PQ = \frac{9a^2\sqrt{6}}{16} \Rightarrow S_{MNGFE} = \frac{7a^2\sqrt{6}}{16}.$

Vậy đáp án đúng là B.

Câu 23. Đáp án D.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, dựng đường thẳng qua M, song song với BC cắt $A'B', C'D'$ theo thứ tự tại E, F.

Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$, dựng đường thẳng qua N song song với $B'C'$ cắt $A'B', C'D'$ theo thứ tự tại K, I. Ta có : $\frac{BM}{BD} = \frac{C'N}{C'A'} \Rightarrow \frac{BM}{BD} = \frac{C'N}{NA'}.$

Áp dụng định lý Thales ta có :

$\frac{B'K}{A'K} = \frac{C'N}{A'N} = \frac{MB}{MD} = \frac{BE}{EA} \Rightarrow KE//BB'.$

Từ đây sauy ra $KE//(BCC'B')$ (1).

Theo cách dựng ta suy ra : $EF//(BCC'B')$ (2).

Từ (1) và (2)$\Rightarrow \begin{cases}(EFIK)//(BCC'B')\\ MN//(EFIK)\end{cases} \Rightarrow MN//(BCC'B')$.

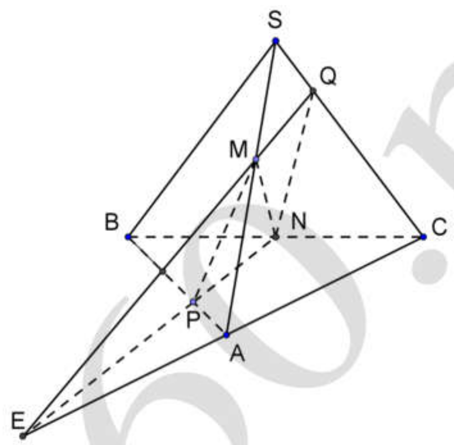
Vậy MN luôn song song với mặt phẳng cố định, mặt phẳng đó là (BCC'B')

Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. P là điểm nằm trên cạnh AB sao cho $\frac{AP}{AB}=\frac{1}{3}$. Gọi Q là giao điểm của SC với mặt phẳng (MNP) . Tính $\frac{SQ}{SC}$

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải:

Đáp án A.



Trong mặt phẳng (ABC) , gọi $E=NP\cap AC$

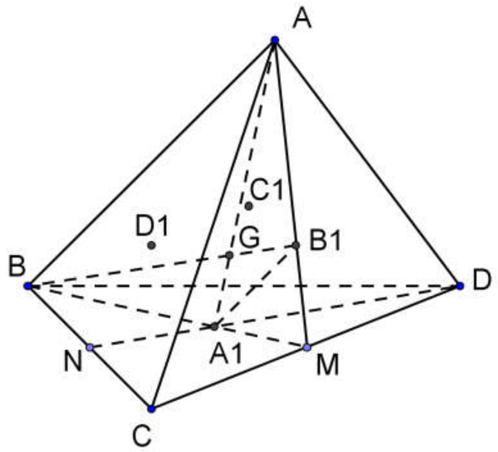
Khi đó Q chính là giao điểm của SC với EM.

Áp dụng địnhlý Menelaus vào tam giác ABC ta có: $\frac{AP}{PB}.\frac{BN}{NC}.\frac{CE}{EA}=1\Rightarrow\frac{CE}{EA}=2$

Áp dụng địnhlý Menelaus vào tam giác SAC ta có: $\frac{AM}{MS}.\frac{SQ}{QC}.\frac{CE}{EA}=1\Rightarrow\frac{SQ}{QC}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{SQ}{SC}=\frac{1}{3}$

Ví dụ 5: Cho tứ diện ABCD. Gọi A_1,B_1,C_1,D_1 tương ứng là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD và ABC. Chứng minh rằng AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 đồng quy tại điểm G và ta có: $\frac{AG}{AA_1}=\frac{BG}{BB_1}=\frac{CG}{CC_1}=\frac{DG}{DD_1}=\frac{3}{4}$

Lời giải:



Lưu ý: Điểm G được gọi là trọng tâm tứ diện ABCD

Gọi M là trung điểm CD. Theo tính chất trọng tâm ta có: $\frac{MA_1}{MB}=\frac{MB_1}{MA}=\frac{1}{3}\Rightarrow A_1B_1//AB$ và $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{3}$

Trong mặt phẳng (AMB) , gọi G là giao điểm của BB_1, AA_1

Theo định lý Thales ta có: $\frac{A_1G}{GA}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{AG}{AA_1}=\frac{3}{4}\quad(1)$

Tương tự ta có: $\begin{cases} G'=CC_1\cap AA_1, \frac{AG'}{AA_1}=\frac{3}{4} \\ G''=DD'\cap AA_1, \frac{AG''}{AA_1}=\frac{3}{4} \end{cases}\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra G, G', G" trùng nhau, tức là AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 đồng quy tại điểm G và ta có :

$\frac{AG}{AA_1}=\frac{BG}{BB_1}=\frac{CG}{CC_1}=\frac{DG}{DD_1}=\frac{3}{4}$

Bài tập tương tự: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, E, F, K, H tương ứng là các trung điểm của AB, CD, AC, BD, AD, BC . Chứng minh rằng IJ, EF, KH đòng quy tại một điểm và điểm đồng quy chính là trọng tâm G của tứ diện $ABCD$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

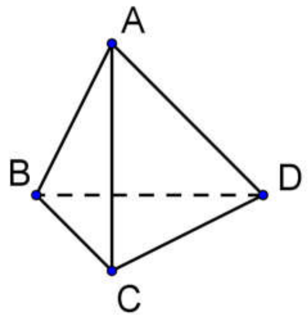
A. Dùng nét đứt biểu diễn cho đường bị che khuất.

B. Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng.

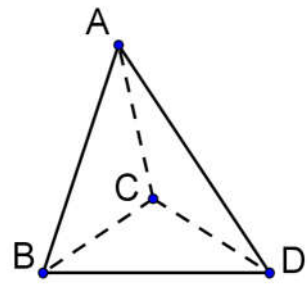
C. Hình biểu diễn phải giữ nguyên qua hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng..

D. Hình biểu diễn của hai đường cắt nhau có thể là hai đường song song.

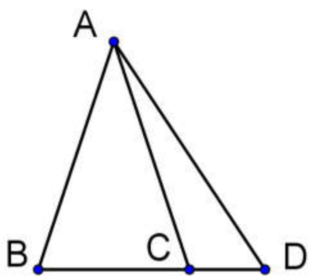
Câu 2. Trong các hình vẽ sau hình nào có thể là hình biểu diễn của một hình tứ diện? (Chọn câu đúng nhất)



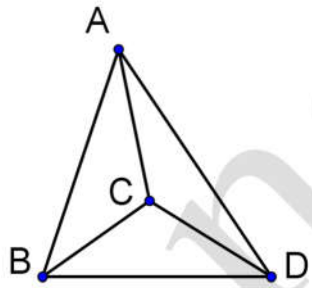
(I)



(II)



(III)



(IV)

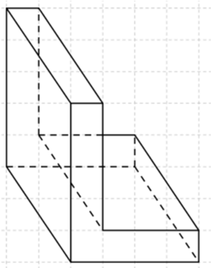
A. $(I),(II)$. .

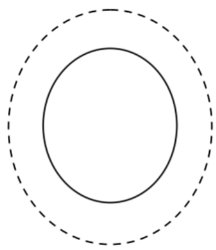
B. $(I),(II),(III),(IV)$.

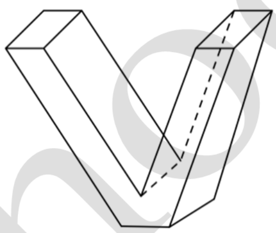
C. $(I),(II),(III)$.

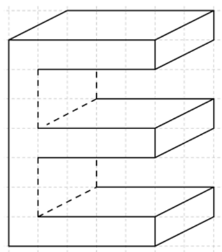
D. (I).

Câu 3. Hình nào sau đây vẽ đúng quy tắc?

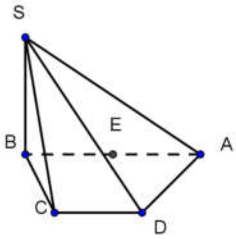
A.  .

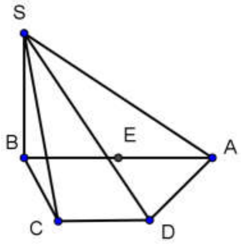
B.  .

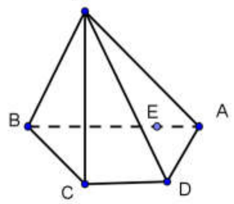
C.  .

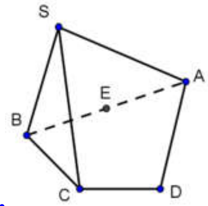
D. 

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB gấp đôi đáy nhỏ CD , E là trung điểm của đoạn AB . Hình vẽ nào sau đây vẽ đúng quy tắc?

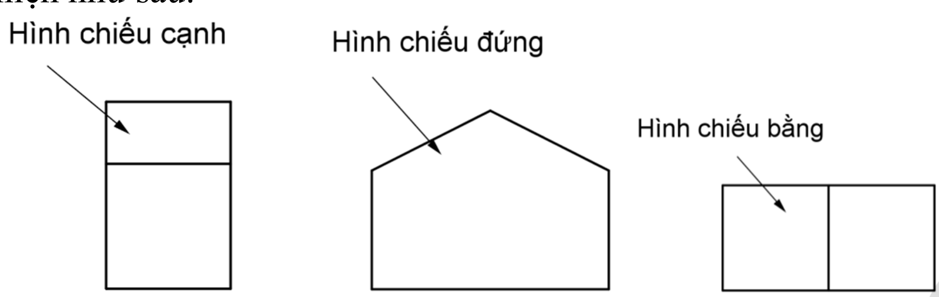
A. 

. **B.** 

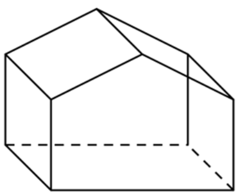
. **C.** 

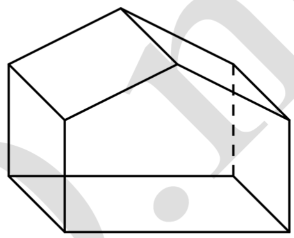
. **D.** 

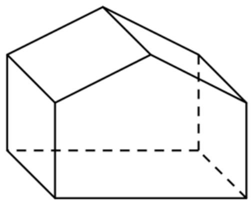
Câu 5. Một hình không gian có hình chiếu đứng (nhìn từ trước vào (có thể nhìn từ sau) để từ hình 3D chuyển sang hình 2D) hình chiếu bằng (nhìn từ trên xuống) có thể nhìn từ dưới lên)), hình chiếu cạnh (từ trái sang (có thể nhìn từ phải sang)) lần lượt được thể hiện như sau:

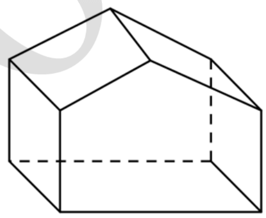


Hãy vẽ hình biểu diễn của hình đó?

A. .

B. .

C. .

D. 

Câu 6. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Qua ba điểm xác định một và chỉ một mặt phẳng.

B. Qua ba điểm phân biệt xác định một và chỉ một mặt phẳng.

C. Qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng xác định hai mặt phẳng phân biệt.

D. Qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng xác định một và chỉ một mặt phẳng.

Câu 7. Xét các mệnh đề sau đây:

(I) Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

(II) Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt.

(III) Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

(IV) Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có duy nhất một điểm chung khác nữa.

Số mệnh đề sai trong các mệnh đề trên là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 8. Cho n điểm phân biệt trong không gian $(n>4)$ .Biết rằng bốn điểm bất kỳ trong n điểm đã cho cùng thuộc một mặt phẳng. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tất cả n điểm thuộc cùng một mặt phẳng.

B. Có đúng $n-1$ điểm thuộc cùng một mặt phẳng.

C. Có đúng $n-2$ điểm thuộc cùng một mặt phẳng.

D. Không tồn tại mặt phẳng nào chứa tất cả n điểm.

Câu 9. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Có đúng hai mặt phẳng cắt nhau theo một đường thẳng cho trước..
B. Hai mặt phẳng có một điểm chung duy nhất.
C. Hai mặt phẳng cùng chứa hai cạnh của một tam giác thì trùng nhau..
D. Có đúng hai mặt phẳng phân biệt đi qua ba điểm phân biệt..

Câu 10. Cho tứ giác lồi $ABCD$ và điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Có bao nhiêu mặt phẳng qua S và hai trong số bốn điểm A,B,C,D?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 11. Cho năm điểm A,B,C,D,E phân biệt trong đó không có bốn điểm nào cùng nằm trên một mặt phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi ba trong năm điểm đã cho ?

A. 6. **B.** 10. **C.** 60. **D.** 8.

Câu 12. Cho $n\ (n \ge 3, n \in \mathbb{N})$ đường thẳng phân biệt đồng quy tại O trong đó không có ba đường thẳng nào cùng năm trên một mặt phẳng. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua hai trong số n đường thẳng trên?

A. $\dfrac{n!}{2(n-2)!}$. **B.** $\dfrac{n!}{(n-2)!}$. **C.** $\dfrac{n!}{2}$. **D.** $n!$.

Câu 13. Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng a,b cắt nhau cùng nằm trong mặt phẳng (α). Gọi A là một điểm thuộc đường thẳng a nhưng không thuộc đường thẳng b và P là một điểm nằm ngoài (α). Khẳng định nào sau đây đúng:

A. PA và b chéo nhau. **B.** PA và b song song.
C. PA và b cắt nhau. **D.** PA và b trùng nhau.

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD, I, J$ lần lượt là trung điểm của AD và BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. AJ, BI song song. **B.** AJ, BI trùng nhau. **C.** AJ, BI cắt nhau **D.** AJ, BI chéo nhau

Câu 15. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác (AB không song song CD). Gọi M là trung điểm của SD, N là điểm nằm trên cạnh SB sao cho $SN = 2NB, O$ là giao điểm của AC và BD. Cặp đường thẳng nào sau đây cắt nhau:

A. SO và AD. **B.** MN và SO. **C.** MN và SC **D.** SA và BC.

Câu 16. Cho bốn điểm A,B,C,D không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên AB, AD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho MN cắt BD tại I. Điểm I không thuộc mặt phẳng nào sau đây:

A. (ACD). **B.** (BCD). **C.** (CMN). **D.** (ABD).

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB. Khi đó BC và MN là hai đường thẳng:

A. Chéo nhau. **B.** Có hai điểm chung. **C.** Song song **D.** Cắt nhau

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm cạnh AC, N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = 2ND. O$ là một điểm thuộc miền trong của tam giác BCD. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Mặt phẳng (OMN) chứa đường thẳng AB

B. Mặt phẳng (OMN) đi qua giao điểm của hai đường thẳng MN và CD.

C. Mặt phẳng (OMN) đi qua điểm A .

D. Mặt phẳng (OMN) chứa đường thẳng CD .

Câu 19. Ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì :

A. Cùng thuộc một đường tròn
B. Cùng thuộc một đường thẳng
C. Cùng thuộc một eliP
D. Cùng thuộc một tam giác.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ (AB là đáy lớn, CD là đáy nhỏ). Khẳng định nào sau đây sai:

A. Hình chóp $S.ABCD$ có bốn mặt bên..

B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là SK trong đó K là một điểm thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO trong đó O là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI trong đó I là giao điểm của AD và BC .

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác (AB không song song CD). Gọi M là trung điểm của SD, N là điểm nằm trên cạnh SB sao cho $SN = 2NB, O$ là giao điểm của AC và BD . Giả sử đường thẳng d là giao tuyến của (SAB) và (SCD) . Nhận xét nào sau đây là sai:N

A. d cắt CD.
B. d cắt MN.
C. d cắt AB.
D. d cắt SO.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành $(BC//AD)$ .Mặt phẳng (P) di động chứa đường thẳng AB và cắt các đoạn SC, SD lần lượt tại E, F . Mặt phẳng (Q) di động chứa đường thẳng CD và cắt SA, SB lần lượt tại $G, H.I$ là giao điểm của $AE, BF; J$ là giao điểm của CG, DH . Xét các mệnh đề sau:

(1) Đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định..

(2) Đường thẳng GH luôn đi qua một điểm cố định.

(3) Đường thẳng IJ luôn đi qua một điểm cố dịnh.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 0.
B. 1.
C. 2 .
D. 3.

Câu 23. Cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh bằng a . Gọi E là trung điểm AB , F là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BF = 2FC, G$ là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CG = 2GD$. Tính độ dài đoạn giao tuyến của mặt phẳng (EFG) với mặt phẳng (ACD) của hình chóp $ABCD$ theo a .

A. $\dfrac{\sqrt{19}}{15}a$.
B. $\dfrac{a\sqrt{141}}{30}$.
C. $\dfrac{a\sqrt{34+15\sqrt{3}}}{15}$.
D. $\dfrac{a\sqrt{34-15\sqrt{3}}}{15}$.

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD, E$ nằm trên đoạn BC sao cho $BC = 3EC, F$ là điểm nằm trên BD sao cho $CD = 3DF$. Gọi G là giao điểm của BF và DE . Giao tuyến của hai mặt phẳng (ACG) và (ABD) là:

A. AH trong đó H thuộc BD sao cho $\overrightarrow{BH} = -4\overrightarrow{HD}$

B. AH trong đó H thuộc BD sao cho $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HD}$

C. AH trong đó H thuộc BD sao cho $\overrightarrow{BH} = 4\overrightarrow{HD}$

D. AH trong đó H thuộc BD sao cho $\overrightarrow{BH} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{HD}$

Câu 25. Cho tứ diện $SABC$ có $AB = c, BC = a, AC = b.$ AD, BE, CF là các đường phân giác trong của tam giác ABC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SBE) và (SCF) là:

A. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{b+c}{a}\overrightarrow{ID}$

B. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI} = -\frac{b+c}{a}\overrightarrow{ID}$

C. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{a}{b+c}\overrightarrow{ID}$

D. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{-a}{b+c}\overrightarrow{ID}$

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SO . Gọi H là giao điểm của SC với (MNP) . Tính $\frac{SH}{SC}$?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và CD . Trên đường thẳng DS lấy điểm P sao cho D là trung điểm SP . Gọi R là giao điểm của SB với mặt phẳng (MNP) . Tính $\frac{SR}{SB}$?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Câu 28. Cho tứ diện $SABC, E, F$ lần lượt thuộc đoạn $AC, AB.$ Gọi K là giao điểm của BE và CF . Gọi D là giao điểm của (SAK) với BC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{AK}{KD} + \frac{BK}{KE} + \frac{CK}{KF} \geq 6$. **B.** $\frac{AK}{KD} + \frac{BK}{KE} + \frac{CK}{KF} \leq 6$.

C. $\frac{AK}{KD} + \frac{BK}{KE} + \frac{CK}{KF} > 6$. **D.** $\frac{AK}{KD} + \frac{BK}{KE} + \frac{CK}{KF} < 6$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$, D, M lần lượt là trung điểm của BC, AD . Gọi E là giao điểm của (SBM) với AC, F là giao điểm của (SCM) với AB . Tính $\frac{MF}{CM - ME} + \frac{ME}{BM - ME}$?

A. 1. **B.** 2 . **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA,SB,SC,SD tương ứng tại các điểm E, F, G, H . Gọi $I = AC \cap BD, J = EG \cap SI$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{SA}{SE}+\frac{SC}{SG}=\frac{SB}{SF}+\frac{SD}{SH}$.
B. $\frac{SA}{SE}+\frac{SC}{SG}\geq 2\frac{SI}{SJ}$.
C. $\frac{SA}{SE}+\frac{SC}{SG}>\frac{SB}{SF}+\frac{SD}{SH}$.
D. $\frac{SB}{SF}+\frac{SD}{SH}\geq 2\frac{SI}{SJ}$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M,N lần lượt là các điểm nằm trên cạnh AB, AD sao cho $\frac{BM}{MA}=\frac{2}{3},\frac{NC}{BN}=\frac{1}{2}$. Gọi P là điểm trên cạnh SD sao cho $\frac{PD}{PS}=\frac{1}{5}$. J là giao điểm của SO với (MNP) . Tính $\frac{SJ}{SO}$?

A. $\frac{10}{11}$.
B. $\frac{1}{11}$.
C. $\frac{3}{4}$.
D. $\frac{5}{2}$.

Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$. E là điểm thuộc đoạn AB sao cho $EA=2EB$. F,G là các đei63m thuộc đường thẳng BC sao cho $\overrightarrow{FC}=5\overrightarrow{FB},\overrightarrow{GC}=-5\overrightarrow{GB}$. H,I là các điểm thuộc đường thẳng CD sao cho $\overrightarrow{HC}=-5\overrightarrow{HD},\overrightarrow{ID}=-5\overrightarrow{IC}$, J thuộc tia đối của tia DA sao cho D là trung điểm của AJ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Bốn điểm E,F,H,J đồng phẳng
B. Bốn điểm E,F,I,J đồng phẳng.
C. Bốn điểm E,G,H,I đồng phẳng.
D. Bốn điểm E,G,I,J đồng phẳng.

Câu 33. Cho tứ diện $ABCD, E,U$ là điểm thuộc đường thẳng AB sao cho $\overrightarrow{EA}=-2\overrightarrow{EB}$, $5\overrightarrow{UA}=4\overrightarrow{UB}$. F,G là các điểm thuộc đường thẳng BC sao cho $\overrightarrow{FC}=5\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GB}$. H,I là các điểm thuộc đường thẳng CD sao cho $\overrightarrow{HC}=-5\overrightarrow{HD},\overrightarrow{ID}=5\overrightarrow{IC}$. J,K là các điểm nằm trên đường thẳng DA sao cho $\overrightarrow{JA}=2\overrightarrow{JD},\overrightarrow{KD}=5\overrightarrow{KA}$. Bốn điểm nào dưới đây lập nên một tứ diện?

A. E,F,H,J .
B. E,G,I,K .
C. U,G,H,J .
D. U,F,I,K .

Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$ có M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD và P là điểm thuộc cạnh BC (P không là trung điểm BC).

a) Thiết diện của tứ diện bị cắt bởi (MNP) là:

A. Tam giác
B. Tứ giác
C. Ngũ giác.
D. Lục giác.

b) Gọi Q là giao điểm của (MNP) với AD, I là giao điểm của MN với PQ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_{MNPQ}=2S_{MPN}$.
B. $S_{MNPQ}=2S_{MPQ}$.
C. . $S_{MNPQ}=4S_{MPI}$
D. $S_{MNPQ}=4S_{PIN}$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, E là trung điểm của SA,F,G lần lượt là các điểm thuộc cạnh BC,CD . Thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP) là:

A. Tam giác
B. Tứ giác
C. Ngũ giác.
D. Lục giác.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, E là trung điểm của cạnh SA, F, G là các điểm thuộc cạnh SC, AB (F không là trung điểm của SC). Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (EFG) là:

A. Tam giác **B.** Tứ giác **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

Câu 37. Cho hình chóp $SA_1A_2...A_n$ với đáy là đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3, n \in \mathbb{N})$. Trên tia đối của tia A_1S lấy điểm $B_1, B_2, ...B_n$ là các điểm nằm trên cạnh SA_2, SA_n . Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng $(B_1B_2B_n)$ là:

A. Đa giác $n-2$ cạnh. **B.** Đa giác $n-1$ cạnh. **C.** Đa giác n cạnh. **D.** Đa giác $n+1$ cạnh.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, E là điểm thuộc cạnh bên SD sao cho $SD = 3SE$. F là trọng tâm tam giác SAB, G là điểm thay đổi trên cạnh BC. Thiết diện cắt bởi mặt phẳng (EFG) là:

A. Tam giác **B.** Tứ giác **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, E là một điểm thuộc mặt bên (SCD) . F, G lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB và SB. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (EFG) có thể là:

A. Tam giác, tứ giác . **B.** Tứ giác, ngũ giác. **C.** Tam giác, ngũ giác. **D.** Ngũ giác.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD, E$ là trung điểm của SB, F thuộc SC sao cho $3\overrightarrow{SF} = 2\overrightarrow{SC}, G$ là một điểm thuộc miền trong tam giác SAD . Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (EFG) là:

A. Tam giác, tứ giác . **B.** Tứ giác, ngũ giác. **C.** Tam giác, ngũ giác. **D.** Ngũ giác.

Câu 41. Cho hình tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $6a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, CB. P là điểm trên cạnh BD sao cho $BP = 2PD$. Diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ bị cắt bởi (MNP) là:

A. $S = \frac{5a^2\sqrt{51}}{4}$. **B.** $S = \frac{5a^2\sqrt{147}}{4}$. **C.** $S = \frac{5a^2\sqrt{147}}{2}$. **D.** $S = \frac{5a^2\sqrt{51}}{2}$.

Câu 42. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh bằng a. Trên tia đối của các tia CB, DA lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $CE = a, DF = a$. Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MEF) là:

A. $S = \frac{a^2\sqrt{33}}{18}$. **B.** $S = \frac{a^2}{3}$. **C.** $S = \frac{a^2}{6}$. **D.** $S = \frac{a^2\sqrt{33}}{9}$.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD, SC. Gọi Q là giao điểm của SD với (MNP) . Tính $\frac{SQ}{SD}$?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N , P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SO. Gọi H là giao điểm của SC với (MNP) . Tính $\frac{SH}{SC}$?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 45. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và CD. Trên đường thẳng DS lấy điểm P sao cho D là trung điểm của SP. Gọi R là giao điểm của SB với mặt phẳng (MNP). Tính $\frac{SR}{SB}$?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Đáp án D.

Câu 2. Đáp án B.

Câu 3. Đáp án A.

Câu 4. Đáp án A.

Theo quy tắc vẽ hình, các đoạn thẳng song song được vẽ bằng các đoạn thẳng song song nên đáp án D bị loại. Trung điểm được vẽ ở chính giữa đoạn nên ý C bị loại. Nét khuất được vẽ bởi nét đứt đoạn, nét với góc nhìn này với đáp án B thì hoặc AB đứt đoạn hoặc SC, SD đứt đoạn. Do đó chỉ có đáp án A đúng.

Câu 5. Đáp án C.

Hình A, B, D sai khi vẽ các đường không nhìn thấy bằng nét liền.

Câu 6. Đáp án D.

- Đáp án A, B sai, các em có thể lấy ví dụ ba điểm A, B, C phân biệt , thẳng hàng , thì có vô số mặt phẳng đi qua ba điểm đó.

- Đáp án C sai, vì theo tính chất thừa nhận, ba điểm phân biệt không thẳng hàng có duy nhất một mp đi qua ba điểm.

Câu 7. Đáp án B.

Theo các tính chất thừa nhận, ta thấy (I), (II), (III) đúng và nếu hai mp có 1 điểm chung thì chúng còn vô số điểm chung khác nữa. Điều đó đồng nghĩa với nhận xét (IV) là sai. Như vậy có 1 quy tắc sai.

Câu 8. Đáp án A.

- Nếu n điểm đã cho cùng thuộc một đường thẳng thì hiển nhiên n điểm thuộc cùng 1 mp. Do đó loại được đáp án B, C, D.

- Nếu n điểm đã cho không cùng thuộc một đường thẳng thì trong chúng phải có 3 điểm không thẳng hàng. Khi đó ba điểm này xác định 1 mp, kí hiệu là mp (P) . Lấy một điểm trong $n-3$ điểm còn lại thì theo giả thiết điểm đó phải thuộc mp(P) . Suy ra tất cả các điểm đã cho cùng thuộc 1 mp.

Câu 9. Đáp án C.

Một đường thẳng cho trước có vô số mp đi q   ua.

Hai mp đã có 1 điểm chung thì có vô số điểm chung khác nữa. Còn có trường hợp 2 mp không có điểm chung nào.

Có duy nhất 1 mp đi qua ba điểm phân biệt. Như vậy ta chọn ý C.

Câu 10. Đáp án D.

Số cách chọn 2 trong 4 điểm A, B, C, D là $C_4^2 = 6$.

Vậy có 6 mp đi qua S và 2 trong 4 điểm A, B, C, D .

Câu 11. Đáp án B.

Chọn 3 trong 5 điểm trên sẽ tạo nên 1 mp. Do đó, số mp tạo bởi 3 trong 5 điểm trên là $C_5^3 = 10$.

Câu 12. Đáp án A.

Hai đường thẳng phân biệt cắt nhau tại O xác định 1 mp . Nên số các mp chứa 2 trong n đường thẳng trên là $C_n^2 = \dfrac{n!}{2(n-2)!}$.

Câu 13. Đáp án A .

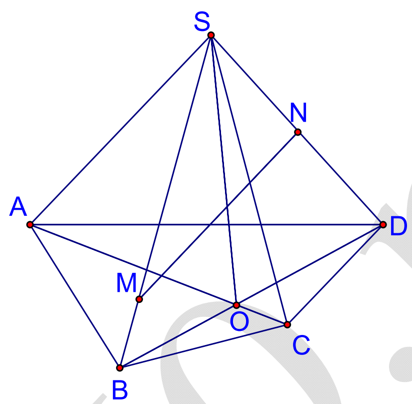
Dễ thấy PA, b không trùng nhau.

Giả sử PA, b không chéo nhau, khi đó PA, b hoặc song song hoặc cắt nhau. Lúc đó, theo cách xác định 1 mp, ta thấy PA, b cùng thuộc 1 mp(β). Các mp $(\alpha), (\beta)$ đều chứa đường thẳng b và đi qua điểm A ở ngoài b nên 2 mp$(\alpha), (\beta)$ trùng nhau. Suy ra điểm P phải thuộc mp (α) (Vô lý). Như vậy PA, b chéo nhau.

Câu 14. Đáp án D.

Giả sử AJ, BI đồng phẳng, suy ra AJ, BI đồng phẳng do đó A, B, C, D cùng thuộc 1 mp (vô lý). Do đó AJ, BI không đồng phẳng, do đó AJ, BI chéo nhau. Chọn đáp án D.

Câu 15. Đáp án B.



Giả sử SO, AD cắt nhau. Khi đó SO, AD đồng phẳng, suy ra S thuộc mp $(ABCD)$ (Vô lý). Đáp án A bị loại.

Giả sử MN cắt SC. Khi đó MN và SC đồng phẳng, suy ra C thuộc (SBD) (vô lý). Do đó đáp án C bị loại.

Giả sử SA cắt BC. Khi đó SA, BC đồng phẳng. Suy ra, S thuộc mp $(ABCD)$ (vô lý). Đáp án D bị loại. MN, SO cùng nằm trong mp(SBD), không song song và trùng nhau.

Câu 16. Đáp án A.

Do I là giao điểm của MN và BD nên I thuộc các mp chứa MN và các mp chứa BD. Do đó I thuộc $(BCD), (CMN), (ABD)$.

Giả sử I thuộc (ACD) khi đó B thuộc (ACD) (vô lý).

Câu 17. Đáp án A.

Giả sử MN, BC đồng phẳng. Do đó D, A lần lượt thuộc đường thẳng MC, NB nên D, A cũng thuộc mp đó. Như vậy A, B, C, D đồng phẳng(vô lý). Như vậy đáp án B, C, D không thỏa mãn.

Câu 18. Đáp án A.

Gọi I là giao điểm của MN và CD. Khi đó I thuộc (OMN). Vậy đáp án A đúng.

Giả sử (OMN) chứa đường thẳng AB. Khi đó O, B cùng thuộc mp(AMN). Suy ra O, B cùng thuộc mp(ACD) (vô lý). Đáp án B không thỏa mãn.

Giả sử (MNO) đi qua điểm A. Do D, C lần lượt thuộc các đường thẳng AN, AM nên D, C thuộc mp(AMN). Như vậy 2 mp $(OCD), (AMN)$ trùng nhau. Suy ra B thuộc mp(ACD) (vô lý). Vậy đáp án C bị loại.

Tương tự ta cũng dễ dàng suy ra đáp án D bị loại.

Câu 19. Đáp án B.

Giao tuyến của 2mp phân biệt là 1 đường thẳng, nên ba điểm phân biệt cùng thuộc 2 mp phân biệt sẽ nằm trên giao tuyến của 2mp phân biệt.

Câu 20. Đáp án B.

Hiển nhiên hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên nên đáp án A đúng.

Ta thấy giao tuyến của 2mp $(SAB),(ABCD)$ là AB , K là điểm thuộc cả hai mp do đó $K \in AB$. tương tự ta cũng chứng minh được $K \in CD$. Như vậy K thuộc cả hai đường thẳng AB, CD (vô lý do AB, CD song song). Do vậy đáp án B sai.

$O \in AC \Rightarrow O \in (SAC)$.

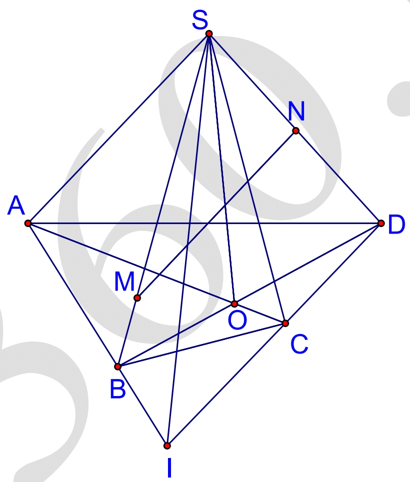
$O \in BD \Rightarrow O \in (SBD)$.

Do đó O thuộc giao tuyến của hai mp $(SAC),(SBD)$.

Tương tự ta cũng dễ thấy $SI = (SAD) \cap (SBC)$.

Như vậy đáp án C,D đúng.

Câu 21. Đáp án B.



Gọi $I = AB \cap CD$. Ta có:

$$\begin{cases} I \in AB, AB \subset (SAB) \Rightarrow I \in (SAB) \\ I \in CD, CD \subset (SCD) \Rightarrow I \in (SCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$$

Lại có $S \in (SAB) \cap (SCD)$.

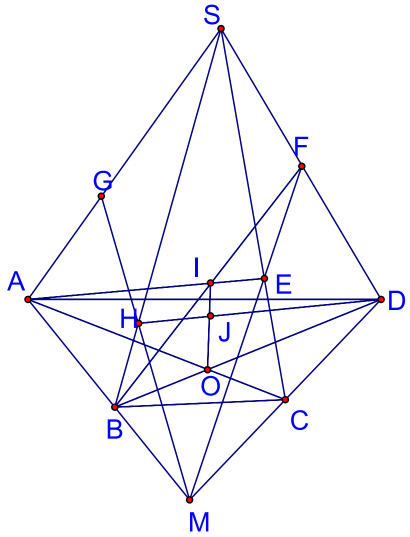
Do đó $SI = (SAB) \cap (SCD)$.

$\Rightarrow d \equiv SI$.

Vậy d cắt AB, CD, SO .

Giả sử d cắt MN . Khi đó M thuộc mp(SAB) . Suy ra D thuộc (SAB) (vô lý). Vậy d không cắt MN . Đáp án B sai.

Câu 22. Đáp án D.



Trong mp $(ABCD)$, gọi $M = AB \cap CD; O = AC \cap BD$. Khi đó M, O cố định.

Như vậy: E, F, M cùng nằm trên hai mp (P) và (SCD) , do đó ba điểm E, F, M thẳng hàng. Vậy đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định M .

Tương tự, ta có G, H, M cùng nằm trên hai mp (Q) và (SAB) ,do đó G, H, M thẳng hàng. Vậy các đường thẳng GH luôn đi qua một điểm cố định M .

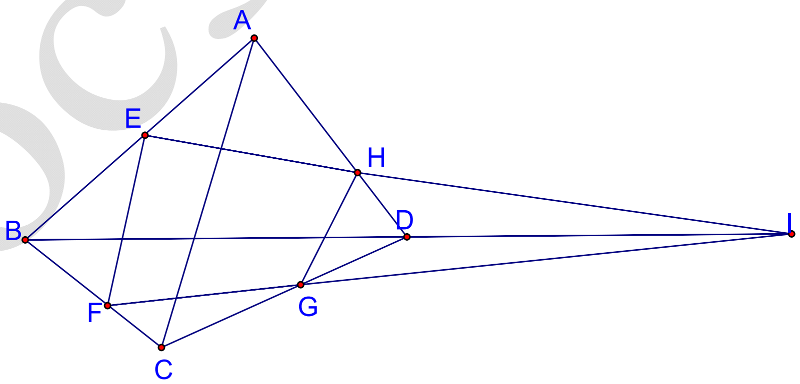
Do $\begin{cases} I \in AE \subset (SAC) \\ I \in BF \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD)$.

Tương tự ta cũng có $J \in (SAC) \cap (SBD); O \in (SAC) \cap (SBD)$

Do đó ba điểm I, J, O thẳng hàng. Vậy IJ luôn đi qua điểm cố định O .

Vậy ta chọn đáp án D.

Câu 23. Đáp án A.



Trong mp (BCD) , gọi $I = FG \cap BD$.

Trong mp (ADB) , gọi $H = IE \cap AD$.

Khi đó $HG = (EFG) \cap (ACD)$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác BCD với ba điểm I, G, F thẳng hàng ta có:

$\frac{ID}{IB} \cdot \frac{FB}{FC} \cdot \frac{GC}{GD} = 1 \Rightarrow \frac{ID}{IB} = \frac{1}{4}$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABD với ba điểm $I, \mathrm{H}, \mathrm{E}$ thẳng hàng ta có:

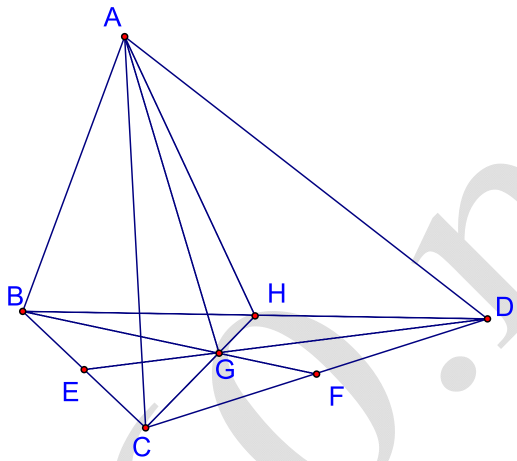
$$\frac{HD}{HA}.\frac{EA}{EB}.\frac{IB}{ID}=1 \Rightarrow \frac{HD}{HA}=\frac{1}{4} \Rightarrow HD=\frac{a}{5}$$

Áp dụng định lý cosin vào tam giác HDG ta có:

$$HG^2 = HD^2 + DG^2 - 2DH.DG.\cos 60^0$$

$$=\frac{a^2}{25}+\frac{a^2}{9}-\frac{a^2}{15}=\frac{19a^2}{225} \Rightarrow HG=\frac{\sqrt{19}}{15}a$$

Câu 24. Đáp án C.



Trong (BCD), gọi $H = CG \cap BD$.

Dễ thấy H thuộc đoạn BD nên $\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{HD}$ cùng hướng.

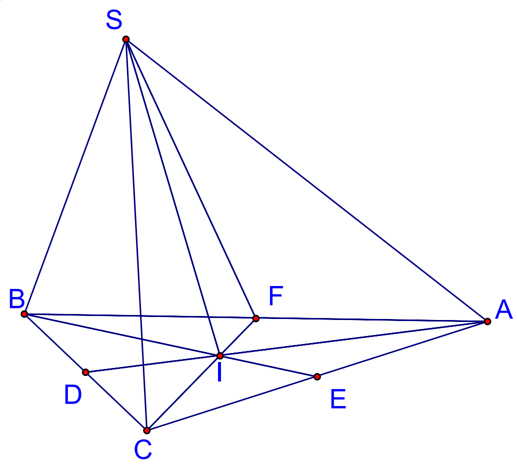
Do đó đáp án A, D bị loại.

Áp dụng định lý Ceva trong tam giác BCD với BF, DE, CH đồng quy ta có:

$$\frac{EB}{EC}.\frac{FC}{FD}.\frac{HD}{HB}=1 \Rightarrow 2.2.\frac{HD}{HB}=1 \Rightarrow \frac{HD}{HB}=\frac{1}{4} \Rightarrow BH=4DH$$

Do $\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{HD}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{BH} = 4\overrightarrow{HD}$.

Câu 25. Đáp án A.



Do I thuộc đoạn AD nên $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{ID}$ cùng hướng. Do đó B, D bị loại.

AD là phân giác trong của tam giác ABC nên theo tính chất đường phân giác ta có:

$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}\Rightarrow BD=\frac{ac}{b+c}$

Ta có: BI là phân giác trong của tam giác ABD nên theo tính chất đường phân giác ta có:

$\frac{IA}{ID}=\frac{BA}{BD}=\frac{b+c}{a}\Rightarrow IA=\frac{b+c}{a}ID$

Do đó: $\overrightarrow{AI}=\frac{b+c}{a}\overrightarrow{ID}$

Câu 26. Đáp án B.

Trong mp $(ABCD)$, gọi $I=MN\cap AO$. Dễ thấy $H=PO\cap SC$.

Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên I là trung điểm AO. Suy ra $\frac{AI}{AC}=\frac{1}{4}$ và PI là đường trung bình của tam giác OSA. Do đó $IH//SA$.

Áp dụng định lý Thales ta có: $\frac{SH}{SD}=\frac{AI}{AC}=\frac{1}{4}$.

Câu 27. Đáp án D.

Trong mp $(ABCD)$, gọi $I=BD\cap MN, O=AC\cap BD$.

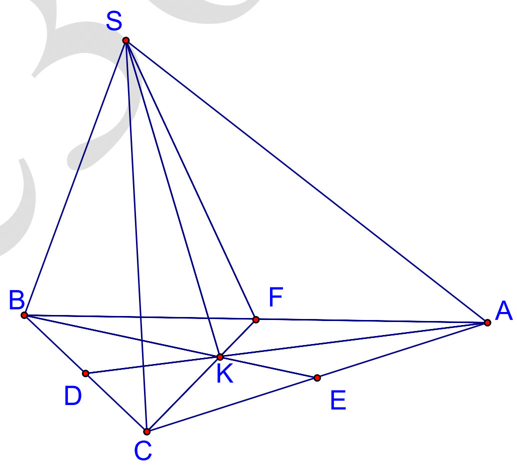
Dễ thấy $R=IP\cap SB$.

Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên I là trung điểm DO. Suy ra $\frac{DI}{IB}=\frac{1}{3}$.

Áp dụng định lý Menelaus vào taam giác SBD ta có :

$\frac{BR}{RS}.\frac{PS}{PD}.\frac{BI}{ID}=1\Rightarrow\frac{BR}{RS}.2.\frac{1}{3}=1\Rightarrow\frac{SR}{SB}=\frac{2}{3}$

Câu 28. Đáp án A.



Nếu K trùng với trọng tâm G thì $\frac{AK}{KD}+\frac{BK}{KE}+\frac{CK}{KF}=6$. Do đó C, D bị loại.

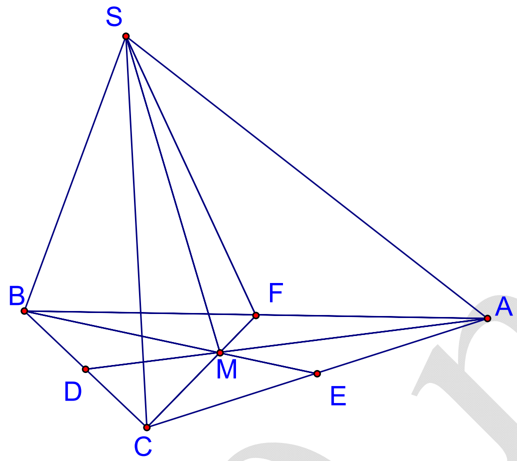
Ta có $\frac{DK}{DA}+\frac{EK}{EB}+\frac{FK}{FC}=\frac{S_{KBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{KAC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{KAB}}{S_{ABC}}=1$

Áp dụng định lý bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\left(\frac{DK}{DA}+\frac{EK}{EB}+\frac{FK}{FC}\right)\left(\frac{DA}{DK}+\frac{EB}{EK}+\frac{FC}{FK}\right)\geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{DA}{DK}+\frac{EB}{EK}+\frac{FC}{FK}\geq 9 \Rightarrow \frac{AK}{KD}+\frac{BK}{KE}+\frac{CK}{KF}\geq 6$$

Câu 29. Đáp án A.



Ta có : $\frac{BM}{ME}=\frac{S_{ABM}}{S_{AME}}=\frac{S_{CBM}}{S_{CME}}=\frac{S_{ABM}+S_{CBM}}{S_{AME}+S_{CME}}=\frac{S_{ABM}+S_{CBM}}{S_{AME}}=\frac{BD}{CD}+\frac{BF}{FA}$

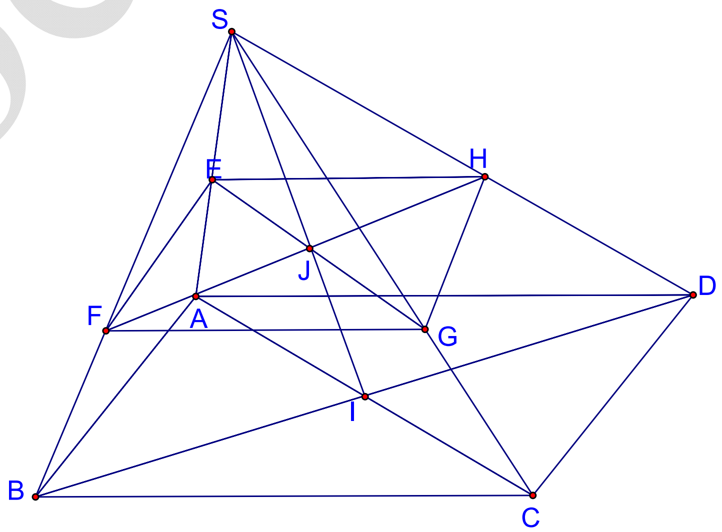
$\Rightarrow \frac{BF}{AF}=\frac{BM}{ME}-1=\frac{BM-ME}{ME}(1)$.

Tương tự ta cũng chứng minh được: $\frac{CM}{MF}=\frac{CE}{AE}+\frac{CD}{BD}\Rightarrow \frac{CE}{AE}=\frac{CM}{MF}-1=\frac{CM-MF}{MF}(2)$

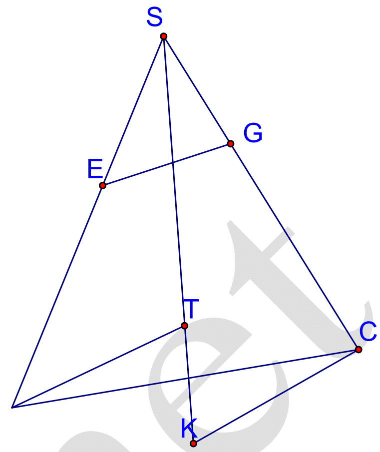
Và $1=\frac{AM}{MD}=\frac{AE}{CE}+\frac{AF}{BF}(3)$

Từ (1,2,3) suy ra $\frac{MF}{CM-MF}+\frac{ME}{BM-ME}=1$

Câu 30. Đáp án A.



Xét trường hợp đặc biệt E, F, G, H lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Khi đó ta dễ dàng loại được đáp án D.



Dựng $AT//EG(T \in SI), CK//EG(KESI)$

Theo định lý Thales, ta có:

$\frac{SA}{SE} = \frac{ST}{SJ}, \frac{SC}{SG} = \frac{SK}{SJ}; \frac{IT}{IK} = \frac{IA}{IC} = 1$

Suy ra: $\frac{SA}{SE} + \frac{SC}{SG} = \frac{ST + SK}{SJ} = \frac{SI - IT + SI + IK}{SJ} = 2\frac{SI}{SJ}$

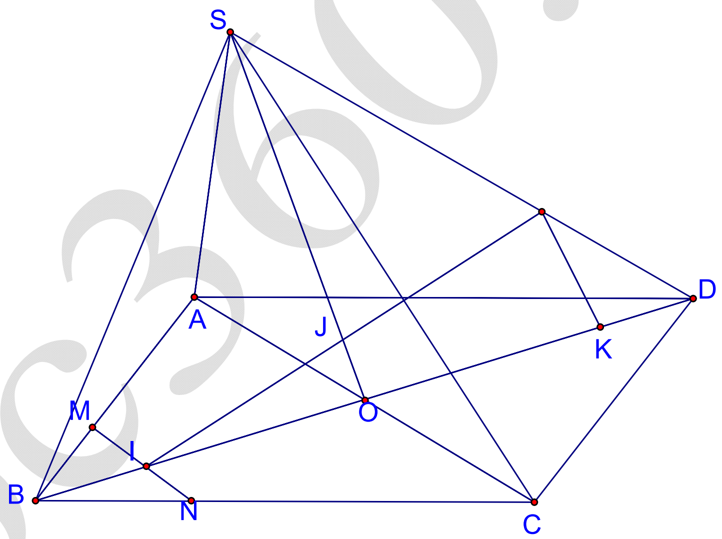
Như vậy, ý B bị loại.

Tương tự, ta chứng minh được $\frac{SB}{SF} + \frac{SD}{SH} = 2\frac{SI}{SJ}$.

Từ đây ta thấy ngay ý C bị loại và A là đáp án A là đáp án lựa chọn.

Chú ý: Cho tam giác ABC. Gọi O là trung điểm AC, M, N là hai điểm nằm trên cạnh AB, AC. MN cắt BO tại I. Khi đó: $\frac{BA}{BM} + \frac{BC}{BN} = \frac{2BO}{BI}$.

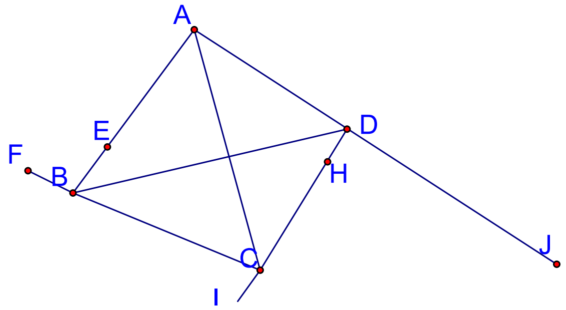
Câu 31. Đáp án A.



Theo chú ý câu 30 ta có: $\frac{BA}{BM} + \frac{BC}{BN} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4 \Rightarrow \frac{2BO}{BI} = 4 \Rightarrow \frac{BO}{BI} = 2 \Rightarrow \frac{OI}{BO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OI}{OD} = \frac{1}{2}$.

Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác SOD ta có: $\frac{IO}{ID}.\frac{PD}{PS}.\frac{JS}{JO} = 1 \Rightarrow \frac{JS}{JO} = 10 \Rightarrow \frac{SJ}{SO} = \frac{10}{11}$

Câu 32. Đáp án A.



Dựa vào nhận xét ví dụ 2, ta có:

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}.\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\frac{1}{5}.(-5).\frac{1}{2}=1$ nên E,F,H,J đồng phẳng.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}.\frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\frac{1}{5}.\left(\frac{1}{5}\right).\frac{1}{2}=\frac{1}{25}$ nên E,F,I,J không đồng phẳng.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}.\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\left(-\frac{1}{5}\right).(-5).\frac{1}{2}=-1$ nên E,G,H,J không đồng phẳng.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}.\frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\left(-\frac{1}{5}\right).\left(\frac{1}{5}\right).\frac{1}{2}=\frac{1}{25}$ nên E,G,I,J không đồng phẳng.

Câu 33. Đáp án D.

Dựa vào nhận xét ví dụ 2, ta có:

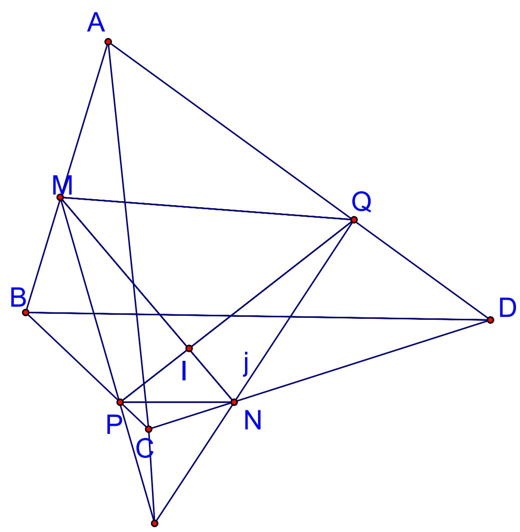
$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}.\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\frac{1}{5}.(-5).\frac{1}{2}=1$ nên E,F,H,J đồng phẳng.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}.\frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}.\frac{\overline{DK}}{\overline{AK}}=-2.\left(-\frac{1}{2}\right).(5).\frac{1}{5}=1$ nên E,G,I,K đồng phẳng.

$\frac{\overline{AU}}{\overline{BU}}.\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}.\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=\frac{4}{5}.\left(-\frac{1}{2}\right).(-5).\frac{1}{2}=1$ nên U,G,H,J đồng phẳng.

$\frac{\overline{AU}}{\overline{BU}}.\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}.\frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}.\frac{\overline{DK}}{\overline{AK}}=\frac{4}{5}.\left(\frac{1}{5}\right).(5).\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$ nên $\text{U},\text{F},\text{I},\text{K}$ không đồng phẳng. Do đó 4 điểm này lập nên 1 tứ diện.

Câu 34. Đáp án B, A.



a)Do tứ diện ABCD có 4 mặt nên thiết diện không thể là ngũ giác hay lục giác. Nó chỉ có thể là tam giác hoặc tứ giác.

Trong mp (ABC), gọi $K = MP \cap AC$ (P không phải là trung điểm đoạn BC nên MP cắt AC)

Trong mp (ACD), gọi $Q = KN \cap AD$

Do $Q \in KN \subset (MNP)$ nên $Q = (MNP) \cap AD$

Ta có: $\begin{cases} (MNP) \cap (ABD) = MQ \\ (MNP) \cap (ABC) = MP \\ (MNP) \cap (BCD) = PN \\ (MNP) \cap (ACD) = NQ \end{cases}$

Suy ra thiết diện cần tìm là tứ giác $MPNQ$.

Ta chọn đáp án B.

b)Áp dụng ví dụ 11, do M, N, P, Q đồng phẳng nên $\frac{AM}{BM}.\frac{BP}{CP}.\frac{CN}{DN}.\frac{DQ}{AQ} = 1 \Rightarrow \frac{BP}{CP}.\frac{DQ}{AQ} = 1$

(Do M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD) . Từ đây suy ra $\frac{BP}{CP} = \frac{AQ}{DQ}$.

Giả sử $\frac{BP}{PC} = k$. Khi đó ta suy ra $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{QD}$

Suy ra $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AQ} = -k\left(\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{QD}\right)(1)$

Do J là trung điểm của PQ.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PJ} \\ \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QJ} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BP}(2)$

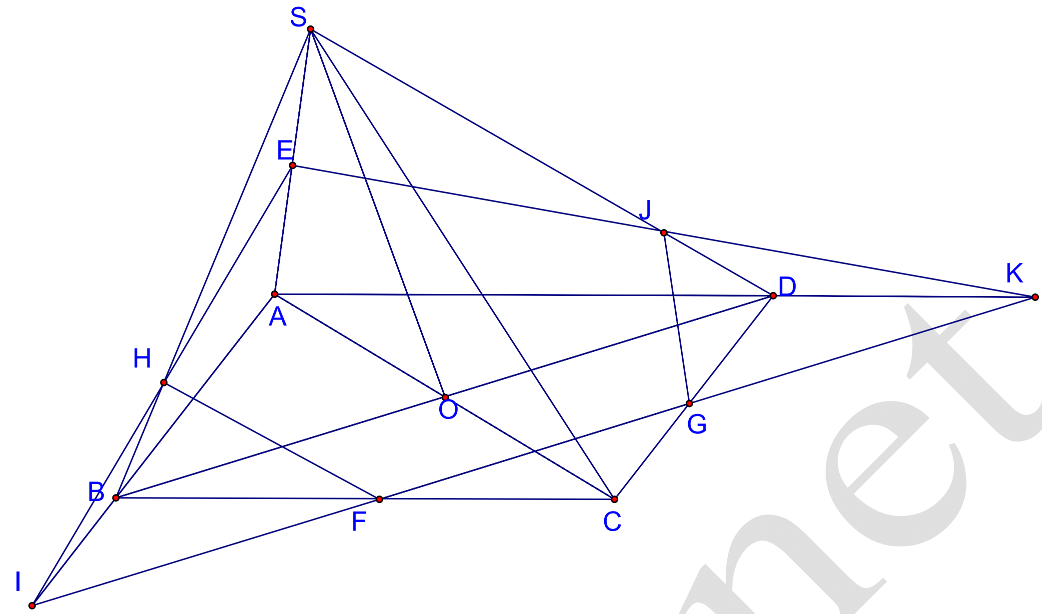
Chứng minh tương tự ta cũng có: $2\overrightarrow{NJ} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{DQ}(3)$

Từ (1,2,3) suy ra $\overrightarrow{MJ} = -k\overrightarrow{NJ}$. Điều này dẫn đến M, N, J thẳng hàng. Như vậy I trùng J.

Điều này suy ra $S_{MNPQ} = 2S_{MPN}$.

Chọn đáp án A.

Câu 35. Đáp án C.



Trong mp$(ABCD)$, gọi $I = FG \cap AB; K = FG \cap AD$

Trong mp(SAB) , gọi $H = IE \cap SB$

Trong mp(SAD) , gọi $J = EK \cap SD$.

$(EFG) \cap (ABCD) = FG,$

$(EFG) \cap (SCD) = GJ$

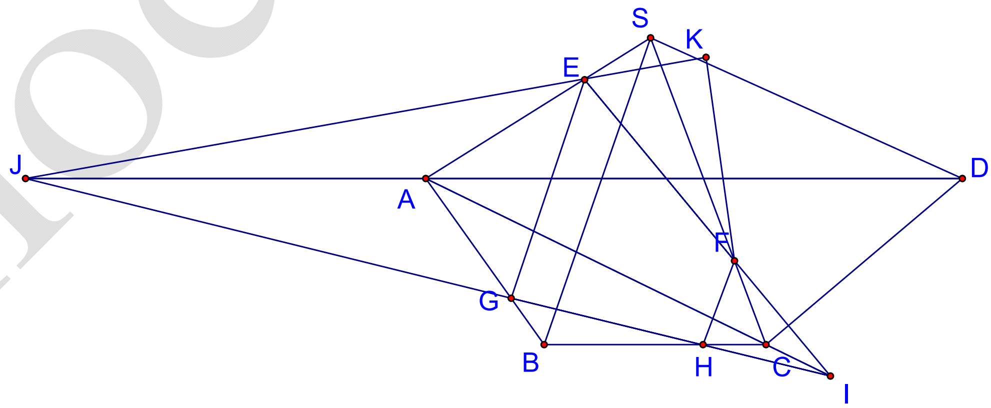
Ta có: $(EFG) \cap (SAD) = JE$

$(EFG) \cap (SAB) = HE$

$(EFG) \cap (SBC) = HF$

Do đó ngũ giác EHFGJ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG)

Câu 36. Đáp án C.



Trong mp(SAC) , Gọi $I = EF \cap AC$

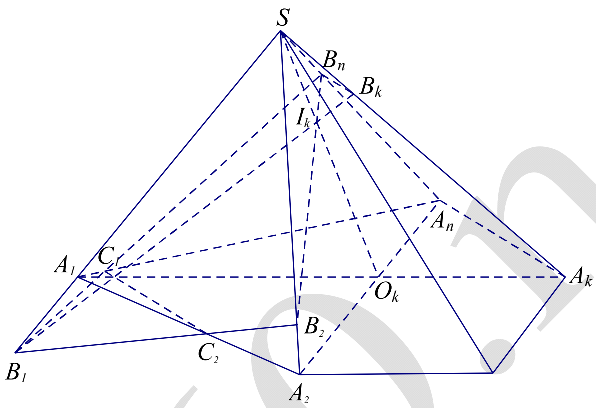
Trong mp$(ABCD)$, Gọi $H = IG \cap BC, J = IG \cap AB$

Trong mp(SAD) , Gọi $K = JE \cap SD$

Khi đó ta có: $\begin{cases} (EFG)\cap(ABCD)=GH, \\ (EFG)\cap(SCD)=KF \\ (EFG)\cap(SAD)=EK \\ (EFG)\cap(SAB)=GE \\ (EFG)\cap(SBC)=HF \end{cases}$

Do đó ngũ giác EKFHG là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG)

Câu 37. Đáp án D.



Trong mặt phẳng (SA_1A_2) gọi C_2 là giao điểm của B_1B_2 với A_1A_2.

Trong mặt phẳng (SA_1A_n) gọi C_n là giao điểm của B_1B_n với A_1A_n.

Trong mặt phẳng $(A_1A_2...A_n)$ gọi O_k $(k=3,4,...,n-1)$ là giao điểm của A_1A_k với A_2A_n.

Trong mặt phẳng (SA_2A_n), gọi I_k $(k=3,4,...,n-1)$ là giao điểm của SO_k với B_2B_n.

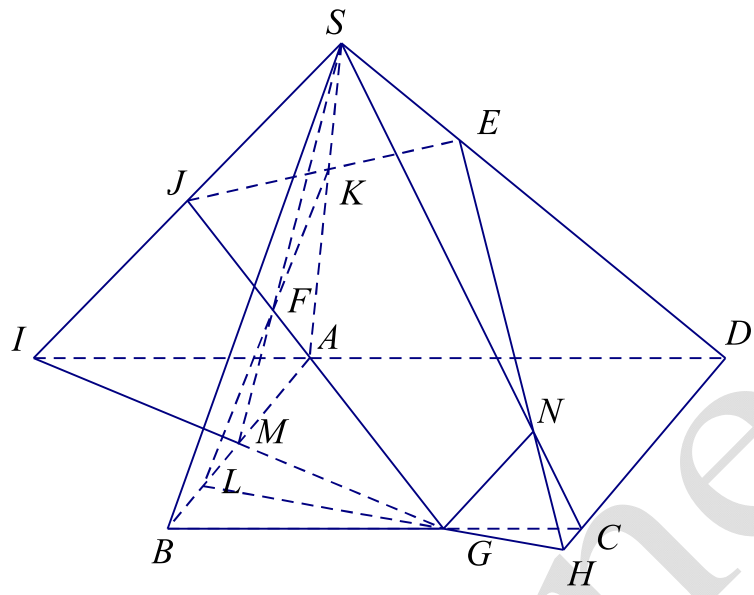
Trong mặt phẳng (SA_1A_k), gọi B_k $(k=3,4,...,n-1)$ là giao điểm của SA_k với B_1I_k.

Do $B_k \in B_1I_k \subset (B_1B_2B_n)$ nên B_k là giao điểm của SA_k $(k=3,4,...,n-1)$ với mặt phẳng $(B_1B_2B_n)$
.

Vậy thiết diện của hình chóp cắt bởi $(B_1B_2B_n)$ là đa giác $C_2B_2...B_nC_n$.

Câu 38. Đáp án C.

Cách 1:



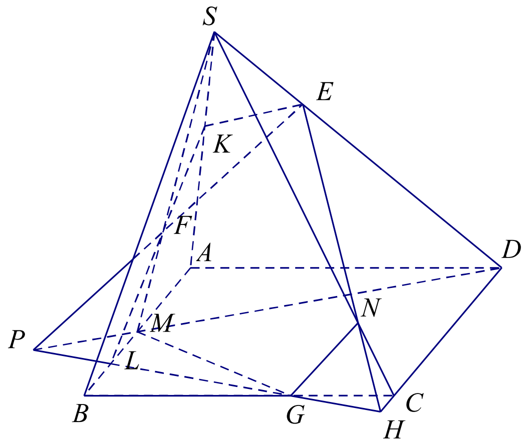
Gọi M là trung điểm của AB, khi đó S, F, M thẳng hàng.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi I là giao điểm của MG với AD. Khi đó $SI = (SMG) \cap (SAD)$.
Trong mặt phẳng (SMG), gọi J là giao điểm của FG với SI. Ta thấy J thuộc FG nên J thuộc (EFG). Trong (SAD), gọi K là giao điểm của JE với SA. Trong mặt phẳng (SAB), gọi L là giao điểm của KF với AB.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi H là giao điểm của LG với CD. Trong mặt phẳng (SCD), gọi N là giao điểm của EH với SC.

Ta có: $\begin{cases} (EFG) \cap (ABCD) = LG; (EFG) \cap (SBC) = GN \\ (EFG) \cap (SCD) = NE; (EFG) \cap (SAD) = EK \\ (EFG) \cap (SAB) = KL \end{cases}$.

Vậy ngũ giác $LGNEK$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Chú ý: Mấu chốt của ví dụ trên là việc dựng được điểm J là giao điểm của FG với (SAD) (thông qua việc dựng giao tuyến SI của mặt phẳng (SFG) với mặt phẳng (SAD)). Có thể dựng thiết diện trên bằng nhiều cách với việc dựng giao điểm (khác E, F, G) của một trong các đường thẳng EF, FG; hoặc GE với một mặt của hình chóp. Sau đây, tôi xin trình bày cách hai, điểm mấu chốt là xác định giao điểm của EF với mặt phẳng $(ABCD)$.

Cách 2:



Trong mặt phẳng (SMD), gọi P là giao điểm của EF với MD.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi H, L là giao điểm của P, G với CD, AB.

Trong mặt phẳng (SAB), gọi K là giao điểm của LF với SA.

Trong mặt phẳng (SCD), gọi N là giao điểm của EH với SC.

Ta có: $\begin{cases} (EFG)\cap(ABCD)=LG;(EFG)\cap(SBC)=GN \\ (EFG)\cap(SCD)=NE;(EFG)\cap(SAD)=EK \\ (EFG)\cap(SAB)=KL \end{cases}$.

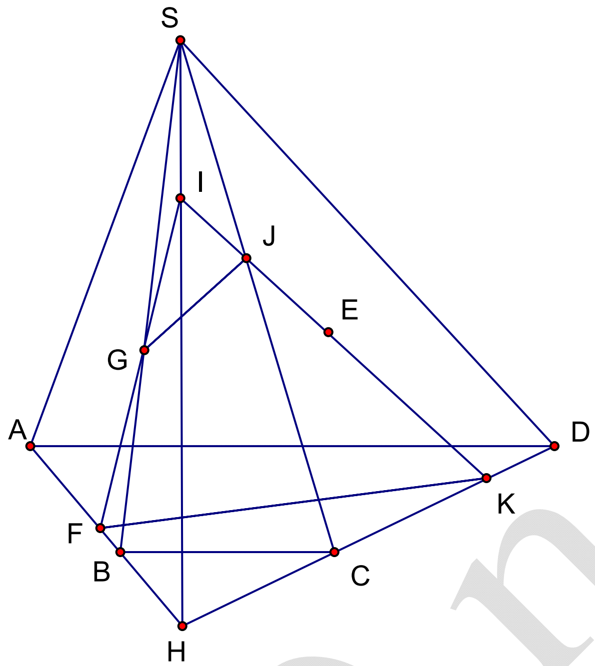
Vậy ngũ giác $LGNEK$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Câu 39. Đáp án B.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi H là giao điểm của AB và CD. Trong mặt phẳng (SAB), gọi I là giao điểm của FG và SH.

Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1:



Trong mặt phẳng (SCD), IE cắt SC tại J và cắt đoạn CD tại K.

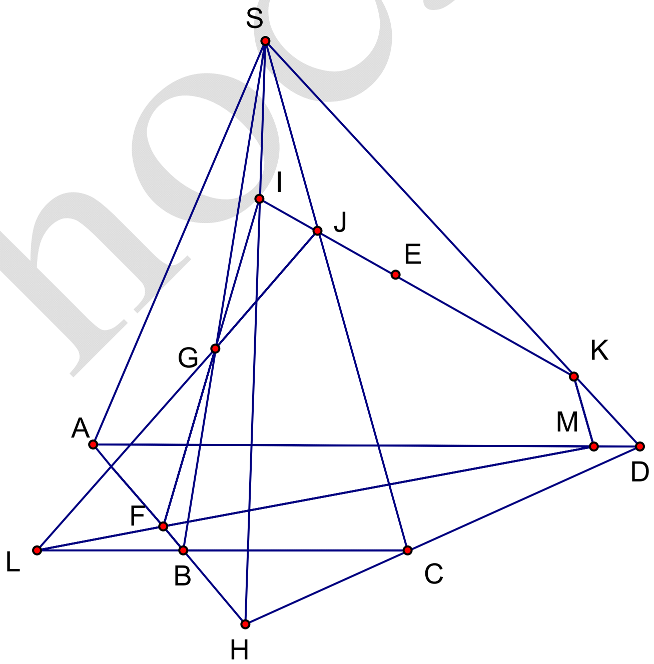
Ta có $J \in IE \subset (EFG)$ nên J là giao điểm của (EFG) với SC,

$K \in IE \subset (EFG)$ nên K là giao điểm của (EFG) với CD.

Ta có $\begin{cases} (EFG) \cap (ABCD) = FK; (EFG) \cap (SAB) = FG \\ (EFG) \cap (SBC) = GJ; \ (EFG) \cap (SCD) = JK \end{cases}$

Suy ra tứ giác $KFGJ$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Trường hợp 2:



Trong mặt phẳng (SCD) , IE cắt SC tại J và cắt đoạn SD tại K (cắt CD tại một điểm nằm ngoài đoạn CD).

Trong mặt phẳng (SBC) :

Nếu GJ song song với BC thì ta có: $\frac{BG}{GS}=\frac{CJ}{JS}$. Gọi T là giao điểm của IE với CD .

Áp dụng định lí Menelaus vào các tam giác SBH và SCH ta có

$\frac{FB}{FH}.\frac{IH}{IS}.\frac{GS}{GB}=1=\frac{TC}{TH}.\frac{IH}{IS}.\frac{JS}{JC}\Rightarrow\frac{FB}{FH}=\frac{TC}{TH}$. Điều này chỉ xảy ra khi T thuộc đoạn CD (vô lí)

Do vậy GJ cắt BC , giả sử tại L.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi M là giao điểm của LF với AD .

Ta có $\begin{cases}(EFG)\cap(ABCD)=FM;\,(EFG)\cap(SAB)=FG\\(EFG)\cap(SBC)=GJ;\ (EFG)\cap(SCD)=JK\\(EFG)\cap(SAD)=KM\end{cases}$

Suy ra ngũ giác $KJGFM$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG) .

Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (EFG) hoặc là tứ giác hoặc là ngũ giác.

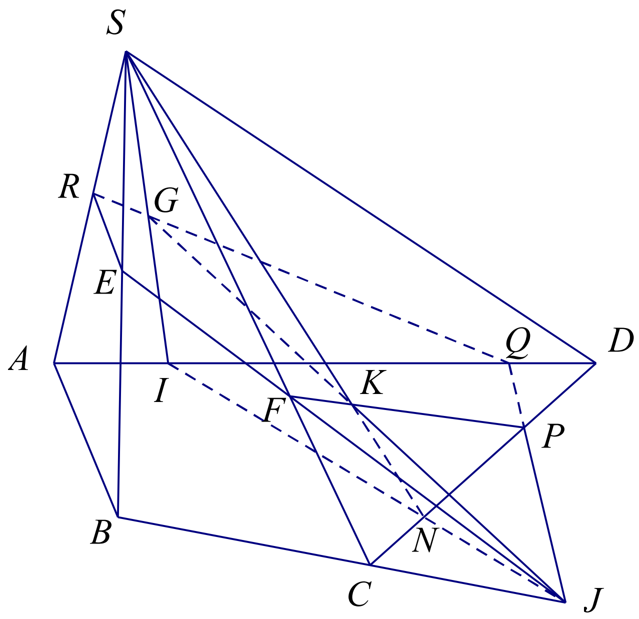
Câu 40. Đáp án B.

Trong mặt phẳng (SBC) , gọi J là giao điểm của EF với BC . Trong mặt phẳng (SAD) , gọi I là giao điểm của SG với AD . Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi N là giao điểm của IJ với CD .

Trong mặt phẳng (SIJ) , gọi K là giáo điểm của JG với SN .

Trong mặt phẳng (SCD) , có hai khả năng xảy ra như sau:

Trường hợp 1: FK cắt đoạn CD tại P .

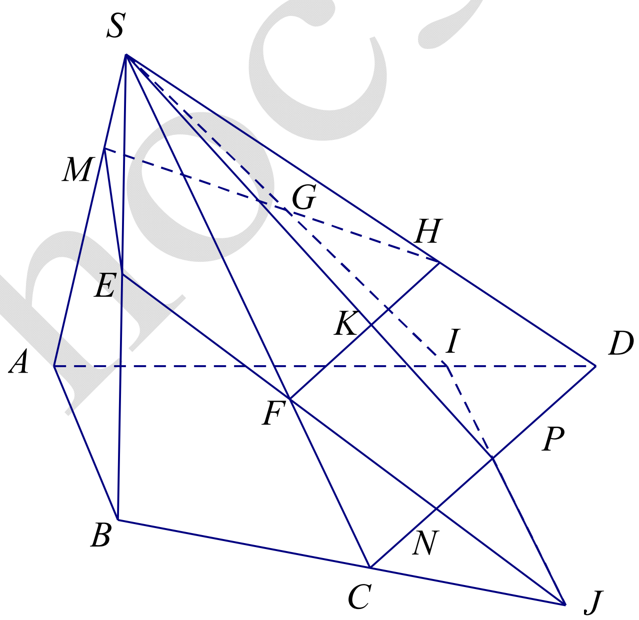


Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi Q là giao điểm của JP với AD. Trong mặt phẳng (SAD), gọi R là giao điểm của QG với SA.

Ta có $\begin{cases} (EFG)\cap(ABCD)=PQ;\ (EFG)\cap(SAD)=QR \\ (EFG)\cap(SAB)=RE;\ (EFG)\cap(SBC)=EF \\ (EFG)\cap(SCD)=FP \end{cases}$

Trường hợp này, ngũ giác $REFPQ$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (EFG).

Trường hợp 2: FK cắt SD tại H (FK không cắt đoạn CD).



Trong mặt phẳng (SAD), gọi M là giao điểm của HG với SA (HG không thể cắt đoạn AD vì giả sử ngược lại HG cắt cạnh AD tại O, khi đó JO sẽ cắt cạnh CD (vô lí vì (EFG) đã cắt cạnh SC,SD)).

Khi đó $\begin{cases}(EFG)\cap(SCD)=FH;\ (EFG)\cap(SAD)=MH\\(EFG)\cap(SAB)=ME;\ (EFG)\cap(SBC)=EF\end{cases}$

Trường hợp này, tứ giác $MEFH$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Câu 41. Đáp án A.

Trong mặt phẳng (BCD), gọi I là giao điểm của NP với CD.

Trong mặt phẳng (ACD), gọi Q là giao điểm của AD và MI. Suy ra Q là giao điểm của AD với (MNP). Khi đó, tứ giác $MNPQ$ là thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Trong tam giác BCI ta có P là trọng tâm của tam giác suy ra D là trung điểm của CI.

Trong tam giác ACI có Q là trọng tâm của tam giác nên $\frac{QA}{QD}=2$.

Ta có $\frac{IP}{IN}=\frac{IQ}{IM}=\frac{2}{3}\Rightarrow PQ//MN$.

Suy ra $MNPQ$ là hình thang với đáy lớn MN.

Ta có: $AQ=4a, AM=3a=MN, PQ=2a.$ Áp dụng định lí cosin trong tam giác MAQ ta có:

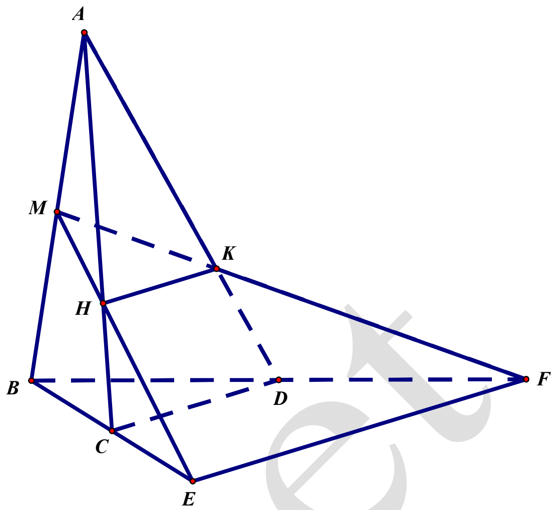
$MQ^2=AM^2+AQ^2-2AM.AQ.\cos 60^0=16a^2+9a^2-12a^2=13a^2\Rightarrow MQ=a\sqrt{13}$.

Tương tự ta cũng tính được $NP=a\sqrt{13}$.

Dễ thấy $MNPQ$ là hình thang cân. Do đó:

$$S=\frac{(MN+PQ)\sqrt{MQ^2-\left(\frac{MN-PQ}{2}\right)^2}}{2}=\frac{5a^2\sqrt{51}}{4}.$$

Câu 42. Đáp án C.



Trong mặt phẳng (ABC), gọi H là giao điểm của ME với AC.
Trong mặt phẳng (ABD), gọi K là giao điểm của MF và AD.

Ta có: $\begin{cases}(MEF)\cap(ABC)=MH\\(MEF)\cap(ABD)=MK\\(MEF)\cap(ACD)=HK\end{cases}$.

Do đó tam giác MHK là thiết diện của tứ diện cắt bởi (MEF).

Dễ thấy H,K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABE và ABF.

Ta có: $AH=AK=HK=\frac{2a}{3}$.

Xét hai tam giác AMH và AMK có AM chung, $\widehat{MAH}=\widehat{MAK}=60^0, AH=AK=\frac{2a}{3}$ nên hai tam giác này bằng nhau. Suy ra $MH=MK$. Vậy tam giác MHK cân tại M.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác AMH:

$$MH^2=AM^2+AH^2-2AMAH.\cos 60^0=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{2a}{3}\right)^2-\frac{a^2}{3}=\frac{13a^2}{36}\Rightarrow MH=\frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

Gọi I là trung điểm của đoạn HK. Ta có $MI\perp HK$.

Suy ra: $MI^2=MH^2-HI^2=\frac{13a^2}{36}-\frac{a^2}{9}=\frac{a^2}{4}\Rightarrow MI=\frac{a}{2}$.

Diện tích thiết diện MHK là: $S=\frac{1}{2}MI.HK=\frac{1}{2}.\frac{2a}{3}.\frac{a}{2}=\frac{a^2}{6}$.

Câu 43. Đáp án C.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi E là giao điểm của MN với DC và F là trung điểm của CD.Dễ thấy Q chính là giao điểm của PE với SD.

Ta có: $ME=BC$. Áp dụng Thales ta có: $\frac{ND}{MF}=\frac{ED}{EF}=\frac{1}{2}\Rightarrow EF=\frac{1}{2}EF$.

Suy ra D là trung điểm EF.

PQ là đường trung bình của tam giác EPF ta có: $\frac{DQ}{PF}=\frac{1}{2}$.

PF là đường trung bình của tam giác CSD ta có: $\frac{DS}{PF}=2$.

Từ đó suy ra: $\frac{SD}{DQ}=4\Rightarrow\frac{SQ}{SD}=\frac{3}{4}$.

Câu 44. Đáp án B.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi I là giao điểm của MN với AO.

Dễ thấy H chính là giao điểm của PO với SC.

Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên I là trung điểm AO. Suy ra $\frac{AI}{AC}=\frac{1}{4}$ và PI là đường trung bình của tam giác OSA. Do đó: $IH//SA$.

Áp dụng định lí Thales ta có: $\frac{SH}{SD}=\frac{AI}{AC}=\frac{1}{4}$.

Câu 45. Đáp án D.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $I=BD\cap MN, O=AC\cap BD$.

Dễ thấy R chính là giao điểm của IP với SB.

Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên I là trung điểm DO. Suy ra $\frac{DI}{IB}=\frac{1}{3}$.

Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác SBD ta có:

$$\frac{BR}{RS}.\frac{PS}{PD}.\frac{BI}{ID}=1\Rightarrow\frac{BR}{RS}.2.\frac{1}{3}=1\Rightarrow\frac{BR}{RS}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{SR}{SB}=\frac{2}{5}$$

ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG

A. LÝ THUYẾT

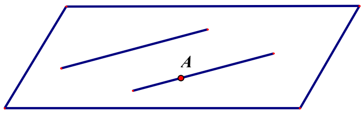
1. Định nghĩa

Trong phần vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian, ta biết rằng hai đường thẳng phân biệt bất kì hoặc chéo nhau hoặc song song hoặc cắt nhau. Nếu hai đường thẳng phân biệt đồng phẳng và không cắt nhau thì ta nói hai đường thẳng đó song song với nhau.

Định nghĩa:

Hai đường thẳng phân biệt a,b trong không gian được gọi là song song với nhau, kí hiệu $a//b$ nếu chúng đồng phẳng và không cắt nhau.

2. Tính chất



Định lí 1: Trong không gian cho đường thẳng d và điểm A nằm ngoài d. Lúc đó tồn tại duy nhất một đường thẳng a và A và song song với đường thẳng d.

Chú ý:

Định lí này cho ta thêm một cách xác định đường thẳng trong không gian: đó là đường thẳng đi qua một điểm và song song với một đường thẳng cho trước không chứa điểm đó. Kết hợp với định lí 2 dưới đây cho ta một cách để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.

Định lí 2 (Về giao tuyến của ba mặt phẳng):

Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

Hệ quả:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

Đến đây ta có thể bổ sung một phương pháp tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

> ***Bước 1:*** Chỉ ra hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ lần lượt chứa hai đường thẳng song song a,b.
>
> ***Bước 2:*** Tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng
>
> ***Bước 3:*** Khi đó $(\alpha)\cap(\beta)=Mx//a//b$

Định lí 3:

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Như vậy, cho hai đường thẳng phân biệt thỏa mãn $\begin{cases} a//b \\ b//c \end{cases} \Rightarrow a//b$

3. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

a) Định nghĩa

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không là góc giữa hai đường thẳng a'và b'cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.

b. Phương pháp tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Bước 1: Dựng góc

- Tìm trên hình vẽ xem góc giữa hai đường thẳng có sẵn không?

- Nếu không có sẵn thì ta tiến hành:
+ Chọn một điểm O bất kì trong không gian.
+ Qua O dựng đường thẳng $a' \parallel a,\ \ b' \parallel b$. Góc nhọn hay góc vuông tọc bởi a', b' chính là góc giữa a và b.
Lưu ý:
+ Ta thường lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng a và b.
+ Chọn O sao cho góc giữa a', b' là góc của một tam giác mà độ dài các cạnh của nó đã biết hoặc có thể tính dễ dàng
Bước 2: Tính góc
Dùng hệ thức lượng trong tam giác, tỉ số lượng giác hay định lí cosin, sin. Trường hợp góc giữa hai đường thẳng a và b bằng 90^0 ta nói $a \perp b$.

B. DẠNG TOÁN VỀ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG

DẠNG 1. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

Phương pháp chung: Để chứng minh hai đường thẳng song song trong không gian ta sẽ sử dụng một trong các sách sau:
+ Cách 1: Chứng minh hai đường thẳng đồng phẳng, sau đó áp dụng các phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng như tính chất đường trung bình, định lí Thales đảo, tính chất song song của hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3...
+ Cách 2: Sử dụng tính chất bắc cầu: Chứng minh hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba.
+ Cách 3: Áp dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD. Đường thẳng IJ song song với đường thẳng:

A. CM trong đó M là trung điểm BD. **B.** AC.
C. DB. **D.** CD.

Lời giải:

Đáp án D.

Cách 1: (Đưa về cùng mặt phẳng và vận dụng kiến thức hình học phẳng)
Gọi E là trung điểm của AB. Ta có $\begin{cases} I \in CE \\ J \in DE \end{cases}$ nên suy ra IJ và CD đồng phẳng.
Do I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD nên ta có: $\frac{EI}{EC} = \frac{EJ}{ED} = \frac{1}{3}$. Suy ra $IJ \parallel CD$.

Cách 2: (Sử dụng tính chất bắc cầu)
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD và BC. Suy ra $MN \parallel CD$ (1).
Do I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD nên ta có: $\frac{AI}{AN} = \frac{AJ}{AM} = \frac{2}{3}$. Suy ra $IJ \parallel MN$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $IJ \parallel CD$.
Cách 3: (Sử dụng định lí giao tuyến của 3 mặt phẳng).
Có lẽ trong ví dụ này cách này hơi dài, song chúng tôi vẫn sẽ trình bày ở đây, để các bạn có thể hiểu và vận dụng cách 3 hợp lí trong các ví dụ khác.
Dễ thấy, bốn điểm D, C, I, J đồng phẳng.

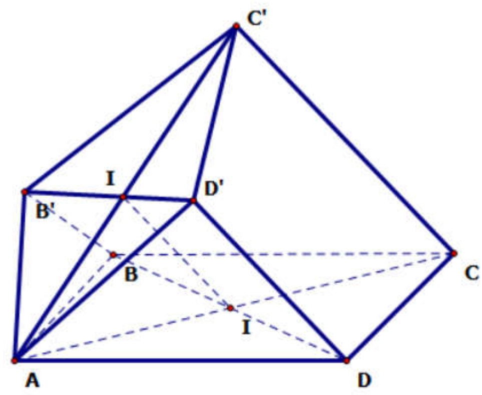
Ta có: $\begin{cases}(DCIJ)\cap(AMN)=IJ\\(DCIJ)\cap(BCD)=CD\\(AMN)\cap(BCD)=MN\\MN\parallel CD\end{cases}\Rightarrow IJ\parallel CD\parallel MN$.

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi Bx, Cy, Dz là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua B, C, D và nằm về một phía của mặt phẳng $(ABCD)$, đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng đi qua A và cắt Bx, Cy, Dz lần lượt tại B', C', D' với $BB'=2$, $DD'=4$. Khi đó CC' bằng:

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải:

Đáp án D.



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. I là trung điểm của $B'D'$.

Do Bx, Dz song song với nhau nên $BDD'B'$ là hình thang và OI là đường trung bình của hình thang đó.

Suy ra $IO=\dfrac{BB'+DD'}{2}=3$.

Mặt khác OI song song với CC' (vì cùng song song với DD') nên có bốn điểm C, C', O, I đồng phẳng.

Giao tuyến của hai mặt phẳng $(AB'D')$ với (ACC') là AC'. Lại có I thuộc $(AB'D')$, I thuộc (ACC').

Do đó A, I, C' thẳng hàng. Từ đây dễ dàng suy ra, I là trung điểm đoạn AC'. Do vậy, $CC'=2OI=6$.

Nhận xét: Ta có bài toán tổng quát cho bài toán này như sau:

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi At, Bx, Cy, Dz là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua A, B, C, D đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng cắt At, Bx, Cy, Dz lần lượt tại A', B', C', D'. Khi đó $A'B'C'D'$ là hình bình hành và $AA'+CC'=BB'+DD'$.

Do đó khi biết 3 trong 4 đối tượng AA', BB', CC', DD' ta sẽ dễ dàng tính được đối tượng còn lại.

Ví dụ 3. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi At, Bx, Cy, Dz là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua A, B, C, D và nằm về một phía của mặt phẳng $(ABCD)$, đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng (α) di động cắt At, Bx, Cy, Dz lần lượt tại A', B', C', D' sao cho $AA'+CC'+BB'+DD'=a$ (O có độ dài cho trước). Mặt phẳng (α) luôn đi qua điểm cố định I. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI=\dfrac{a}{2}$.

B. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI=\dfrac{a}{4}$.

C. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI=\dfrac{3a}{2}$.

D. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI = a$.

Lời giải:

Đáp án B.

Theo ví dụ 2, ta có : $AA'+CC'=2OI=BB'+AA'+CC'+BB'+DD'=a$ nên $OI=\frac{a}{4}$.

Bài tập tương tự: Cho tam giác ABC. Ở về một phía của (ABC), người ta kẻ các đường thẳng song song Ax, By, Cz. lần lượt lấy trên Ax, By, Cz các điểm A', B', C'.

a) M và M' lần lượt là trung điểm $AB, A'B'$. Chứng minh rằng MM' song song với CC'.

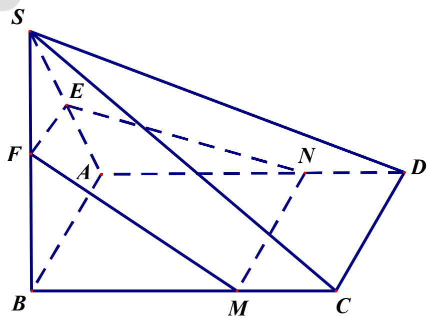
b) G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng GG' song song với CC'.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm M, N thứ tự thuộc các đoạn BC và SD sao cho $\frac{MB}{MC}=\frac{NS}{ND}=\frac{1}{2}$. Gọi I là giao điểm của MD và AB.

a) Chứng minh rằng $MN//SI$.

b) Qua M kẻ $MN//CD$ (P là điểm trên BD). Chứng minh rằng $MP//SB$.

Lời giải:



a) Ta có $BI//CD \Rightarrow \frac{IM}{MD}=\frac{MB}{MC}=\frac{1}{2}$

Trong tam giác SDI có $\frac{SN}{ND}=\frac{IM}{MD}\left(=\frac{1}{2}\right) \Rightarrow MN//SI$.

b) Ta có $MP//AB \Rightarrow \frac{BP}{PD}=\frac{MB}{MC}=\frac{1}{2}$

Trong tam giác SBD có $\frac{BP}{PD}=\frac{SN}{ND}=\frac{1}{2} \Rightarrow NP//SB$.

DẠNG 2. TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG (cách 2). THIẾT DIỆN QUA MỘT ĐƯỜNG THẲNG VÀ SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC.

- *Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (cách 2)*

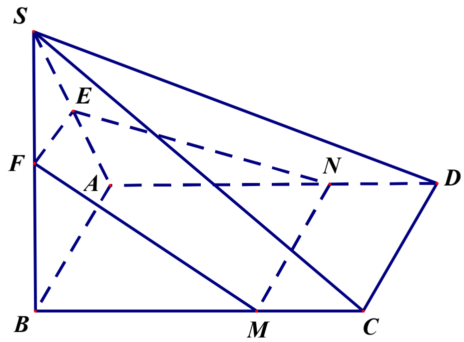
Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng a và b song song, ta tìm:
+ Một điểm chung của hai mặt phẳng đó.
+ Giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng qua điểm chung và song song với a và b (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $SA=SB=a, SC=SD=a\sqrt{3}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SB. M là điểm tùy ý trên cạnh BC (không trùng với B, C)

a) Xác định giao tuyến của các mặt phẳng (SAB) và (SCD);(SAD) và (SBC).

b) Xác định giao tuyến của các mặt phẳng (MEF) và $(ABCD)$. Từ đó suy ra giao điểm N của AD và (MEF). Chứng minh rằng $MNEF$ là hình thang cân.

Lời giải:



a) *Ta có* $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB//CD, AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx//AB//CD.$

Tương tự $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SBC) \\ AD//BC, AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sy//AD//BC.$

b) *Do* E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB nên EF là đường trung bình của tam giác SAB. Do đó $EF//AB, EF/ = \frac{1}{2}AB$ (1)

Ta có $\begin{cases} EF//AB, EF \subset (MEF), AB \subset (ABCD) \\ M \in (MEF) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (MEF) \cap (ABCD) = Mt//AB//CD$ (2)

Gọi N là giao điểm của Mt với AD. Ta có:
$\begin{cases} N \in Mt, Mt \subset (MEF), AB \subset (ABCD) \\ M \in AD \end{cases} \Rightarrow \{N\} = AD \cap (MEF).$

Từ (1) và (2) suy ra $EF//MN, EF = \frac{1}{2}AB < MN$. Suy ra $MNEF$ là hình thang.

Dễ thấy $\Delta SAD = \Delta SBC(c.c.c) \Rightarrow \widehat{SAD} = \widehat{SBC} \Rightarrow \Delta EAN = \Delta FBM\,(c.g.c) \Rightarrow FM = EN$ vậy $MNEF$ là hình thang cân.

Thiết diện qua một đường thẳng và song song với một đường thẳng cho trước
Được xác định bằng cách phối hợp hai cách xác định giao tuyến đã biết:
Cách 1: Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng.
Cách 2: Tìm một điểm chung và phương (song song với một đường thẳng cho trước) của giao tuyến.

Ví dụ 2. *Cho tứ diện* $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC, Gọi E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

A. Tam giác MNE.

B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD.

C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD mà $EF//BC$.

D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD và $EF//BC$.

Lời giải:

Trong mặt phẳng (BCD), Gọi F là giao điểm của đường thẳng qua E, song song BC với BD.

Ta có $\begin{cases}(MNE)\cap(ABC)=MN;(MNE)\cap(BCD)=EF\\(MNE)\cap(ABD)=MF;(MNE)\cap(ACD)=NE\end{cases}$

Vậy tứ giác $MNEF$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNE).

Lại có $\begin{cases}(MNE)\cap(ABC)=MN\\(MNE)\cap(BCD)=EF\\(MCD)\cap(ABC)=BC\\BC//MN\end{cases}\Rightarrow EF//MN.$

Suy ra tứ giác $MNEF$ là hình thang $(EF>MN)$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA. Thiết diện của mặt phẳng (MCD) với hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A. Tam giác. **B.** Hình bình hành.
C. Hình thang. **D.** Hình thoi.

Lời giải:

Đáp án C.

Gọi N là trung điểm của SB. Do $MN//AB$, $AB//CD\Rightarrow MN//CD$.

Như vậy suy ra N thuộc mặt phẳng (MCD).

Ta có: $\begin{cases}(MCD)\cap(SAD)=MD\\(MCD)\cap(SAB)=MN\\(MCD)\cap(SBC)=NC\\(MCD)\cap(ABCD)=CD\end{cases}$

Vậy tứ giác $MNCD$ là thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (MCD).

Kết hợp với $MN//CD$, suy ra $MNCD$ là hình thang.

DẠNG 3: GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a$, $AC=BD=b$, $AD=BC=c$. Xét các khẳng định sau:

a. Cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $\dfrac{|b^2-c^2|}{a^2}$.

b. Cosin của góc giữa hai đường thẳng AC và BD bằng $\dfrac{|a^2-c^2|}{b^2}$.

c. Cosin của góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng $\dfrac{b^2-a^2}{c^2}$.

Trong các khẳng định trên có bao nhiêu khẳng định đúng?

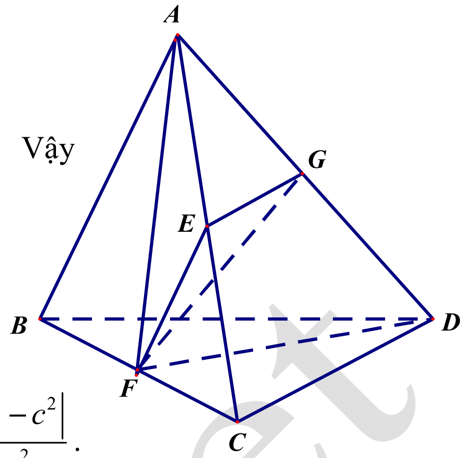
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải:

Đáp án C.

Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của AC, BC, AD.

Ta có: $EF//AB$, $EG//CD$, suy ra góc giữa hai đường thẳng AB và CD.



Ta có: $AF^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$.

Do $\Delta ABC = \Delta DBC\left(c.c.c\right)$ nên $AF = DF$.

Suy ra ΔAFD cân tại F. Vậy $FG \perp AD \Rightarrow FG = \sqrt{FA^2 - AG^2} = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$.

Xét tam giác EFG có: $\cos \widehat{FEG} = \dfrac{EF^2 + EG^2 - FG^2}{2EF.EG} = \dfrac{c^2 - b^2}{a^2}$.

Vì $0^o \le \left(\widehat{EF, EG}\right) \le 90^o \Rightarrow \cos\left(\widehat{EF, EG}\right) = \left|\cos \widehat{FEG}\right| = \dfrac{\left|b^2 - c^2\right|}{a^2}$.

Vậy cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $\dfrac{\left|b^2 - c^2\right|}{a^2}$.

Tương tự ta cũng suy ra cosin của góc giữa AC và BD bằng $\dfrac{\left|a^2 - c^2\right|}{b^2}$.

Nhận xét: Từ ví dụ này, ta còn suy ra được một trong ba giá trị $a^2 \cos\left(AB, CD\right)$; $b^2 \cos\left(AC, BD\right)$;$c^2 \cos\left(AD, BC\right)$ bằng tổng hai giá trị còn lại. Cũng từ ví dụ này ta còn suy ra được với tứ diện đều $ABCD$ thì góc giữa các cặp cạnh đối diện luôn bằng 90^o

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Tồn tại hai đường thẳng c, d song song với nhau, mỗi đường đều cắt cả a và b.
B. Không thể tồn tại hai đường thẳng c, d phân biệt mỗi đường đều cắt cả a và b.
C. Không thể tồn tại một đường thẳng cắt cả a và b.
D. Cả ba câu trên đều sai.

Câu 2. Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy

A. Đôi một cắt nhau. **B.** Đồng quy.
C. Hoặc đồng quy hoặc đôi một song song. **D.** Đôi một song song.

Câu 3. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) sẽ:

A. Song song với hai đường thẳng đó.
B. Song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.
C. Trùng với một trong hai đường thẳng đó.
D. Cắt một trong hai đường thẳng đó.

Câu 4. Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Xét hai đường thẳng p, q mà mỗi đường thẳng đều cắt cả a và b, p cắt a tại M, q cắt a tại N (M không trùng với N). Khi đó hai đường thẳng p và q:

A. Cắt nhau. **B.** Trùng nhau.
C. Song song với nhau. **D.** Hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.

Câu 5. Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng đó:

A. Song song. **B.** Trùng nhau.

C. Chéo nhau.

D. Hoặc song song hoặc trùng nhau.

Câu 6. Giả sử (P), (Q), (R) là ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt a, b, c. Trong đó: $a=(P)\cap(R)$, $b=(Q)\cap(R)$, $c=(P)\cap(Q)$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. a và b cắt nhau hoặc song song với nhau.

B. Ba giao tuyến a, b, c đồng quy hoặc đôi một cắt nhau.

C. Nếu a và b song song với nhau thì a và c không thể cắt nhau, cũng vậy, b và c không thể cắt nhau.

D. Ba giao tuyến a, b, c đồng quy hoặc đôi một song song.

Câu 7. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) là đường thẳng d:

A. Đi qua S .

B. Đi qua điểm S và song song với AB.

C. Đi qua điểm S và song song với AD.

D. Đi qua điểm S và song song với AC.

Câu 8. Giả sử có ba đường thẳng a, b, c trong đó $b//a$ và $c//a$. Hãy chọn câu đúng:

A. Nếu mặt phẳng (a,b) không trùng với mặt phẳng (a,c) thì b và c chéo nhau.

B. Nếu mặt phẳng (a,b) trùng với mặt phẳng (a,c) thì ba đường thẳng a, b, c song song với nhau từng đôi một.

C. Dù cho hai mặt phẳng (a,b) và (a,c) có trùng nhau hay không, ta vẫn có $b//c$.

D. Cả ba câu trên đều sai.

Câu 9. Cho hai đường thẳng a, b. Hai đường thẳng này sẽ nằm ở một trong các trường hợp:

(1) Hai đường thẳng phân biệt trong không gian.

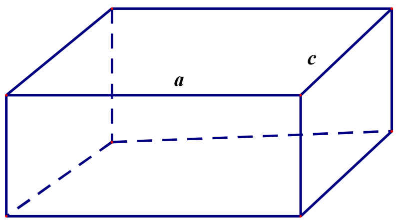
(2) Hai đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng.

(3) a là giao tuyến của (P) và (R), b là giao tuyến của (Q) và (R), trong đó (P), (Q), (R) là ba mặt phẳng khác nhau từng đôi một.

Tương ứng với mỗi trường hợp trên, số các khả năng có thể xảy ra giữa a và b lần lượt là:

A. 3, 2, 2. **B.** 3, 2, 3. **C.** 2, 3, 2. **D.** 3, 2, 1.

Câu 10. Xét hình bên dưới:



Các cạnh của hình hộp nằm trên các đường thẳng a, b, c như hình vẽ:

(1) Đường thẳng a và đường thẳng b cùng nằm trên một mặt phẳng.

(2) Có một mặt phẳng qua hai đường thẳng a và c.

(3) Có một mặt phẳng qua hai đường thẳng b và c.

Trong ba câu trên:

A. Chỉ có (1) và (2) đúng.

B. Chỉ có (1) và (3) đúng.

C. Chỉ có (2) và (3) đúng.

D. Cả ba câu trên đều đúng.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn là CD. Gọi M là trung điểm của SA, N là giao điểm của cạnh SB và mặt phẳng (MCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. MN và SD cắt nhau.

B. MN và CD chéo nhau.

C. MN và SC cắt nhau. **D.** MN và CD song song với nhau.

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,AD,CD,BC. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. MP,NQ chéo nhau. **B.** $MN // PQ$ và $MN = PQ$.

C. $MNPQ$ là hình bình hành. **D.** $MN // BD$ và $MN = \frac{1}{2}BD$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA,SB,SC,SD. Đường thẳng nào sau đây không song song với đường thẳng MN?

A. AB. **B.** CD. **C.** PQ. **D.** SC.

Câu 14. Cho hình chóp $A.BCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N,P,Q,R,S lần lượt là trung điểm của các cạnh AC,BD,AB,CD,AD,BC. Các điểm nào sau đây không đồng phẳng?

A. M,P,R,Q. **B.** M,R,S,N. **C.** P,Q,R,S. **D.** M,P,Q,N.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang với đáy AD và BC $(AD = a > BC = b)$. Gọi I,J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB,SC lần lượt tại M,N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA,SD lần lượt tại P,Q. Gọi E là giao điểm của AM và PB, F là giao điểm của CQ và DN. Trong các mệnh đề dưới đây, có bao nhiêu mệnh đề sai?

1) MN và PQ song song với nhau.

2) MN và EF song song với nhau.

3) $EF = \frac{2}{5}(a+b)$.

4) $EF = \frac{1}{4}(a+b)$

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AC,BC. K là điểm trên đoạn BD sao cho $KB = 2KD$, F là giao điểm của AD và (IJK). Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (IJK) song song với đường thẳng?

A. AJ. **B.** BI. **C.** IJ. **D.** CI.

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của BC,BD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (AIJ) và (ACD) là:

A. Đường thẳng d đi qua A và $d // BC$. **B.** Đường thẳng d đi qua A và $d // BD$.

C. Đường thẳng d đi qua A và $d // CD$. **D.** Đường thẳng AB.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$, M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M song song với SA,SB,SC cắt các mặt phẳng $(SBC),(SAC),(SAB)$ lần lượt tại A',B',C'.

a) $\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}$ có giá trị không đổi bằng bao nhiêu khi M di động trong tam giác ABC?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{2}{3}$.

b) $\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}$ nhận giá trị lớn nhất. Khi đó vị trí của M trong tam giác ABC là:

A. Trực tâm ΔABC. **B.** Trọng tâm ΔABC.

C. Tâm ngoại tiếp ΔABC. **D.** Tâm nội tiếp ΔABC.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Mặt phẳng (α) di động đi qua AB và cắt SC, SD lần lượt tại M, N.

a) Tứ giác $ABMN$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình thang.

C. Hình thoi. **D.** Tứ giác lồi có các cặp cạnh đối cắt nhau.

b) Giao điểm của hai đường thẳng AM và BN luôn chạy trên đường thẳng cố định:

A. SO. **B.** Đường thẳng đi qua S.

C. Đường thẳng đi qua S, song song với AB. **D.** Đường thẳng đi qua S, song song với AD.

c) Giao điểm của hai đường thẳng AN và BM luôn chạy trên đường thẳng cố định:

A. SO. **B.** Đường thẳng đi qua S.

C. Đường thẳng đi qua S, song song với AB. **D.** Đường thẳng đi qua S, song song với AD.

d) Tính $\frac{AB}{MN}-\frac{BC}{SK}$?

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD và M là điểm nằm bên trong tam giác BCD. Đường thẳng qua M và song song với GA lần lượt cắt các mặt phẳng $(ABC),(ACD),(ADB)$ tại P,Q,R.

a) Khi M di động trong tam giác BCD, đại lượng $\frac{MP+MQ+MR}{GA}$ không đổi và bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

b) Xác định vị trí của M để $MP.MQ.MR$ đạt giá trị lớn nhất?

A. M là trực tâm tam giác BCD. **B.** M là tâm ngoại tiếp tam giác BCD.

C. M là trọng tâm tam giác BCD. **D.** M là tâm ngoại tiếp tam giác BCD.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và $\widehat{SAD}=90°$. Gọi Dx là đường thẳng qua D và song song với SC.

a) Giao điểm I của đường thẳng Dx với mặt phẳng (SAB) chạy trên đường thẳng:

A. Qua S và song song với AB. **B.** Qua S và song song với AD

C. SO. **D.** SD.

b) Diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (AIC) là:

A. $\frac{a^2\sqrt{7}}{8}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{7}}{2}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{7}}{16}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Mặt bên (SAB) là tam giác đều, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H,K lần lượt là trung điểm của SA,SB. M là điểm trên cạnh AD. Mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N.

a) $HKNM$ là hình gì?

A. Tứ giác lồi có các cặp cạnh đối cắt nhau. **B.** Hình thoi.

C. Hình thang cân. **D.** Hình bình hành.

b) Đặt $AM = x$ $(0 \le x \le a)$. Tìm x theo a để diện tích tứ giác $HKNM$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 0. **B.** a. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{4}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có cạnh đáy AB và CD. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD,BC. G là trọng tâm của tam giác SAB. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (IJG) là một tứ giác. Tìm điều kiện của AB,CD để thiết diện đó là hình bình hành?

A. $AB = 3CD$. **B.** $AB = 2CD$. **C.** $CD = 2AB$. **D.** $CD = 3AB$.

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,BD. E là một điểm trên cạnh AD (E khác A,D). Tìm điều kiện của tứ diện $ABCD$ và điểm E sao cho thiết diện của hình chóp cắt bởi (IJE) là hình thoi?

A. $AB = CD, \overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{ED}$. **B.** $AD = BC, \overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{ED}$.

C. $AB = CD, \overrightarrow{EA} = -2\overrightarrow{ED}$. **D.** $AD = BC, \overrightarrow{EA} = -2\overrightarrow{ED}$.

Câu 25. Số đo góc giữa hai đường thẳng bằng $0°$ thì hai đường thẳng đó:

A. Song song. **B.** Chéo nhau.

C. Trùng nhau. **D.** Song song hoặc trùng nhau.

Câu 26. Bạn Tùng Chi xác định góc giữa hai đường thẳng a,b trong không gian như sau:

Bước 1: Lấy điểm O bất kì. Qua O dựng đường thẳng m song song với a. Trên đường thẳng m lấy điểm A khác O.

Bước 2: Dựng đường thẳng n song song với song song với b. Trên đường thẳng m lấy điểm B khác O.

Bước 3: Góc giữa hai đường thẳng a và b chính là góc $\widehat{AOB}$.

Hỏi bạn Tùng Chi có làm đúng không, nếu sai thì sai ở bước nào?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bạn làm đúng.

Câu 27. Cho ba đường thẳng a,b,c sao cho $a // b, b \perp c$. Khi đó góc giữa hai đường thẳng a và c bằng:

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Câu 28. Cho hình chóp $A.BCD$ có các tam giác ABC, ABD đều cạnh a, E là trung điểm của CD. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng AD và BC biết rằng $\widehat{AEB} = 90°$.

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a, \widehat{ASB} = \widehat{SAD} = 90°$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của các đoạn AB,BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SE và DF.

A. $\frac{7}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 3a, SA = a\sqrt{3}$. Các tam giác SAB,SAC,SAD vuông tại A. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SC và BD.

A. $\frac{8}{\sqrt{130}}$. **B.** $\frac{4}{\sqrt{130}}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 31. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 5, AC = 7, BD = \sqrt{57}, CD = 9$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng BC và AD?

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = a, \widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60°, \widehat{CAD} = 90°$. Gọi E là trung điểm của đoạn BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và ED.

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{10}$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Đáp án D.

• Đáp án A sai. Giả sử c cắt a,b lần lượt tại A,B, d cắt a,b lần lượt tại C,D. Suy ra A,B,C,D đồng phẳng, hay a,b đồng phẳng, vô lí.

• Đáp án B, C sai, chúng ta có thể dễ dàng thấy một ví dụ là tứ diện $ABCD$ có AB và CD đều cắt hai đường thẳng chéo nhau AD và BC.

Câu 2. Đáp án C.

Câu 3. Đáp án B.

Câu 4. Đáp án D.

Câu 5. Đáp án D.

Câu 6. Đáp án B.

Câu 7. Đáp án C.

Câu 8. Đáp án D.

• Đáp án A sai vì nếu (a,b) và (a,c) không trùng nhau thì a,b,c đôi một phân biệt. theo tính chất bắc cầu suy ra $b // c$.

• Đáp án B, C sai, vì ta có thể lấy ví dụ $b \equiv c$.

Câu 9. Đáp án B.

• Trường hợp (1) có thể xảy ra giữa hai đường thẳng a,b là chéo nhau, song song, cắt nhau.

• Trường hợp (2) có thể là song song, cắt nhau.

• Trường hợp (3) có thể là song song, cắt nhau hoặc trùng nhau.

Như vậy, tương ứng với mỗi trường hợp, số các khả năng có thể xảy ra giữa a,b là $3,2,3$.

Câu 10. Đáp án C.

Nhìn vào hình vẽ, ta thấy a,b chéo nhau, nên không có mặt phẳng nào chứa cả a,b. Do đó (1) sai. Vậy đáp án A, B, C sai.

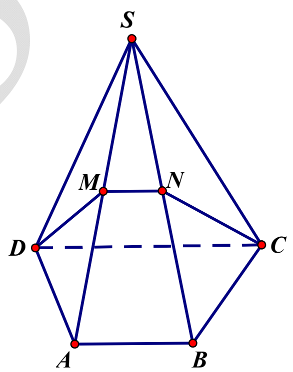
Đường thẳng a,c cắt nhau, xác định duy nhất một mặt phẳng chứa cả hai đường. Đáp án (2) đúng.

Đường thẳng b,c cắt nhau, xác định duy nhất một mặt phẳng chứa cả hai đường. Đáp án (3) đúng.

Câu 11. Đáp án D.

Ta có: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (MCD) \\ MN = (SAB) \cap (MCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel CD$.

Câu 12. Đáp án A.



Do M,N lần lượt là trung điểm của AB, AD nên $MN \parallel BD, MN = \frac{1}{2}BD$.

Do P,Q lần lượt là trung điểm của CD, CB nên $PQ \parallel BD, PQ = \frac{1}{2}BD$.

Suy ra $MN \parallel PQ$, do đó M,N,P,Q đồng phẳng. Do đó MP, NQ không thể chéo nhau.

Câu 13. Đáp án D.

Do MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN \parallel AB$.

Tương tự, do PQ là đường trung bình của tam giác SCD nên $PQ \parallel CD$.

$ABCD$ là hình bình hành nên $AB // CD$. Do đó: $PQ // MN$ và $MN // CD$.

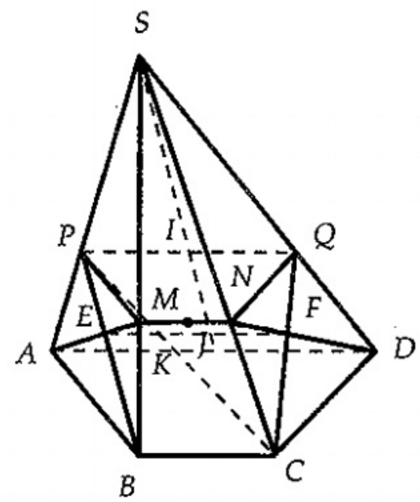
MN không song song với SC vì giả sử ngược lại thì SC và CD trùng nhau (vô lí).

Câu 14. Đáp án A.

Do M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AC, BD, AB, CD, AD, BC nên $MR // CD // SN$, $PS // AC // RQ$, $MP // BC // NQ$. Do đó M, R, S, N đồng phẳng; P, Q, R, S đồng phẳng; M, P, Q, N đồng phẳng.

M, P, R, Q không đồng phẳng vì giả sử ngược lại thì P sẽ thuộc mặt phẳng (ACD), suy ra B thuộc mặt phẳng (ACD) (vô lí).

Câu 15. Đáp án B.



Ta có $I \in (SAD)$, suy ra $I \in (SAD) \cap (BCI)$.

Do $\begin{cases} (SAD) \cap (BCI) = PQ \\ AD \subset (SAD), BC \subset (BCI) \\ AD // BC \end{cases} \Rightarrow PQ // AD // BC$.

Ta có: $J \in (SBC)$, suy ra $J \in (SBC) \cap (ADJ)$.

Do $\begin{cases} (SBC) \cap (ADJ) = MN \\ BC \subset (SBC), AD \subset (ADJ) \\ AD // BC \end{cases} \Rightarrow MN // AD // BC$.

Từ đó suy ra MN và PQ song song với nhau.

Ta có: $\begin{cases} EF = (ADNM) \cap (BCQP) \\ AD = (ADNM) \cap (ABCD) \\ BC = (ABCD) \cap (BCQP) \\ AD // BC \end{cases} \Rightarrow EF // AD$.

Suy ra $EF // MN$. Gọi K là giao điểm của CP với EF $EF = EK + KF$.

Do $\frac{SP}{SA}=\frac{2}{3}=\frac{SM}{SB}\Rightarrow PM\,//\,AB$.

Theo định lý Thalet ta có: $\frac{PE}{EB}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{PE}{PB}=\frac{2}{5}$. Do EK song song với BC nên theo định lý Thalet ta có : $\frac{PE}{PB}=\frac{EK}{BC}=\frac{2}{5}\Rightarrow EK=\frac{2}{5}b$.

Tương tự ta cũng có: $\frac{QF}{FC}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{QC}{FC}=\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{PQ}{FK}=\frac{5}{3}\Rightarrow FK=\frac{3}{5}PQ=\frac{3}{5}.\frac{2}{3}AD=\frac{2}{5}a$.

Từ đây suy ra $EF=\frac{2}{5}(a+b)$.

Câu 16. Đáp án C.

Ta có: $\begin{cases}(SAD)\cap(IJK)=FK\\ AD\subset(SAD),IJ\subset(IJK)\\ AD\,//\,IJ\end{cases}\Rightarrow FK\,//\,IJ$.

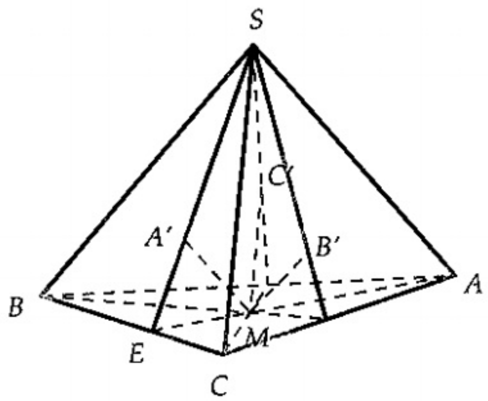
Dễ dàng chứng minh được các đường thẳng còn lại không song song với FK.

Câu 17. Đáp án C.

Do I,J lần lượt là trung điểm của BC,BD nên IJ là đường trung bình của tam giác BCD. Suy ra $IJ\,//\,CD$.

Ta có: $\begin{cases}IJ\,//\,CD,IJ\subset(AIJ),CD\subset(ACD)\\ A\in(AIJ)\cap(ACD)\end{cases}\Rightarrow(AIJ)\cap(ACD)=At\,//\,CD$.

Câu 18. Đáp án C, B.



a) Do $MA'\,//\,SA$ nên bốn điểm này nằm trong cùng mặt phẳng. Giả sử E là giao điểm của mặt phẳng này với BC. Khi đó A,M,E thẳng hàng và ta có: $\frac{MA'}{SA}=\frac{ME}{EA}=\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$.

Tương tự ta có: $\frac{MB'}{SB}=\frac{S_{MAC}}{S_{ABC}},\frac{MC'}{SC}=\frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$. Vậy $\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}=1$. Vậy đáp án đúng là

.

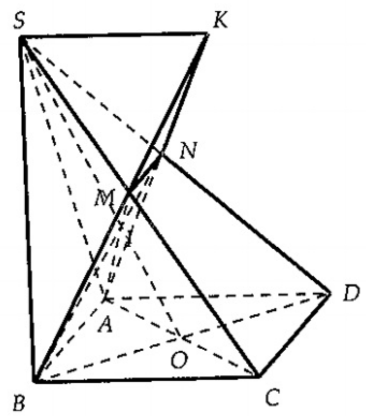
b) Ap dụng bất đẳng thức Cauchy ta có :

$$\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}\ge 3\sqrt[3]{\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}}\Rightarrow \frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}\le\frac{1}{27}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{MA'}{SA}=\frac{MB'}{SB}=\frac{MC'}{SC}\Rightarrow S_{MAC}=S_{MAB}=S_{MBC}$.

Điều này chỉ xảy ra khi M là trọng tâm tam giác ABC. Vậy đáp án đúng là B.

Câu 19. Đáp án B, A, D, A.



a) Ta có : $\begin{cases} MN=(ABM)\cap(SCD)\\ AB=(ABM)\cap(ABCD)\\ CD=(ABCD)\cap(SCD)\\ CD\,//\,AB\end{cases}\Rightarrow MN\,//\,AB$. Do đó $ABMN$ là hình thang. Do $MN<AB$ nên $ABMN$ không thể là hình bình hành, hinh thoi. Vậy đáp án đúng là B.

b) Gọi $I=AM\cap BN\Rightarrow\begin{cases} I\in(SAC)\\ I\in(SBD)\end{cases}\Rightarrow I\in SO=(SAC)\cap(SBD)$. Vậy đáp án đúng là A.

c) Gọi $K=AN\cap BM\Rightarrow\begin{cases} I\in(SAD)\\ I\in(SBC)\end{cases}\Rightarrow I\in(SAD)\cap(SBC)$.

Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng qua S và song song với AD.

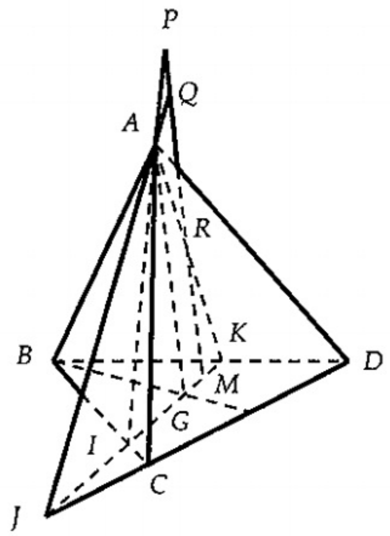
Vậy đáp án đúng là D.

d) Do $MN\,//\,AB$ nên $\frac{AB}{MN}=\frac{BM}{MK}$ (1).

Do $SK\,//\,BC$ nên $\frac{CB}{SK}=\frac{MB}{MK}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AB}{MN}-\frac{BC}{SK}=0$. Vậy đáp án đúng là A.

Câu 20. Đáp án C, C.



a) Trong mặt phẳng (BCD), gọi $I = MG \cap BC, J = MG \cap CD, K = MG \cap BD$.

Qua M kẻ $Mx // GA$. Trong $(AIJ): Mx \cap AI = P$ (đây chính là giao điểm của Mx với (ABC))

Tương tự $Mx \cap AK = R, Mx \cap AJ = Q$.

Ta có : $\dfrac{IM}{IG} = \dfrac{S_{MIC}}{S_{GIC}} = \dfrac{S_{MIB}}{S_{GIB}} = \dfrac{S_{MIC} + S_{MIB}}{S_{GIC} + S_{GIB}} = \dfrac{S_{MBC}}{S_{GBC}} = \dfrac{3S_{MBC}}{S_{BCD}}$.

Theo định lý Thalet ta có : $\dfrac{IM}{IG} = \dfrac{MP}{GA}$. Do đó : $\dfrac{MP}{GA} = \dfrac{3S_{MBC}}{S_{BCD}}$.

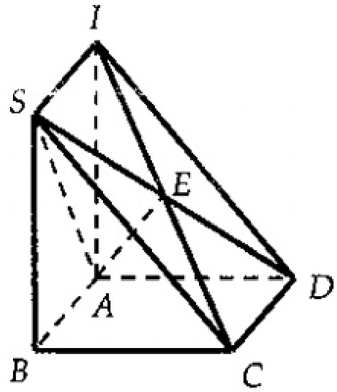
Chứng minh tương tự ta có : $\dfrac{MQ}{GA} = \dfrac{3S_{MCD}}{S_{BCD}}, \dfrac{MR}{GA} = \dfrac{3S_{MBD}}{S_{BCD}} \Rightarrow \dfrac{MP + MQ + MR}{GA} = 3$.

Vậy đáp án đúng là C.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có : $MP.MQ.MR \le \left(\dfrac{MP + MQ + MR}{3}\right)^3 = GA^3$.

Vậy giá trị lớn nhất của $MP.MQ.MR$ bằng GA^3. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $MP = MQ = MR$. Điều này xảy ra khi M là trọng tâm tam giác BCD. Vậy đáp án đúng là C.

Câu 21. Đáp án A, A.



a) Do $Dx // SC$ nên hai đường thẳng này cùng nằm trong mặt phẳng (SCD).

Lại có, hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có D là điểm chung, $AB // CD$ nên giao tuyến là đường thẳng đi qua S và song song với AB. Vậy I thuộc giao tuyến này.

Vậy đáp án đúng là A.

b) Gọi E là giao điểm của SD và IC. Suy ra thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (AIC) là tam giác ACE.

Ta có $SIDC$ là hình thang nên $SI = CD$ và $SI // CD$. Suy ra $SI = AB$ và $SI // AB$. Điều này suy ra $SIDC$ là hình bình hành. Khi đó $AI = SB = a$.

Mặt khác, $AC = SD = a\sqrt{2} \Rightarrow AE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

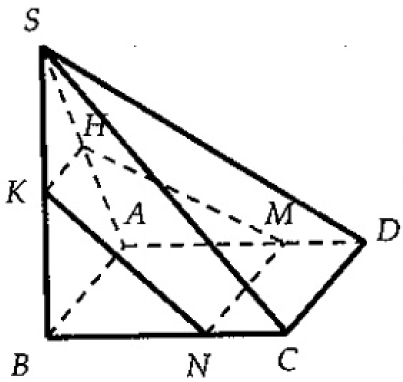
Xét tam giác IAC có : $CI^2 = 2\left(AC^2 + AI^2\right) - 4AE^2 = 4a^2 \Rightarrow CI = 2a$.

Ta có : $\cos\widehat{CAE} = \dfrac{AE^2 + AC^2 - CE^2}{2AC.AE} = \dfrac{\dfrac{a^2}{2} + 2a^2 - a^2}{2a^2} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \sin\widehat{CAE} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

Diện tích thiết diện là : $S = \dfrac{1}{2}AC.AE.\sin\widehat{CAE} = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{7}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{8}$.

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 22. Đáp án C, A.



a) Ta có :

$\begin{cases} KH \,//\, AB, KH \subset (HKM), AB \subset (ABCD) \\ M \in (HKM) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (HKM) \cap (ABCD) = MN \,//\, AB \,//\, HK \ (1)$.

Ta lại có: $\Delta SAD = \Delta SBC\,(c.c.c) \Rightarrow \widehat{SAD} = \widehat{SBC}$.