CHỦ ĐỀ . TỔ HỢP – XÁC SUẤT
QUY TẮC ĐẾM

A. LÝ THUYẾT

1. Quy tắc cộng

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiên, hành động kia có n cách thực hiên không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có m + n cách thực hiện.

Chú ý: số phần tử của tập hợp hữu hạn X được kí hiệu là |X| hoặc n(X)

Quy tắc cộng được phát biểu ở trên thực chất là quy tắc đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau: Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau thì

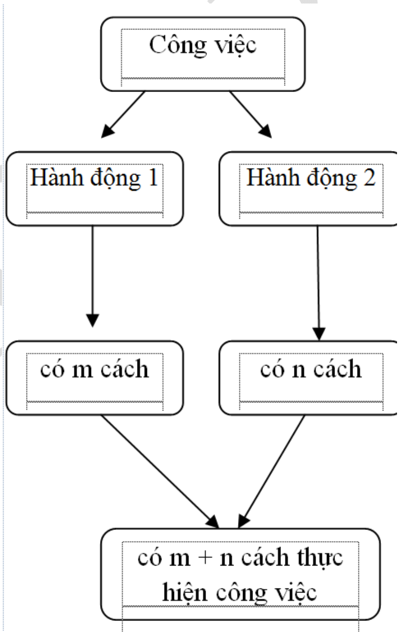
$n\left(A\cup B\right)=n\left(A\right)+n\left(B\right)$

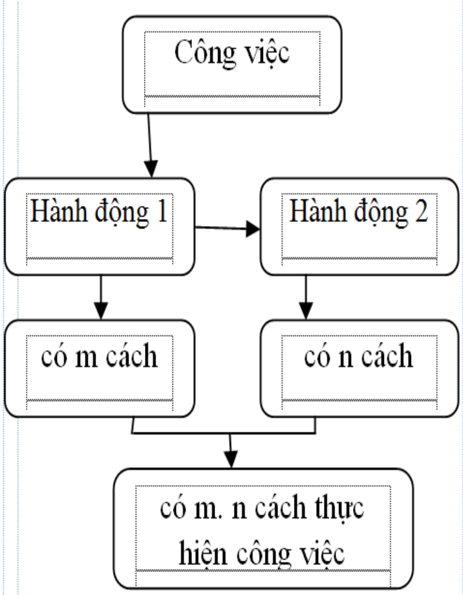
Mở rộng: Một công việc được hoàn thành bởi một trong k hành động $A_1, A_2, A_3,..., A_k$ .Nếu hành động A_1 có $m_1$cách thực hiện, hành động A_2 có m_2 cách thực hiện,…, hành động A_k có m_k cách thực hiện và các cách thực hiên của các hành động trên không trùng nhau thì công việc đó có $m_1+m_2+m_3+...+m_k$ cách thực hiện.

2. Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp.Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có m.n cách thực hiện.

Mở rộng: Một công việc được hoàn thành bởi k hành động $A_1, A_2, A_3,..., A_k$ liên tiếp. Nếu hành động A_1 có $m_1$cách thực hiện, ứng với mỗi cách thực hiện hành động A_1 có m_2 cách thực hiện hành động A_2,…, có m_k cách thực hiện hành động A_k thì công việc đó có $m_1.m_2.m_3.....m_k$ cách hoàn thành.





HOÁN VỊ- CHỈNH HỢP- TỔ HỢP

1. Hoán vị

Cho tập hợp A có n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó. Số các hoán vị của tập hợp có n phần tử được kí hiệu là P_n

Định lí 1: $P_n = n(n-1)...2.1 = n!$ với P_n là số các hoán vị

chứng minh

Việc sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A là một công việc gồm n công đoạn.

Công đoạn 1: Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ nhất: n cách

Công đoạn 2: chọn phần tử xếp vào vị trí thứ hai: (n-1) cách

Công đoạn thứ i: chọn phần tử xếp vào vị trí thứ i có $(n-i+1)$ cách.

.

Công đoạn thứ n: chọn phần tử xếp vào vị trí thứ n có 1 cách.

Theo quy tắc nhân thì có $P_n = n!$ cách sắp xếp thứ tự n phần tử của tập A, tức là có $n!$ hoán vị.

STUDY TIP

Hai hoán vị của n phần tử chỉ khác nhau ở thứ tự sắp xếp. Chẳng hạn, hai hoán vị abc và acb của ba phần tử a, b, c là khác nhau.

2. Chỉnh hợp

Cho tập A gồm n phần tử $(n \geq 1)$.

Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chinht hợp chập k của n phần tử đã cho.

STUDY TIP:

Từ định nghĩa ta thấy một hoán vị của tập hợp A có n phần tử là một chỉnh hợp chập n của A.

$$P = A_n^n$$

Định lý 2: $A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ với A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử $(1 \leq k \leq n)$.

Chứng minh

Việc thiết lập một chỉnh hợp chập k của tập A có n phần tử là một công việc gồm k công đoạn.

Công đoạn 1: Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ nhất có n cách thực hiện.

Công đoạn 2: Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ hai có $n-1$ cách thực hiện.

.

Sau khi thực hiện xong $i-1$ công đoạn (chọn $i-1$ phần tử của A vào các vị trí thứ 1, 2,., $i-1$), công đoạn thứ i tiếp theo là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ i có $n-i+1$ cách thực hiện.

Công đoạn cuối, công đoạn k có $n-k+1$ cách thực hiện.

Thoe quy tắc nhân thì có $n(n-1)...(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ chỉnh hợp chập k của tập A có n phần tử.

3. Tổ hợp

Giả sử tập A có n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.

Số các tổ hợp chập k của tập hợp có n phần tử có kí hiệu là C_n^k.

STUDY TIP

Số k trong định nghĩa cần thỏa mãn điều kiện $1 \leq k \leq n$. Tuy vậy, tập hợp không có phần tử nào là tập rỗng nên ta quy ước gọi tổ hợp chập 0 của n phần tử là tập rỗng.

QUY ƯỚC

$0! = 1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $C_n^0 = A_n^0 = 1$

Định lý 3

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Chứng minh

Ta có mỗi hoán vị của một tổ hợp chập k của A cho ta một chỉnh hợp chập k của **A.** Vậy $A_n^k = k!C_n^k \Leftrightarrow C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}$.

Định lý 4 (hai tính chất cơ bản của số C_n^k)

a. Cho số nguyên dương n và số nguyên k với $0 \leq k \leq n$. Khi đó $C_n^k = C_n^{n-k}$.

b. Hằng đẳng thức Pascal

Cho số nguyên dương n và số nguyên dương k với $1 \leq k \leq n$. Khi đó $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Đọc thêm

Trên máy tính cầm tay có chức năng tính tổ hợp, chỉnh hợp như sau:

Với tổ hợp ta nhấn tổ hợp phím SHIFT ÷ **(nCr)**

Ví dụ ta muốn tính C_{12}^5 ta ấn 1 2 SHIFT ÷ **(nCr)** 5 =

Với chỉnh hợp ta ấn tổ hợp phím SHIFT × **(nPr)**

Ví dụ ta muốn tính A_7^3 ta ấn tổ hợp phím 7 SHIFT × **(nPr)** 3 =

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHÉP ĐẾM

Phương pháp chung:

Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện một công việc A bằng quy tắc cộng, ta thực hiện các bước:

Bước 1: Phân tích xem có bao nhiêu phương án riêng biệt để thực hiện công việc A (có nghĩa công việc A có thể hoàn thành bằng một trong các phương án $A_1; A_2; ...; A_n$).

Bước 2: Đếm số cách chọn $x_1; x_2; ...; x_n$ trong các phương án $A_1; A_2; ...; A_n$.

Bước 3: Dùng quy tắc cộng ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện công việc A bằng quy tắc nhân, ta thực hiện các bước:

Bước 1: Phân tích xem có bao nhiêu công đoạn liên tiếp cần phải tiến hành để thực hiện công việc A (giả sử A chỉ hoàn thành sau khi tất cả các công đoạn $A_1; A_2; ...; A_n$ hoàn thành).

Bước 2: Đếm số cách chọn $x_1; x_2; ...; x_n$ trong các công đoạn $A_1; A_2; ...; A_n$.

Bước 3: Dùng quy tắc nhân ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là $x = x_1.x_2.x_3...x_n$.

Ví dụ 1. Một lớp học có 25 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn ra:

a) một học sinh đi dự trại hè của trường.

b) một học sinh nam và một học sinh nữ dự trại hè của trường. Số cách Chonju trong mỗi trường hợp a và b lần lượt là

A. 45 và 500. **B.** 500 và 45. **C.** 25 và 500. **D.** 500 và 25.

Lời giải

Chọn A

a) Bước 1: Với bài toán a thì ta thấy cô giáo có thể có hai phương án để chọn học sinh đi thi:

Bước 2: Đếm số cách chọn.

$*$ ***Phương án 1:*** chọn 1 học sinh đi dự trại hè của trường thì có 25 cách chọn.

$*$ ***Phương án 2:*** chọn học sinh nữ đi dự trại hè của trường thì có 20 cách chọn.

Bước 3: Áp dụng quy tắc cộng.

Vậy có $20 + 25 = 45$ cách chọn.

b) Bước 1: Với bài toán b thì ta thấy công việc là chọn học sinh nam và một học sinh nữ. Do vậy ta có 2 công đoạn.

Bước 2: Đếm số cách chọn trong các công đoạn.

$*$ ***Công đoạn 1:*** Chọn 1 học sinh nam trong số 25 học sinh nam thì có 25 cách chọn.

$*$ ***Công đoạn 2:*** Chọn 1 học sinh nữ trong số 20 học sinh nữ thì có 20 cách chọn.

Bước 3: Áp dụng quy tắc nhân.

Vậy ta có $25.20 = 500$ cách chọn.

STUDY TIP

Bài toán ở ví dụ 1 giúp ta cũng cố và định hình các bước giải quyết bài toán đếm sử dụng quy tắc cộng; quy tắc nhân.

Chú ý:

$*$ ***Quy tắc cộng:*** Áp dụng khi công việc có nhiều phương án giải quyết.

$*$ ***Quy tắc nhân:*** Áp dụng khi công việc có nhiều công đoạn.

Ví dụ 2. Trên giá sách có 10 quyển sách Văn khác nhau, 8 quyển sách Toán khác nhau và 6 quyển sách Tiếng Anh khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai quyển sách khác môn nhau?

A. 80. **B.** 60. **C.** 48. **D.** 188.

Lời giải

Chọn D

Theo quy tắc nhân ta có:

$10.8 = 80$ cách chọn một quyển sách Văn và một quyển sách Toán khác nhau.

$10.6 = 60$ cách chọn một quyển sách Văn và một quyển sách Tiếng Anh khác nhau.

$8.6 = 48$ cách chọn một quyển sách Toán và một quyển sách Tiếng Anh khác nhau.

Theo quy tắc cộng ta có số cách chọn 2 quyển sách khác môn là $80 + 60 + 48 = 188$ cách.

STUDY TIP

Ta thấy bài toán ở ví dụ 2 là sự kết hợp của cả quy tắc cộng và quy tắc nhân khi bài toán vừa cần chia trường hợp vừa cần lựa chọn theo bước.

Ví dụ 3. Biển đăng kí xe ô tô có 6 chữ số và hai chữ cái trong số 26 chữ cái (không dùng các chữ I và O). Chữ đầu tiên khác 0. Hỏi số ô tô được đăng kí nhiều nhất có thể là bao nhiêu?

A. 5184.10^5. **B.** 576.10^6. **C.** 33384960. **D.** 4968.10^5.

Lời giải

Chọn A

Theo quy tắc nhân ta thực hiện từng bước.

Chữ cái đầu tiên có 24 cách chọn.

Chữ cái tiếp theo cũng có 24 cách chọn.

Chữ số đầu tiên có 9 cách chọn.

Chữ số thứ hai có 10 cách chọn.

Chữ số thứ ba có 10 cách chọn.
Chữ số thứ tư có 10 cách chọn.
Chữ số thứ năm có 10 cách chọn.
Chữ số thứ sau có 10 cách chọn.
Vậy theo quy tắc nhân ta có $24.24.9.10^5 = 5184.10^5$ là số ô tô nhiều nhất có thể đăng kí.

STUDY TIP

Có thể phân biệt bài toán sử dụng quy tắc cộng hay quy tắc nhân là phân biệt xem công việc cần làm có thể chia trường hợp hay phải làm theo từng bước.

Ví dụ 4. Có bao nhiêu cách xếp 7 học sinh A, B, C, D, E, F, G vào một hàng ghế dài gồm 7 ghế sao cho hai bạn B và F ngồi ở hai ghế đầu?

A. 720 cách. **B.** 5040 cách. **C.** 240 cách. **D.** 120 cách.

Lời giải

Chọn C

Ta thấy ở đây bài toán xuất hiện hai đối tượng.
Đối tượng 1: Hai bạn B và F (hai đối tượng này có tính chất riêng).
Đối tượng 2: Các bạn còn lại có thể thay đổi vị trí cho nhau.
Bước 1: Ta sử dụng tính chất riêng của hai bạn B và F trước. Hai bạn này chỉ ngồi đầu và ngồi cuối, hoán đổi cho nhau nên có $2!$ cách xếp.
Bước 2: Xếp vị trí cho các bạn còn lại, ta có $5!$ cách xếp.
Vậy ta có $2!.5! = 240$ cách xếp.

STUDY TIP

Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng hoán vị của n phần tử, ta dựa trên dấu hiệu

a. Tất cả n phần tử đều có mặt.
b. Mỗi phần tử chỉ xuất hiện 1 lần.
c. Có sự phân biệt thứ tự giữa các phần tử.
d. Số cách xếp n phần tử là số hoán vị của n phần tử đó $P_n = n!$.

Ví dụ 5. Một nhóm 9 người gồm ba đàn ông, bốn phụ nữ và hai đứa trẻ đi xem phim. Hỏi có bao nhiêu cách xếp họ ngồi trên một hàng ghế sao cho mỗi đứa trẻ ngồi giữa hai phụ nữ và không có hai người đàn ông nào ngồi cạnh nhau?

A. 288. **B.** 864. **C.** 24. **D.** 576.

Lời giải

Chọn B

Kí hiệu T là ghế đàn ông ngồi, N là ghế cho phụ nữ ngồi, C là ghế cho trẻ con ngồi. Ta có các phương án sau:

PA1: *TNCNTNCNT*

PA2: *TNTNCNCNT*

PA3: *TNCNCNTNT*

Xét phương án 1: Ba vị trí ghế cho đàn ông có $3!$ cách.

Bốn vị trí ghế cho phụ nữ có thể có $4!$ cách.

Hai vị trí ghế trẻ con ngồi có thể có $2!$ cách.

Theo quy tắc nhân thì ta có $3!.4!.2!=288$ cách.

Lập luận tương tự cho phương án 2 và phương án 3.

Theo quy tắc cộng thì ta có $288+288+288=864$ cách.

STUDY TIP

Với các bài toán gồm có ít phần tử và vừa cần chia trường hợp vừa thực hiện theo bước thì ta cần chia rõ trường hợp trước, lần lượt thực hiện từng trường hợp (sử dụng quy tắc nhân từng bước) sau đó mới áp dụng quy tắc cộng để cộng số cách trong các trường hợp với nhau.

Ví dụ 6. Một chồng sách gồm 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Vật lý, 5 quyển sách Hóa học. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các quyển sách trên thành một hàng ngang sao cho 4 quyển sách Toán đứng cạnh nhau, 3 quyển Vật lý đứng cạnh nhau?

A. 1 cách. **B.** 5040 cách. **C.** 725760 cách. **D.** 144 cách.

Lời giải

Chọn C.

Bước 1: Do đề bài cho 4 quyển sách Toán đứng cạnh nhau nên ta sẽ coi như "buộc" các quyển sách Toán lại với nhau thì số cách xếp cho "buộc" Toán này là $4!$ cách.

Bước 2: Tương tự ta cũng "buộc" 3 quyển sách Lý lại với nhau, thì số cách xếp cho "buộc" Lý này là $3!$ cách.

Bước 3: Lúc này ta sẽ đi xếp vị trí cho 7 phần tử trong đó có:

+ 1 "buộc" Toán.

+ 1 "buộc" Lý.

+ 5 quyển Hóa.

Thì sẽ có $7!$ cách xếp.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $7!.4!.3!=725760$ cách xếp.

STUDY TIP

Với các dạng bài tập yêu cầu xếp hai hoặc nhiều phần tử đứng cạnh nhau thì ta sẽ "buộc" các phần tử này một nhóm và coi như 1 phần tử.

Ví dụ 7. Một câu lạc bộ phụ nữ của phường Khương Mai có 39 hội viên. Phường Khương Mai có tổ chức một hội thảo cần chọn ra 9 người xếp vào 9 vị trí lễ tân khác nhau ở cổng chào, 12 người vào 12 vị trí khác nhau ở ghế khách mới. Hỏi có bao nhiêu cách chọn các hội viên để đi tham gia các vị trí trong hội thao theo quy định?

A. $A_{39}^{9}.A_{39}^{12}$. **B.** $C_{39}^{9}.C_{30}^{12}$. **C.** $C_{39}^{9}.C_{39}^{12}$. **D.** $A_{39}^{9}.A_{30}^{12}$.

Phân tích

Bài toán sử dụng quy tắc nhân khi ta phải thực hiện hai bước:

Bước 1: Chọn 9 người vào vị trí lễ tân.

Bước 2: Chọn 12 người vào vị trí khách mời.

Dấu hiệu nhận biết sử dụng chỉnh hợp ở phần STUDY TIP.

Lời giải

Chọn D.

Bước 1: Chọn người vào vị trí lễ tân.

Do ở đây được sắp theo thứ tự nên ta sẽ sử dụng chỉnh hợp. Số cách chọn ra 9 người vào vị trí lễ tân là A_{39}^{9} cách.

Bước 2: Chọn người vào vị trí khách mời. Số cách chọn là 12 thành viên trong số các thành viên còn lại để xếp vào khách mời là A_{39}^{12} cách.

Vậy theo quy tắc nhân thì số cách chọn các hội viên để đi dự hội thảo theo đúng quy định là $A_{39}^{9}.A_{39}^{12}$ cách.

STUDY TIP

Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng chỉnh hợp chập k của n phần tử, ta cần có các dấu hiệu:

a. Phải chọn k phần tử từ n phần tử cho trước.
b. Có sự phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.
c. Số cách chọn k phần tử có phân biệt thứ tự từ n phần tử là A_n^k cách.

Ví dụ 8. Có 6 học sinh và 2 thầy giáo được xếp thành hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho hai thầy giáo không đứng cạnh nhau?

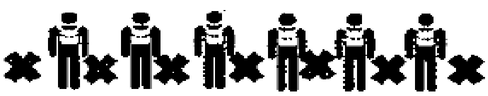
A. 30240 cách. **B.** 720 cách. **C.** 362880 cách. **D.** 1440 cách.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1: Trước hết, xếp 6 học sinh thành một hàng có $6!$ cách.

Lúc này giữa hai học sinh bất kì sẽ tạo nên một vách ngăn và 6 học sinh sẽ tạo nên 7 vị trí có thể xếp các thầy vào đó tính cả hai vị trí ở hai đầu hàng (hình minh họa bên dưới). 7 vị trí dấu nhân chính là 7 vách ngăn được tạo ra.



+ Do đề yêu cầu 2 thầy giáo không đứng cạnh nhau nên ta xếp 2 thầy giáo vào 2 trong 7 vị trí vách ngăn được tạo ra có A_7^2 cách.

Theo quy tắc nhân ta có tất cả $6!.A_7^2 = 30240$ cách xếp.

Cách 2:

- Có $8!$ cách xếp 8 người.
- Buộc hai giáo viên lại với nhau thì có $2!$ cách buộc.

Khi đó có $2.7!$ cách xếp. Mà hai giáo viên không đứng cạnh nhau nên số cách xếp là $8! - 2.7! = 30140$ cách xếp.

> **STUDY TIP**
> Khi bài toán yêu cầu xếp hai hoặc nhiều phần tử không đứng cạnh nhau. Chúng ta có thể tạo ra các "vách ngăn" các phần tử này trước khi xếp chúng.

Ví dụ 9. Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa xem như đôi một khác nhau), người ta muốn chọn một bó hồng gồm 7 bông, hỏi có bao nhiêu cách chọn bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông hồng vàng và 3 bông hồng đỏ?

A. 10 cách. **B.** 20 cách. **C.** 120 cách. **D.** 150 cách.

Phân tích

Ta thấy do chỉ chọn 7 bông hồng mà có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ nên chỉ có 3 trường hợp sau:

TH1: Chọn được 3 bông hồng vàng và 4 bông hồng đỏ.

TH2: Chọn được 4 bông hồng vàng và 3 bông hồng đỏ.

TH3: Chọn được 3 bông hồng vàng, 3 bông hồng đỏ và 1 bông hồng trắng.

Lời giải

Chọn D.

TH1: Số cách chọn 3 bông hồng vàng là C_5^3 cách.

Số cách chọn 4 bông hồng đỏ là C_4^4 cách.

Theo quy tắc nhân thì có $C_5^3.C_4^4 = 10$ cách.

TH2: Tương tự TH1 thì ta có $C_5^4.C_4^3 = 20$ cách.

TH3: Tương tự thì có $C_5^3.C_4^3.C_3^1 = 120$ cách.

Vậy theo quy tắc cộng thì có $10 + 20 + 120 = 150$ cách.

> **STUDY TIP**
> Để nhận dạng bài toán sử dụng tổ hợp chập k của n phần tử, ta dựa trên dấu hiệu:
> a. Phải chọn ra k phần tử từ n phần tử cho trước.
> b. Không phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.

c. Số cách chọn k phần tử không phân biệt thứ tự từ n phần tử đã cho là C_n^k cách.

Từ các bài toán trên ta rút ra được quy luật phân biệt tổ hợp và chỉnh hợp như sau:

- Chỉnh hợp và tổ hợp liên hệ với nhau bởi công thức: $A_n^k = k!.C_n^k$
- Chỉnh hợp: Có thứ tự.
- Tổ hợp: Không có thứ tự.
- Những bài toán mà kết quả phụ thuộc vào vị trí các phần tử thì sử dụng chỉnh hợp. Ngược lại thì sử dụng tổ hợp.
- Cách lấy k phần tử từ tập n phần tử $(k \le n)$:

  + Không thứ tự: C_n^k

  + Có thứ tự: A_n^k

Ví dụ 10. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

A. 120. **B.** 90. **C.** 270. **D.** 255.

Lời giải

Chọn D.

Số cách chọn 4 học sinh bất kì từ 12 học sinh là $C_{12}^4 = 495$ cách.

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một em được tính như sau:

$*$ **TH1:** Lớp A có hai học sinh, các lớp B,C mỗi lớp có 1 học sinh:

Chọn 2 học sinh trong 5 học sinh lớp A có C_5^2 cách.

Chọn 1 học sinh trong 4 học sinh lớp B có C_4^1 cách.

Chọn 1 học sinh trong 3 học sinh lớp C có C_3^1 cách.

Suy ra số cách chọn là $C_5^2.C_4^1.C_3^1 = 120$ cách.

$*$ **TH2:** Lớp B có 2 học sinh, các lớp A,C mỗi lớp có 1 học sinh:

Tương tự ta có số cách chọn là $C_5^1.C_4^2.C_3^1 = 90$ cách.

$*$ **TH3:** Lớp C có 2 học sinh, các lớp A,B mỗi lớp có 1 học sinh:

Tương tự ta có số cách chọn là $C_5^1.C_4^1.C_3^2 = 60$ cách.

Vậy số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một học sinh là $120+90+60=270$ cách.

Số cách chọn ra 4 học sinh thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên là $495-270=225$ cách.

STUDY TIP

Trong nhiều bài toán, làm trực tiếp sẽ khó trong việc xác định các trường hợp hoặc các bước thì ta nên làm theo hướng gián tiếp như bài toán ở ví dụ 9.
Ta sử dụng cách làm gián tiếp khi bài toán giải bằng cách trực tiếp gặp khó khan do xảy ra quá nhiều trường hợp, chúng ta tìm cách gián tiếp bằng cách xét bài toán đối.

Ví dụ 11. Với các chữ số $0,1,2,3,4,5$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng một lần?

A. 6720 số. **B.** 40320 số. **C.** 5880 số. **D.** 840 số.

Lời giải

Chọn C.

Giả sử các số tự nhiên gồm 8 chữ số tương ứng với 8 ô.

Do chữ số 1 có mặt 3 lần nên ta sẽ coi như tìm số các số thỏa mãn đề bài được tạo nên từ 8 số $0,1,1,1,2,3,4,5$.

Số hoán vị của 8 số $0,1,1,1,2,3,4,5$ trong 8 ô trên là $8!$

Mặt khác chữ số 1 lặp lại 3 lần nên số cách xếp là $\frac{8!}{3!}$ kể cả trường hợp số 0 đứng đầu.

Xét trường hợp ô thứ nhất là chữ số 0, thì số cách xếp là $\frac{7!}{3!}$.

STUDY TIP

Bài toán trên là một dấu hiêu của hoán vị lặp. Để biết thêm về hoán vị lặp thì ta sẽ nghiên cứu ở phần đọc thêm.

❀ **ĐỌC THÊM:** Cho k phần tử khác nhau $a_1,a_2,...,a_k$. Một cách sắp xếp n phần tử trong đó gồm n_1 phần tử a_1,n_2 phần tử $a_2,...,n_k$ phần tử a_k $\left(n_1+n_2+...+n_k=n\right)$ theo một thứ tự nào đó được gọi là hoán vị lặp cấp n và kiểu $\left(n_1,n_2,...,n_k\right)$ của k phần tử. Số các hoán vị lặp dạng như trên là $P_n\left(n_1,n_2,...,n_k\right)=\dfrac{n!}{n_1!.n_2!...n_k!}$.

Vậy các số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\frac{8!}{3!}-\frac{7!}{3!}=5880$ số.

Ví dụ 12. Cho 8 bạn học sinh A,B,C,D,E,F,G,H . Hỏi có bao nhiêu cách xếp 8 bạn đó ngồi xung quanh 1 bàn tròn có 8 ghế?

A. 40320 cách. **B.** 5040 cách. **C.** 720 cách. **D.** 40319 cách.

Lời giải

Ta thấy ở đây xếp các vị trí theo hình tròn nên ta phải cố định vị trí một bạn.

Ta chọn cố định vị trị của A, sau đó xếp vị trí cho 7 bạn còn lại có $7!$ cách.

Vậy có $7! = 5040$ cách.

ĐỌC THÊM

Hoán vị vòng quanh: Cho tập A gồm n phần tử. Một cách sắp xếp n phần tử của tập A thành một dãy kín được gọi là một hoán vị vòng quanh của n phần tử. Số các hoán vị vòng quanh của n phần tử là

$Q_n = (n-1)!$

Ví dụ 13. Một thầy giáo có 10 cuốn sách khác nhau trong đó có 4 cuốn sách Toán, 3 cuốn sách Lí, 3 cuốn sách Hóa. Thầy muốn lấy ra 5 cuốn và tặng cho 5 em học sinh A, B, C, D, E mỗi em một cuốn. Hỏi thầy giáo có bao nhiêu cách tặng cho các em học sinh sao cho sau khi tặng xong, mỗi một trong ba loại sách trên đều còn ít nhất một cuốn.

A. 204 cách. **B.** 24480 cách. **C.** 720 cách. **D.** 2520 cách.

Lời giải

Ta thấy với bài toán này nếu làm trực tiếp thì sẽ khá khó, nên ta sẽ làm theo cách gián tiếp. Tìm bài toán đối đó là tìm số cách sao cho sau khi tặng sách xong có 1 môn hết sách.

TH1: Môn Toán hết sách:

Số cách chọn 4 cuốn sách Toán là 1 cách.

Số cách chọn 1 cuốn trong 6 cuốn còn lại là 6 cách.

Vậy có 6 cách chọn sách.

Số cách tặng 5 cuốn sách đó cho 5 em học sinh là $A_5^5 = 120$ cách.

Vậy có $6.120 = 720$ cách.

TH2: Môn Lí hết sách:

Số cách chọn 3 cuốn sách Lí là 1 cách.

Số cách chọn 2 cuốn trong 7 cuốn còn lại là C_7^2 cách.

Vậy có 21 cách chọn sách.

Số cách tặng 5 cuốn sách đó cho 5 em học sinh là $A_5^5 = 120$ cách.

Vậy có $21.120 = 2520$ cách.

TH3: Môn Hóa hết sách: Tương tự trường hợp 2 thì có 2520 cách.

Số cách chọn 5 cuốn bất kì trong 10 cuốn và tặng cho 5 em là $C_{10}^5.A_5^5 = 30240$ cách.

Vậy số cách chọn sao cho sau khi tặng xong, mỗi loại sách trên đều còn lại ít nhất một cuốn là $30240 - 720 - 2520 - 2520 = 24480$ cách.

STUDY TIP

Ở đây có nhiều độc giả không xét đến công đoạn sau khi chọn sách còn công đoạn tặng sách nữa. Do các bạn A, B, C, D, E là khác nhau nên mỗi cách tặng sách các môn cho các bạn là khác nhau, nên ta phải xét thêm công đoạn đó.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

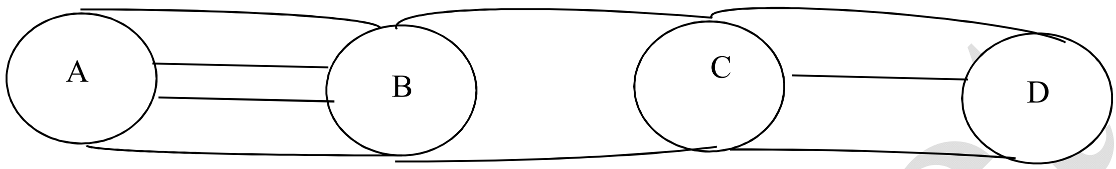
Câu 1. Trong một lớp có 17 bạn nam và 11 bạn nữ.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra hai bạn, trong đó có một bạn nam và một bạn nữ?

b) Hỏi có bao nhiêu cách chọn một bạn nam làm lớp trưởng?

A. a. 187 cách và b. 28 cách.
B. a. 28 cách và b. 187 cách.
C. a. 17 cách và b. 11 cách.
D. a. 11 cách và b. 17 cách.

Câu 2. Các thành phố A,B,C,D được nối với nhau bởi các con đường như hình dưới. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại B



A. 576. **B.** 24. **C.** 144. **D.** 432.

Câu 3. Một lớp có 25 học sinh khá môn Toán, 24 học sinh khá môn Ngữ Văn, 10 học sinh khá cả môn Toán và môn Ngữ Văn và 3 học sinh không khá cả Toán và Ngữ Văn. Hỏi lớp học đó có bao nhiêu học sinh?
A. 39. **B.** 42. **C.** 62. **D.** 52.

Câu 4. Trong kì thi tuyển nhân viên chuyên môn cho công ty cổ phần Giáo dục trực tuyến VEDU, ở khối A có 51 thí sinh đạt điểm giỏi môn Toán, 73 thí sinh đạt điểm giỏi môn Vật lí, 73 thí sinh đạt điểm giỏi môn Hóa học, 32 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Vật lí, 45 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Vật lí và Hóa học, 21 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Hóa học, 10 thí sinh đạt điểm giỏi cả ba môn Toán, Vật lí và Hóa học. Có 767 thí sinh mà cả ba môn đều không có điểm giỏi. Hỏi có bao nhiêu thí sinh tham dự tuyển nhân viên chuyên môn cho công ty?
A. 867. **B.** 776. **C.** 264. **D.** 767.

Câu 5. Người ta phỏng vấn 100 người về ba bộ phim A,B,C đang chiếu thì thu được kết quả như sau:
Bộ phim A: có 28 người đã xem.
Bộ phim B: có 26 người đã xem.
Bộ phim B: có 14 người đã xem.
Có 8 người đã xem hai bộ phim A và B
Có 4 người đã xem hai bộ phim B và C
Có 3 người đã xem hai bộ phim A và C
Có 2 người đã xem cả ba bộ phim A, B và C.
Số người không xem bất cứ phim nào trong cả ba bộ phim A,B,C là:
A. 55. **B.** 45. **C.** 32. **D.** 51.

Câu 6. Một đội văn nghệ chuẩn bị được 2 vở kịch, 3 điệu múa và 6 bài hát. Tại hội diễn, mỗi đội chỉ được trình diễn 1 vở kịch, 1 điệu múa và 1 bài hát. Hỏi đội văn nghệ trên có bao nhiêu cách chọn chương trình diễn, biết chất lượng các vở kịch, điệu múa, bài hát là như nhau?
A. 11. **B.** 36. **C.** 25. **D.** 18.

Câu 7. Có bao nhiêu cách sắp xếp 8 viên bi đỏ khác nhau và 8 viên bi đen khác nhau thành một dãy sao cho hai viên bi cùng màu thì không được ở cạnh nhau?
A. 3251404800. **B.** 1625702400. **C.** 72. **D.** 36.

Câu 8. Sắp xếp 5 học sinh lớp A và 5 học sinh lớp B vào hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy 5 ghế sao cho 2 học sinh ngồi đối diện nhau thì khác lớp. Khi đó số cách xếp là:
A. 460000. **B.** 460500. **C.** 460800. **D.** 460900.

Câu 9. Có 20 cặp vợ chồng tham dự chương trình Gameshow truyền hình thực tế. Có bao nhiêu cách chọn ra hai cặp đôi sao cho hai cặp đó là hai đôi vợ chồng?

A. 380. **B.** 116280. **C.** 90. **D.** 5040.

Câu 10. Cho tập hợp $A=\{2;5\}$. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 10 chữ số sao cho không có chữ số 2 nào đứng cạnh nhau?

A. 144 số. **B.** 143 số. **C.** 1024 số. **D.** 512 số.

Câu 11. Có 6 học sinh và 3 thầy giáo A,B,C. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ cho 9 người đó ngồi trên một hàng ngang có 9 ghế sao cho mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh?

A. 43200. **B.** 720. **C.** 60. **D.** 4320.

Câu 12. Trong một tổ học sinh có 5 em gái và 10 em trai. Thùy là một trong 5 em gái và Thiện là một trong 10 em trai đó. Thầy chủ nhiệm chọn một nhóm 5 bạn tham gia buổi văn nghệ sắp tới. Hỏi thầy chủ nhiệm có bao nhiêu cách chọn mà trong đó có ít nhất một trong hai em Thùy hoặc Thiện không được chọn?

A. 286. **B.** 3003. **C.** 2717. **D.** 1287.

Câu 13. Một nhóm học sinh có 3 em nữ và 7 em trai. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 10 em này thành một hàng ngang sao cho giữa hai em nữ bất kì đều không có một em nam nào?

A. 241920. **B.** 30240. **C.** 5040. **D.** 840.

Câu 14. Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau và tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn bằng 8?

A. 720 số. **B.** 504 số. **C.** 936 số. **D.** 1440 số.

Câu 15. Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Biết rằng số tam giác có đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1;A_2;...;A_{2n}$ gấp 20 lần so với số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1;A_2;...;A_{2n}$. Vậy giá trị của n là:

A. $n=10$. **B.** $n=12$. **C.** $n=8$. **D.** $n=14$.

Câu 16. Giả sử ta dùng 5 màu để tô màu cho 3 nước khác nhau trên bản đồ và không có màu nào được dùng hai lần. Số các cách để chọn những màu cần dùng là:

A. $\dfrac{5!}{2!}$. **B.** 5.3. **C.** $\dfrac{5!}{3!2!}$. **D.** 5^3.

Câu 17. Ông bà An cùng 6 đứa con đang lên máy bay theo một hàng dọc. Có bao nhiêu cách xếp hàng khác nhau nếu ông An và bà An đứng ở đầu hoặc cuối hàng?

A. 720. **B.** 1440. **C.** 20160. **D.** 40320.

Câu 18. Có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu khó, 10 câu trung bình, 15 câu dễ. Từ 30 câu đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu khác nhau, sao cho mỗi đề phải có 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu dễ không ít hơn 2?

A. 142506. **B.** 56875. **C.** 10500. **D.** 22750.

Câu 19. Biển đăng kí xe ô tô có 6 chữ số và hai chữ cái trong số 26 chữ cái (không dùng các chữ I và O). Chữ số đầu tiên khác 0. Hỏi số ô tô được đăng kí nhiều nhất có thể là bao nhiêu?

A. 5184.10^5. **B.** 576.10^6. **C.** 33384960. **D.** 4968.10^5.

Câu 20. Một bộ ghép hình gồm các miếng gỗ. Mỗi miếng gỗ được đặc trưng bởi 4 tiêu chuẩn: chất liệu, màu sắc, hình dạng và kích cỡ. Biết rằng có 2 chất liệu (gỗ, nhựa); có 4 màu (xanh, đỏ, lam, vàng); có 4 hình dạng (hình tròn, vuông, tam giác, lục giác) và có 3 kích cỡ (nhỏ, vừa, lớn). Xét miếng gỗ "nhựa, đỏ, hình tròn, vừa". Hỏi có bao nhiêu miếng gỗ khác miếng gỗ trên ở đúng hai tiêu chuẩn?

A. 29. **B.** 39. **C.** 48. **D.** 56.

Câu 21. Có 5 bi đỏ và 5 bi trắng có kích thước đôi một khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các bi này thành một hàng dài sao cho hai bi cùng màu không được nằm kề nhau?

A. 28800. **B.** 86400. **C.** 43200. **D.** 720.

Câu 22. Cho $X=\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau từ X sao cho một trong 3 chữ số đầu tiên phải có mặt chữ số 1

A. 2880. **B.** 840. **C.** 1440. **D.** 2520.

Câu 23. Một hộp bi có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi xanh. Có bao nhiêu cách để lấy 4 viên bi từ hộp sao cho trong 4 viên bi lấy được số bi đỏ lớn hơn số bi vàng?

A. 125. **B.** 275. **C.** 150. **D.** 270.

Câu 24. Cho hai đường thẳng song song $d_1;d_2$. Trên đường thẳng d_1 lấy 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 lấy 15 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác tạo thành mà ba đỉnh của nó được chọn từ 25 điểm vừa nói ở trên?

A. $C_{10}^2C_{15}^1$. **B.** $C_{10}^1C_{15}^2$. **C.** $C_{10}^2C_{15}^1+C_{10}^1C_{15}^2$. **D.** $C_{10}^2C_{15}^1C_{10}^1C_{15}^2$.

Câu 25. Từ các chữ số của tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số trong đó chữ số 2 xuất hiện đúng ba lần, các chữ số còn lại đôi một khác nhau?

A. 31203. **B.** 12600. **C.** 181440. **D.** 36.

Câu 26. Trong mặt phẳng cho 2010 điểm phân biệt sao cho ba điểm bất kì không thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu vecto mà có điểm đầu và điểm cuối thuộc 2010 điểm đã cho?

A. 4040100. **B.** 4038090. **C.** 2021055. **D.** 2019045.

Câu 27. Cho hai đường thẳng song song $d_1;d_2$. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt $(n\ge 2)$. Biết rằng có 2800 tam giác có đỉnh là các điểm nói trên. Vậy n có giá trị là?

A. 20. **B.** 21. **C.** 30. **D.** 32.

Câu 28. Trong mặt phẳng cho n điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và trong tất cả các đường thẳng nối hai điểm bất kì không có hai đường thẳng nào song song, trùng nhau hoặc vuông góc. Qua mỗi điểm vẽ các đường thẳng vuông góc với các đường thẳng được xác định bởi 2 trong $n-1$ điểm còn lại. Số giao điểm của các đường thẳng vuông góc giao nhau nhiều nhất là bao nhiêu?

A. $2C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}-\left[n\left(C_{n-1}^2-1\right)+5C_n^3\right]$. **B.** $2C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}-2\left[n\left(C_{n-1}^2-1\right)+5C_n^3\right]$.

C. $3C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}-2\left[nC_{n-1}^2-1+5C_n^3\right]$. **D.** $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}-\left[n\left(C_{n-1}^2-1\right)+5C_n^3\right]$.

Câu 29. Một bữa tiệc bàn tròn của các câu lạc bộ trong trường Đại học Sư Phạm Hà Nội trong đó có 3 thành viên từ câu lạc bộ Máu Sư Phạm, 5 thành viên từ câu lạc bộ Truyền thông và 7 thành viên từ câu lạc bộ Kĩ năng. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho các thành viên sao cho những người cùng câu lạc bộ thì ngồi cạnh nhau?

A. 7257600. **B.** 7293732. **C.** 3174012. **D.** 1418746.

Câu 30. Có 7 bông hồng đỏ, 8 bông hồng vàng, 10 bông hồng trắng, các bông hồng khác nhau từng đôi một. Hỏi có bao nhiêu cách lấy 3 bông hồng có đủ ba màu?

A. 560. **B.** 310. **C.** 3014. **D.** 319.

Câu 31. Xếp 6 người (trong đó có một cặp vợ chồng) ngồi quanh bàn tròn có 6 cái ghế không ghi số sao cho cặp vợ chồng ngồi cạnh nhau. Số cách xếp là:

A. 240. **B.** 48. **C.** 120. **D.** 24.

Câu 32. Một dãy ghế dài có 10 ghế. Xếp một cặp vợ chồng ngồi vào 2 trong 10 ghế sao cho người vợ ngồi bên phải người chồng (không bắt buộc phải ngồi gần nhau). Số cách xếp là:

A. 45. **B.** 50. **C.** 55. **D.** 90.

Câu 33. Một đoàn tàu có bốn toa đỗ ở sân ga. Có bốn hành khách bước lên tàu. Số trường hợp có thể xảy ra về cách chọn toa của bốn khách là:

A. 24. **B.** 256. **C.** 232. **D.** 1.

Câu 34. Trong một túi đựng 10 viên bi đỏ, 20 viên bi xanh, 15 viên bi vàng. Các viên bi có cùng kích cỡ. Số cách lấy ra 5 viên bi và sắp xếp chúng vào 5 ô sao cho 5 ô bi đó có ít nhất một viên bi đỏ.

A. 146611080. **B.** 38955840. **C.** 897127. **D.** 107655240.

Câu 35. Một bộ bài có 52 lá, có 4 loại: cơ, rô, chuồn, bích mỗi loại có 13 lá. Muốn lấy ra 8 lá bài phải có đúng 1 lá cơ, đúng 3 lá rô và không quá 2 lá bích. Hỏi có mấy cách chọn?

A. 39102206. **B.** 22620312. **C.** 36443836. **D.** 16481894.

Câu 36. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số trong đó các chữ số cách đều chữ số đứng giữa thì giống nhau?

A. 900. **B.** 9000. **C.** 90000. **D.** 27216.

Câu 37. Một lớp có n học sinh ($n > 3$). Thầy chủ nhiệm cần chọn ra một nhóm và cần cử ra một học sinh làm nhóm trưởng. Số học sinh trong mỗi nhóm phải lớn hơn 1 và nhỏ hơn n. Gọi T là số cách chọn, lúc này:

A. $T = \sum_{k=2}^{n-1} kC_n^k$. **B.** $T = n\left(2^{n-1} - 1\right)$. **C.** $T = n2^{n-1}$. **D.** $T = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k$.

Câu 38. Trong một căn phòng có 36 người trong đó có 25 người họ Nguyễn, 11 người họ Trần. Trong số những người họ Nguyễn có 8 cặp là anh em ruột (anh trai và em gái), 9 người còn lại (gồm 4 nam và 5 nữ) không có quan hệ họ hàng với nhau. Trong 11 người họ Trần, có 3 cặp là anh em ruột (anh trai và em gái), 5 người còn lại (gồm 2 nam và 3 nữ) không có quan hệ họ hàng với nhau. Chọn ngẫu nhiên 2 người.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai người cùng họ và khác giới tính?

A. 156. **B.** 30. **C.** 186. **D.** 126.

b) Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai người sao cho không có cặp anh em ruột nào?

A. 619. **B.** 630. **C.** 11. **D.** 25.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Đáp án A.

a) Bước 1: Chọn bạn nam có 17 cách. Bước 2: Chọn bạn nữ có 11 cách. Theo quy tắc nhân ta có $17.11 = 187$ cách

b) Số cách để chọn ra 1 bạn nam làm lớp trưởng là 17. Số cách để chọn ra 1 bạn nữ làm lớp trưởng là 11. Vậy có $11 + 17 = 28$ cách.

Câu 2. Đáp án C.

Đi từ A đến D có $4.2.3 = 24$ cách.

Đi từ D về B có $3.2 = 6$ cách.

Vậy đi từ A đến D rồi quay lại B có $6.24 = 144$ cách.

Câu 3. Đáp án B.

Gọi A là tập các học sinh khá môn Toán, B là tập các học sinh khá môn Ngữ Văn. Theo đề ta có: $|A| = 25; |B| = 24; |A \cap B| = 10$.

Theo quy tắc tính số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn bất kì ta có: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 24 - 10 = 39$

Vậy lớp học có $39 + 3 = 42$ học sinh.

Câu 4. Đáp án A.

Kí hiệu A,B,C tương ứng là tập hợp các thí sinh đạt điểm giỏi ở ít nhất một trong ba môn là Toán, Vật lý, Hóa học. $|A|=51;|B|=73;|C|=64;|A\cap B|=32;|B\cap C|=45;|A\cap C|=21;|A\cap B\cap C|=10.$

Lúc này ta có $A\cup B\cup C$ là tập hợp các học sinh đạt điểm giỏi ở ít nhất một trong ba môn là Toán, Vật lý, Hóa học. Ta có:

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|=51+73+64-32-45-21+10=100.$

Vậy số thí sinh dự tuyển vào công ty VEDU là $100+767=867$.

Câu 5. Đáp án B.

Theo quy tắc tính số phần tử của ba tập hợp hữu hạn bất kì, ta có số người xem ít nhất một bộ phim là $28+26+14-8-4-3+2=55$ người.

Vậy số người không xem bất cứ bộ phim nào là $100-55=45$ người**.**

Câu 6. Đáp án B.

Chọn 1 vở kịch có 2 cách. Chọn 1 điệu múa có 3 cách. Chọn 1 bài hát có 6 cách.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $2.3.6=36$ cách**.**

Câu 7. Đáp án A.

Nhận xét: Bài toán là sự kết hợp giữa quy tắc cộng và quy tắc nhân.

Do hai viên bi cùng màu không được ở cạnh nhau nên ta có trường hợp sau:

Phương án 1: Các bi đỏ *ở* vị trí lẻ. Có 8 cách chọn bi đỏ ở vị trí số 1.

Có 7 cách chọn bi đỏ ở vị trí số 3.

….

Có 1 cách chọn bi đỏ ở vị trí số 15.

Suy ra có $8.7.6...3.2.1$ cách xếp 8 bi đỏ.Tương tự có $8.7.6...3.2.1$ cách xếp 8 bi xanh.

Vậy có $(8.7...3.2.1)^2$ cách xếp.

Phương án 2: Các bi đỏ *ở* vị trí chẵn ta cũng có cách xếp tương tự.

Vậy theo quy tắc cộng ta có $(8!)^2+(8!)^2=3251404800$.

Câu 8. Đáp án C.

Cách 1:

Bước 1: Học sinh đầu tiên, giả sử đó là học sinh lớp A có 10 cách chọn ghế.

Bước 2: Có 5 cách chọn ra một học sinh lớp B ngồi vào ghế đối diện.

Bước 3: Có 8 cách chọn ra một học sinh lớp A vào ghế tiếp theo.

Bước 4: Có 4 cách chọn ra học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Bước 5: Có 6 cách chọn ra học sinh lớp A.

Bước 6: Có 3 cách chọn học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Bước 7: Có 4 cách chọn học sinh lớp A vào ghế tiếp.

Bước 8: Có 2 cách chọn học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Bước 9: Có 2 cách chọn học sinh lớp A vào ghế kế tiếp.

Bước 10: Có 1 cách chọn học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Theo quy tắc nhân thì có $10.5.8.4.6.3.4.2.2.1=(5!)^2.2^5=460800$ cách.

Cách 2:

Vì 2 học sinh ngồi đối diện nhau thì khác lớp nên mỗi cặp ghế đối diện nhau sẽ được xếp bởi 1 học sinh lớp A và 1 học sinh lớp B.

Số cách xếp 5 học sinh lớp A vào 5 cặp ghế là $5!$ cách. Số cách xếp 5 học sinh lớp B vào 5 cặp ghế là $5!$ cách. Số cách xếp chỗ ở mỗi cặp ghế là 2 cách.

Theo quy tắc nhân thì có $(5!)^2.2^5 = 460800$ cách.

Câu 9. Đáp án A.

Bước 1: Có 20 cách chọn người đàn ông đầu tiên.

Bước 2: Sau đó chỉ có 1 cách chọn vợ của anh ta.

Bước 3: Có 19 cách chọn người đàn ông tiếp theo.

Bước 4: Sau đó chỉ có 1 cách chọn vợ của anh ta.

Vậy theo quy tắc nhân thì có $20.1.19.1 = 380$ cách.

Câu 10. Đáp án A.

TH1: Số có 10 chữ số 5 : chỉ có 1 số duy nhất.

TH2: Số có 9 chữ số 5 và 1 chữ số 2.

Xếp 9 số 5 thành hàng có 1 cách. Khi đó tạo nên 10 "vách ngăn" để xếp số 2.

Xếp số 2 có C_{10}^1 cách. Vậy có C_{10}^1 số.

TH3: Số có 8 chữ số 5 và 2 chữ số 2.

Tương tự sử dụng phương pháp tạo vách ngăn như TH2 thì tìm được C_9^2 số.

TH4: Số có 7 chữ số 5 và 3 chữ số 2 : có C_8^3 số.

TH5: Số có 6 chữ số 5 và 4 chữ số 2 : có C_7^4 số.

TH6: Có 5 chữ số 5 và 5 chữ số 2 : có C_6^5 số.

Vậy theo quy tắc cộng thì có $1 + C_{10}^1 + C_9^2 + C^3 + C_7^4 + C_6^5 = 144$ số.

Câu 11. Đáp án A.

Ta sử dụng phương pháp tạo "vách ngăn" được giới thiệu ở phần lí thuyết.

Bước 1: Xếp vị trí cho 6 học sinh có $6!$ cách.

Bước 2: Do đề yêu cầu mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh nên ta chỉ tính 5 vách ngăn được tạo ra giữa 6 học sinh. Số cách xếp 3 thầy giáo vào 5 vị trí là A_5^3 cách.

Vậy theo quy tắc nhân thì có $6!.A_5^3 = 43200$ cách.

Câu 12. Đáp án C.

Do ở đây việc tìm trực tiếp sẽ có nhiều trường hợp nên ta sẽ giải bài toán bằng cách gián tiếp. Ta sẽ đi tìm bài toán đối.

Ta đi tìm số cách chọn ra 5 bạn mà trong đó có cả hai bạn Thùy và Thiện.

Bước 1: Chọn nhóm 3 em trong 13 em, trừ Thùy và Thiện thì có $C_{13}^3 = 286$ cách.

Bước 2: Ghép 2 em Thùy và Thiện có 1 cách.

Vậy theo quy tắc nhân thì có 286 cách chọn 5 em trong đó cả Thùy hoặc Thiện đều được chọn.

- Chọn 5 em bất kì trong số 15 em có $C_{15}^5 = 3003$ cách. Vậy theo yêu cầu đề bài thì có tất cả $3003 - 286 = 2717$ cách chọn mà trong đó có ít nhất một trong hai em Thùy và Thiện không được chọn.

Câu 13. Đáp án A.

Do ở đây xuất hiện dấu hiệu cúa phương pháp "buộc" phần từ đó là các phần tử được xếp cạnh nhau nên ta áp dụng như sau:

Bước 1: Buộc 3 em nữ thành một buộc thì số cách đổi vị trí các em nữ trong buộc đó là $3!$ cách.

Bước 2: Sau khi buộc 3 em nữ thì ta chỉ còn 8 phần tử. Số cách xếp 8 phần từ này là $8!$ cách.

Theo quy tắc nhân thì có $3!.8! = 241920$ cách.

Câu 14. Đáp án D.

Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số cần lập. Theo giả thiết $a_3 + a_4 + a_5 = 8$. Suy ra $a_3; a_4; a_5 \in \{1;2;5\}$ hoặc $a_3; a_4; a_5 \in \{1;3;4\}$

TH1: $a_3; a_4; a_5 \in \{1;2;5\}$

Có $3!$ cách chọn $\overline{a_3a_4a_5}$. Xếp $a_1; a_2; a_6$ có A_6^3 cách. Vậy theo quy tắc nhân thì có $3!A_6^3 = 720$ số.

TH2: $a_3; a_4; a_5 \in \{1;3;4\}$

Tương tự ta cũng tìm được 720 số.

Vậy có tất cả $720 + 720 = 1440$ số.

Câu 15. Đáp án C.

Số tam giác có 3 đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$ là C_{2n}^3.

Ứng với hai đường chéo đi qua tâm của đa giác $A_1A_2...A_{2n}$ cho tương ứng một hình chữ nhật có 4 đỉnh là 4 điểm trong $2n$ điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$ và ngược lại mỗi hình chữ nhật như vậy sẽ cho ra 2 đường chéo đi qua tâm O của đa giác.

Mà số đường chéo đi qua tâm của đa giác đều $2n$ đỉnh là n nên số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong $2n$ điểm là C_n^2

Theo đề bài ta có: $C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \dfrac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} = \dfrac{20n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n = 8$.

Câu 16. Đáp án C.

Số cách chọn ra 3 màu trong 5 màu mà không có màu nào trùng nhau là $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!.2!}$.

Câu 17. Đáp án B.

Bước 1: Xếp chỗ cho hai ông bà An có 2 cách.

Bước 2: xếp chỗ cho 6 người con có $6!$ cách.

Theo quy tắc nhân thì có $2.6! = 1440$ cách

Câu 18. Đáp án A.

Xét các trường hợp:

THI: Đề gồm 2 câu dễ, 2 câu khó, 1 câu trung bình thì có $C_{15}^2C_5^2C_{10}^1 = 10500$ đề.

TH2: Đề gồm 2 câu dễ, 1 câu khó và 2 câu trung bình thì có $C_{15}^2C_5^1C_{10}^2 = 23625$ đề.

TH3: Đề gồm 3 câu dễ, 1 câu khó và 1 câu trung bình thì có $C_{15}^3C_5^1C_{10}^1 = 22750$ đề.

Theo quy tắc cộng thì có $10500+23625+22750=56875$ đề.

Câu 19. Đáp án A.

Theo quy tắc nhân ta thực hiện từng bước. Chữ cái đầu tiên có 24 cách chọn. Chữ cái tiếp theo cũng có 24 cách chọn.

Chữ số đầu tiên có 9 cách chọn

Chữ số thứ hai có 10 cách chọn.

Chữ số thứ ba có 10 cách chọn

Chữ số thứ bốn có 10 cách chọn

Chữ số thứ năm có 10 cách chọn

Chữ số thứ sáu có 10 cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $24.24.9.10^5=5184.10^5$ là số ô tô nhiều nhất có thể đăng ký.

Câu 20. Đáp án A.

Có $C_4^2=6$ cách chọn 2 trong 4 tiêu chuẩn.

Với hai tiêu chuẩn "chất liệu, cỡ" thì có $1.2=2$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Với hai tiêu chuẩn "chất liệu, màu" thì có $1.3=3$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Với hai tiêu chuẩn "chất liệu, dạng" thì có $1.3=3$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Với hai tiêu chuẩn "cỡ, dạng" thì có $2.3=6$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Với hai tiêu chuẩn "cỡ, màu" thì có $3.3=9$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Tóm lại có $2+3+3+6+6+9=29$ miếng.

Câu 21. Đáp án A.

Ta thấy điều kiện xếp là hai bi cùng màu không nằm cạnh nhau nên ta phải xếp xen kẽ các viên bi.

Có 2 cách chọn viên bi đầu tiên (có thể là đỏ hoặc trắng). Mỗi cách chọn có $5!$ cách xếp 5 bi đỏ và có $5!$ cách xếp 5 bi trắng. Vậy có $2.5!.5!=28800$ cách xếp.

Nhiều bạn có lời giải sai như sau: Ở đây ta áp dụng quy tắc "vách ngăn" để giải quyết bài toán. Số cách xếp 5 bi đỏ là có $5!$ cách. 5 bi đỏ tạo ra 6 vách ngăn để xếp 5 bi trắng vào. Số cách xếp 5 bi trắng là A_6^5 cách.

Vậy số cách xếp các viên bi là $5!.A_6^5=86400$. Từ đây chọn B là sai. Do nếu theo quy tắc vách ngăn ở đây có 6 vách mà có 5 bi, tức là có thể có vách ngăn trống khiến cho 2 viên bi cùng màu cạnh nhau.

Câu 22. Đáp án A.

Gọi số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{abcde}$.

TH1: Nếu $a=1$ khi đó có $A_7^4=840$ cách chọn 4 chữ số xếp vào b,c,d,e.

TH2: Nếu $a\neq 1$, khi đó: Có 6 cách chọn a. Có 2 cách xếp chữ số 1 vào số cần tạo ở vị trí b hoặc c. Các chữ số còn lại trong số cần tạo có A_6^3 cách chọn. Như vậy trường hợp này có $2.6.A_6^3=1440$ số.

Vậy có tất cả $840+1440=2280$ số.

Chú ý: Nhiều độc giả quên mất $a\neq 0$ nên tính cả $a=0$ nên dẫn đến ra D là sai.

Câu 23. Đáp án B.

Các trường hợp lấy được 4 bi trong đó số bi đỏ lớn hơn số bi vàng như sau:

***TH1:** Số bi lấy được không có bi vàng:

- lấy 4 bi đỏ: Có C_5^4 cách

- Lấy 1 bi đỏ, 3 bi xanh có $C_5^1C_4^3$ cách.

- Lấy 2 bi đỏ, 2 bi xanh có $C_5^2C_4^2$ cách.

- Lấy 3 bi đỏ, 1 bi xanh có $C_5^3C_4^1$ cách.

***TH2:** 4 bi lấy được có đúng 1 bi vàng

- Lấy 2 bi đỏ, 1 bi vàng, 1 bi xanh có $C_5^2C_3^1C_4^1$ cách.

- Lấy 3 bi đỏ, 1 bi vàng có $C_5^3C_3^1$ cách.

Vậy số cách là: $C_5^4+C_5^1C_4^3+C_5^2C_4^2+C_5^3C_4^1+C_5^2C_3^1C_4^1+C_5^3C_3^1=275$

Câu 24. Đáp án C.

Ta có 2 trường hợp:

TH1:tam giác gồm hai đỉnh thuộc d_1 và một đỉnh thuộc d_2. Số cách chọn bộ hai điểm trong 10 điểm thuộc d_1 là C_{10}^2. Số cách chọn một điểm trong 15 điểm thuộc d_2 là C_{15}^1.Theo quy tắc nhân thì có $C_{10}^2C_{15}^1$ tam giác.

TH2: Gồm một đỉnh thuộc d_1 và hai đỉnh thuộc d_2. Tương tự ta tìm được $C_{10}^1C_{15}^2$ tam giác thỏa mãn.

Vậy theo quy tắc cộng thì có tất cả $C_{10}^2C_{15}^1+C_{10}^1C_{15}^2$ tam giác.

Câu 25. Đáp án B.

Có C_7^3 cách để xếp 3 chữ số 2. Khi đó có A_6^4 cách xếp 4 chữ số còn lại. Vậy có $C_7^3A_6^4=12600$ số.

Câu 26. Đáp án A.

Cách 1: Chú ý: *Bài toán không nói vectơ có khác vectơ không nên ta vẫn xét cả vectơ không ở đây. Và 2 điểm khác nhau tạo nên 2 vectơ có điểm đầu và điểm cuối hoán vị cho nhau nên ở đây việc chọn vectơ sẽ sử dụng chỉnh hợp chứ không phải tổ hợp.*

TH1: Có 2010 vectơ không được tạo thành.

TH2: Các vectơ khác vectơ không

Mỗi vectơ thỏa mãn yêu cầu bài toán ứng với một chỉnh hợp chập 2 của 2010, nên số vectơ cần tìm là A_{2010}^2. Theo quy tắc cộng thì có $A_{2010}^2+2010=4040100$ vectơ tạo thành.

Cách 2*:* Có 2010 cách chọn điểm đầu. có 2010 cách chọn điểm cuối. $\Rightarrow$ Có $2010^2=4040100$ vectơ.

Câu 27. Đáp án A.

Tương tự Câu 24 ta có số tam giác được tạo thành theo n là

$$C_{10}^1C_n^2+C_{10}^2C_n^1=2800 \Leftrightarrow 10\frac{n(n-1)}{2}+45n=2800 \Leftrightarrow n^2+8n-560=0 \Leftrightarrow n=20.$$

Câu 28. Đáp án D.

*Gọi n điểm đã cho là $A_1, A_2, ..., A_n$. Xét một điểm cố định, khi đó có C_{n-1}^2 đường thẳng được xác định bởi 2 trong $n-1$ điểm còn lại nên sẽ có C_{n-1}^2 đường thẳng vuông góc đi qua điểm cố định đó.

*Do đó có tất cả $nC_{n-1}^2 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}$ đường thẳng vuông góc nên có $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}$ giao điểm (tính cả những giao điểm trùng nhau)

*Ta chia các điểm trùng nhau thành 3 loại

- Qua một điểm có $C_{n-1}^2 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ đường thẳng vuông góc nên ta phải trừ đi $n\left(C_{n-1}^2 - 1\right)$ điểm.

- Qua ba điểm A_1, A_2, A_3 của 1 tam giác có 3 đường thẳng cùng vuông góc với A_4A_5 và 3 đường thẳng này song song với nhau nên ta mất 3 giao điểm, do đó trong TH này ta phải loại đi $3C_n^3$

- Trong mỗi tam giác thì ba đường cao chỉ có một giao điểm, nên ta mất 2 điểm cho mỗi tam giác, do đó trường hợp này ta phải trừ đi $2C_n^3$.

Vậy số giao điểm nhiều nhất có được là: $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}} - \left[n\left(C_{n-1}^2 - 1\right) + 5C_n^3\right]$.

Câu 29. Đáp án A.

Do các thành viên cùng câu lạc bộ thì ngồi cạnh nhau nên ta sử dụng phương pháp "buộc" các phần tưt để giải quyết bài toán.

Lúc này ta có 3 phần tử đó là 3 câu lạc bộ. Theo công thức hoán vị vòng quanh được giới thiệu ở phần ví dụ thì ta có $2!$ cách xếp 3 câu lạc bộ vào bàn tròn. Với mỗi cách xếp thì có:

$3!$ cách xếp các thành viên CLB Máu Sư phạm.

$5!$ cách xếp các thành viên CLB Truyền thông.

$7!$ cách xếp các thành viên CLB Kỹ năng.

Vậy theo quy tắc nhân thì có tất cả: $2!.3!.5!.7! = 7257600$ cách xếp.

Câu 30. Đáp án A.

Cách 1: Số cách lấy 3 bông hồng bất kì: $C_{25}^3 = 2300$

Số cách lấy 3 bông hòng chỉ có một màu: $C_7^3 + C_8^3 + C_{10}^3 = 211$

Số cách lấy 3 bông hồng có đúng hai màu: $C_{15}^3 + C_{17}^3 + C_{18}^3 - 2\left(C_7^3 + C_8^3 + C_{10}^3\right) = 1529$

Vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2300 - 211 - 1529 = 560$.

Cách 2: Có 7 cách chọn bông hồng màu đỏ. Có 8 cách chọn bông hồng màu vàng. Có 10 cách chọn bông hồng màu trắng. $\Rightarrow$ Có $7.8.10 = 560$ cách.

Câu 31. Đáp án B.

Áp dụng quy tắc "buộc" các phần tử ta có $2!$ cách xếp hai vợ chồng. Sau khi "buộc" hai vợ chồng lại thì ta có tất cả 5 phần tử. Theo công thức hoán vị vòng quanh thì số cách xếp 5 phần tử quanh bàn tròn là $4!$.

Vậy theo quy tắc nhân thì có $2!.4! = 48$.

Câu 32. Đáp án A.

Ta lần lượt đánh số các ghế từ 1 đến 10.

- Nếu người chồng ở vị trí số 1 thì có 9 cách xếp người vợ.
- Nếu người chồng ở vị trí số 2 thì có 8 cách xếp người vợ.
- ….
- Nếu người chồng ở vị trí số 9 thì có 1 cách xếp người vợ.

Vậy có tất cả $9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$ cách.

Câu 33. Đáp án B.

Chọn toa cho vị khách thứ nhất có 4 cách. Chọn toa cho vị khách thứ hai có 4 cách.

Chọn toa cho vị khách thứ ba có 4 cách. Chọn toa cho vị khách thứ tư có 4 cách.

Theo quy tắc nhân thì có $4^4=256$ cách chọn toa cho bốn khách.

Câu 34. Đáp án D.

Bước 1: Chọn bi

- Số cách chọn ra 5 viên bi bất kì là C_{45}^5 cách.
- Số cách chọn ra 5 viên bi trong đó không có viên bi đỏ nào là C_{35}^5 cách.

- Số cách chọn ra 5 viên bi trong đó có ít nhất một viên bi màu đỏ là $C_{45}^5-C_{35}^5$ cách.

Bước 2: Sắp xếp các viên bi.

Số cách xếp 5 viên bi vào 5 ô là $5!$

Theo quy tắc nhân thì có $5!.(C_{45}^5-C_{35}^5)=107655240$.

Câu 35. Đáp án A.

Xét các trường hợp sau:

- Lấy được 1 lá cờ, 3 lá rô và 4 chuồn thì có $C_3^1C_{13}^3C_{13}^1C_{13}^3=22620312$ cách lấy.

Theo quy tắc cộng thì có tất cả $22620312+13823524+2658370=39102206$ cách lấy.

Câu 36. Đáp án A.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcab}$.

Có 9 cách chọn a.

Có 10 cách chọn b.

Có 10 cách chọn c.

Vậy có tất cả $9.10.10=900$ số.

Câu 37. Đáp án A.

Gọi A_k là phương án: Chọn nhóm có k học sinh và chỉ định nhóm trưởng của nhóm.

Thầy chủ nhiệm có các phương án $A_2,A_3,A_4,...,A_{n-1}$. Ta tính xem có bao nhiêu cách thực hiện.

Phương án A_k có hai công đoạn:

- Công đoạn 1: Chọn k học sinh có C_n^k cách chọn.

- Công đoạn 2: Chỉ định nhóm trưởng: có k cách chọn.

Theo quy tắc nhân thì phương án A_k có kC_n^k cách thực hiện.

Vậy theo quy tắc cộng thì $T=\sum_{k=2}^{n-1}kC_n^k$.

Câu 38.

a) Đáp án C.

* Có $8+4=12$ nam họ Nguyễn và có $8+5=13$ nữ họ Nguyễn. Vậy có $12.13=156$ cặp cùng họ Nguyễn mà khắc giới tính.

* Tương tự có $5.6=30$ cách chọ cặp cùng họ Trần mà khác giới tính.

Vậy có $156+30=186$ cách chọn hai người cùng họ và khác giới tính.

b) Đáp án A.

Ta có $8+3=11$ cặp anh em trong đó 8 cặp họ Nguyễn và 3 cặp họ Trần.

Chọn bất kì 2 người trong số 36 người thì có $C_{36}^2=630$ cách chọn.

Vậy có tất cả $630-11=619$ cách chọn các cặp sao cho không có cặp anh em nào.

NHỊ THỨC NEWTON

A. LÝ THUYẾT

1. Công thức nhị thức Newton

Khai triển $(a+b)$ được cho bởi công thức sau:

Định lý 1

Với a, b là các số thực và n là sô nguyên dương, ta có

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^k a^{n-k}b^k+\ldots+C_n^n b^n.(1)$$

Quy ước $a^0=b^0=1$

Công thức trên được gọi là công thức nhị thức Newton (viết tắt là Nhị thức Newton).

STUDY TIP

Trong biểu thức ở VP của công thức (1)

a) Số các hạng tử là $n+1$.

b) Số các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đén 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n, nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n.

c) Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.

Hệ quả

Với $a=b=1$, thì ta có $2^n=C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n$.

Với $a=1; b=-1$, ta có $0=C_n^0-C_n^1+\ldots+(-1)^k C_n^k+\ldots+(-1)^n C_n^n$

Các dạng khai triển cơ bản nhị thức Newton

$$(x+1)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\ldots+C_n^kx^{n-k}+\ldots+C_n^{n-1}x+C_n^n$$

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^kx^k+\ldots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$$

$$(x-1)^n=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-\ldots+(-1)^k C_n^kx^k+\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}x^{n-1}+(-1)^n C_n^nx^n$$

$$C_n^k=C_n^{n-k}$$

$$C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1},\ (n\ge 1)$$

$$k.C_n^k=\frac{\text{k}.n!}{(n-k)!\text{k}!}=\frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}=nC_{n-1}^{k-1}$$

$$\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{k.n!}{(k+1)(n-k)!k!}=\frac{n(n-1)!}{(n+1)(n-k)!(k+1)!}=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$$

2. Tam giác Pascal.

n = 0						1					
n = 1					1		1				
n = 2				1		2		1			
n = 3			1		3		3		1		
n = 4		1		4		6		4		1	
n = 5	1		5		10		10		5		1

Tam giác Pascal được thiết lập theo quy luật sau

- Đỉnh được ghi số 1. Tiếp theo là hàng thứ nhất ghi hai số 1.
- Nếu biết hàng thứ n $(n \geq 1)$ thì hàng thứ n+1tiếp theo được thiết lập bằng cách cộng hai số liên tiếp của hàng thứ n rồi viết kết quả xuống hàng dưới ở vị trí giữa hai số này. Sau đó viết số 1 ở đầu và cuối hàng.

Nhận xét: Xét hàng thứ nhất, ta có:

$1 = C_1^0,\ 1 = C_1^1.$

Ở hàng thứ 2, ta có

$1 = C_3^0,\ 2 = C_2^1,\ 1 = C_2^2.$

Ở hàng thứ 3, ta có

$1 = C_3^0,\ 3 = C_3^1, 3 = C_3^2,\ 1 = C_3^3.$

STUDY TIP

Các số ở hàng thứ n trong tam giác Pascal là dãy gồm $(n+1)$ số $C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2, ...,\ C_n^{n-1},\ C_n^n.$

B. Các dạng toán sử dụng công thức tổ hợp và nhị thức Newton

DẠNG 1. Xác định điều kiện của số hạng thỏa mãn yêu cầu cho trước

Phương pháp chung:

- Xác định số hạng tổng quát của khai triển $T^{k+1}C_n^k a^{n-k} b^k$ (số hạng thứ $k+1$).
- Từ T^{k+1} kết hợp với yêu cầu bài toán ta thiết lập một phương trình (thông thường theo biến k).
- Giải phương trình để tìm kết quả.

Ví dụ 1. Trong khai triển $\left(a^2 - \frac{1}{b}\right)$, số hạng thứ 5 là

A. $-35a^6b^{-4}$. **B.** $35a^6b^{-4}$. **C.** $-24a^4b^{-5}$. **D.** $24a^4b^{-5}$

Lời giải

Đáp án B.

Theo công thức tổng quát ở lý thuyết thì ta có số hạng thứ 5 là

$C_7^4\left(a^2\right)^3\left(-\frac{1}{b}\right)^4 = 35a^6b^{-4}.$

Ví dụ 2. Trong khai triển $\left(2\sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right), (x > 0)$ số hạng không chứa x sau khi khai triển là

A. 4354560. **B.** 13440. **C.** 60466176. **D.** 20736.

Lời giải

Đáp án A.

Ta có $\left(2\sqrt[3]{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{10}=\left(2.x^{\frac{1}{3}}-3.x^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$

Từ lý thuyết ở trên ta có số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là

$C_{10}^{k}.2^{10-k}.3^{k}.x^{\frac{10-k}{3}}.x^{-\frac{k}{2}}=C_{10}^{k}.2^{10-k}.3^{k}.x^{\frac{20-5k}{6}}$. Theo yêu cầu đề bài ta có $20-5k=0\Leftrightarrow k=4$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $C_{10}^{4}.2^{6}.3^{4}=210.256.81=435460$.

STUDY TIP

Trong các bài toán tìm số hạng trong khi khai triển các nhị thức, ta chú ý các công thức sau

$$\left(x^{m}\right)^{n}=x^{m.n},\ x^{m}.x^{n}=x^{m+n}$$

$$\frac{x^{m}}{x^{n}}=x^{m-n},\ \sqrt[n]{x^{m}}=x^{\frac{m}{n}}$$

Cho bài toán:

Cho nhị thức $P=\left[a(x)+b(x)\right]^{n}$ tìm số hạng chứa x^{α} (không chứa x khi $\alpha=0$) trong khai triển đa thức P.

- Giải phương trình tổ hợp hoặc sử dụng công thức tính tổng để tìm n (nếu giả thuyết chưa cho n).
- Số hạng tổng quát trong khai triển $T_{k+1}=g(n,k).x^{f(n,k)}$.
- Theo đề thì $f(n,k)=\alpha\Rightarrow k=k_{0}$. Thay $k=k_{0}$ vào $g(n,k)$ thì ta có số hạng cần tìm.

Ví dụ 3. Cho n là số dương thỏa mãn $5C_{n}^{n-1}=C_{n}^{3}$. Số hạng chứa x^{5} trong khai triển nhị thức Newton $P=\left(\frac{nx^{2}}{14}-\frac{1}{x}\right)^{n}$ với $x\neq 0$ là

A. $-\frac{35}{16}$. **B.** $-\frac{16}{35}$. **C.** $-\frac{35}{16}x^{5}$. **D.** $-\frac{16}{35}x^{5}$.

Lời giải

Đáp án C.

Điều kiện $n\in\mathbb{N},\ n\geq 3$.

Ta có $5C_{n}^{n-1}=C_{n}^{3}\Leftrightarrow\frac{5.n!}{1!.(n-1)!}=\frac{n!}{3!.(n-3)!}\Leftrightarrow\frac{5}{(n-3)!(n-2)(n-1)}=\frac{1}{6.(n-3)!}$

$$\Leftrightarrow n^{2}-3n-28=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=7\ (TM)\\ n=-4\ (L)\end{array}\right.$$

Với $n=7$ ta có $P=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}\right)^7$

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1}=\frac{(-1)^k}{2^{7-k}}.C_7^k.x^{14-3k}$

Suy ra $14-3k=5 \Leftrightarrow k=3$

Vậy số hạng chứa x^5 trong khai triển là $T_4=-\frac{35}{16}x^5$.

STUDY TIP

Chú ý phân biệt giữa hệ số và số hạng.

Với $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{g(k)}$; Số hạng chứa x^α tương ứng với $g(k)=\alpha$; giải phương trình ta tìm được k.

$*$ Nếu $k\in\mathbb{N}$; $k\le n$ thì hệ số phải tìm là a_k.

$*$ Nếu $k\notin\mathbb{N}$ hoặc $k>n$ thì trong khai triển không có số hạng chứa x^α, hệ số phải tìm bằng 0.

Ví dụ 4. Trong khai triển biểu thức $F=\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^9$ số hạng nguyên có giá trị lớn nhất là

A. 8. **B.** 4536. **C.** 4528. **D.** 4520.

Lời giải

Đáp án B.

Ta có số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_9^k\left(\sqrt{3}\right)^{9-k}\left(\sqrt[3]{2}\right)^k$

Ta thấy bậc hai của căn thức là 2 và 3 là hai số nguyên tố, do đó để T_{k+1} là một số nguyên thì $\begin{cases} k\in\mathbb{N} \\ 0\le k\le 9 \\ (9-k)\,\vdots\,2 \\ k\,\vdots\,3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=3\Rightarrow T_4=C_9^3\left(\sqrt{3}\right)^6\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=4536 \\ k=9\Rightarrow T_{10}=C_9^9\left(\sqrt{3}\right)^0\left(\sqrt[3]{2}\right)^9=8 \end{array}\right.$

Vậy trong khai triển có hai số hạng nguyên là $T_4=4536$ và $T_{10}=8$.

Ví dụ 5. Tìm hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển đa thức $P(x)=(2x+1)^{13}=a_0x^{13}+a_1x^{12}+...+a^{13}$.

A. 8. **B.** 4536. **C.** 4528. **D.** 4520.

Lời giải

Đáp án A.

Ta có số hạng tổng quát sau khi khai triển nhị thức $(2x+1)^{13}$ là $a_n=C_{13}^n.2^{13-n}$.

$\Rightarrow a_{n-1}=C_{13}^{n-1}.2^{14-n}$, $(n=1,2,3,...,13)$

Xét bất phương trình với ẩn số n ta có $a_{n-1} \le a_n \Leftrightarrow C_{13}^{n-1}.2^{14-n} \le C_n^{13}.2^{13-n}$

$$\Leftrightarrow \frac{2.13!}{(n-1)!(14-n)!} \le \frac{13!}{n!(13-n)!} \Leftrightarrow \frac{2}{14-n} \le \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \le \frac{14}{3} \notin \mathbb{N}.$$

Do đó bất đẳng thức $a_{n-1} \le a_n$ đúng với $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ và dấu đẳng thức không không xảy ra.

Ta được $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ và $a_4 > a_5 > a_6 > ... > a_{13}$

Từ đây ta có hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển nhị thức là

$a_4 = C_{13}^4.2^9 = 366080.$

Phương pháp giải

Giả sử sau khi khai triển ta được đa thức $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

Xét các khả năng sau:

1. Nếu $a_k > 0 \,\forall k$ (trường hợp $a_k < 0 \,\forall k$ tương tự)

Ta xét bất phương trình $a_k \le a_{k+1}$, thông thường giải ra được nghiệm $k \le k_0 \in \mathbb{N}$. Do k nguyên nên $k = 0,1,...,k_0$. Từ đó suy ra bất phương trình $a_k > a_{k+1}$ có nghiệm $k > k_0$.

Chú ý rằng trong các bài toán về nhị thứ Newton thì phương trình $a_k = a_{k+1}$ là bậc nhất theo k nên có nhiều nhất một nghiệm và nếu có thì phương trình đó là $k = k_0$. Như vậy có hai khả năng xảy:

Nếu $a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = k_0$ thì ta có: $a_0 < a_1 < ... < a_{k_0-1} < a_{k_0} = a_{k_0+1} > a_{k_0+2} > ... > a_n$

Khi đó ta tìm được hai hệ số lớn nhất là $a_{k_0} = a_{k_0+1}$

Nếu phương trình $a_k = a_{k+1}$ vô nghiệm thì ta có:

$a_0 < a_1 < ... < a_{k_0-1} < a_{k_0} > a_{k_0+1} > a_{k_0+2} > ... > a_n.$

Khi đó ta có a_{k_0} là hệ số lớn nhất trong khai triển của nhị thức.

2. Nếu $a_{2k} > 0 \,\forall k$ và $a_{2k+1} < 0 \,\forall k$ (trường hợp $a_{2k} < 0 \,\forall k$ và $a_{2k+1} > 0 \,\forall k$ tương tự) thì khi đó bài toán trở thành tìm số lớn nhất trong các số a_{2k}. Ta cũng xét bất phương trình $a_{2k} \le a_{2k+2}$ rồi làm tương tự như phần 1.

STUDY TIP

Phương pháp tìm hệ số lớn nhất trong khai triển

+ Áp dụng khai triển $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

+ Xác định số hạng tổng quát $C_n^k a^{n-k} b^k$ suy ra hệ số tổng quát là một dãy số theo a_k.

+ Xét tính tăng giảm của a_k từ đó tìm được k tương ứng. Suy ra hệ số lớn nhất trong khai triển.

✹Đọc thêm

Một thuật toán khai triển nhanh tam thức Newton

Bài toán: khai triển tam thức Newton sau $(a+b+c)^n$

Lời giải tổng quát

Bước 1: Viết tam giác Pascal đến dòng thứ n, để có được hệ số của nhị thức Newton $(b+c)^n$.

Bước 2: Ở các đầu dòng ta viết các đơn thức là khai triển nhị thức Newton $(a+1)^n$.

Bước 3: Nhân lần lượt các đơn thức ở đầu dòng mỗi cột với các đơn thức còn lại trên mỗi dòng đó rồi cộng các kết quả lại, ta thu được kết quả khai triển.

Cụ thể ta có ở dưới đây

$1.a^n$				1			
$C_n^1.a^{n-1}$			$1b$		$1c$		
$C_n^2.a^{n-2}$		$1b^2$		$2bc$		$1c^2$	
$C_n^1.a^{n-3}$	$1b^2$		$3b^2c$		$3bc^2$		$1c^2$
				...			
$1.a^o$	$1.b^n$	$C_n^1.b^{n-1}.c$		...		$C_n^{n-1}.b.c^{n-1}$	$1.c^n$

Sau khi cộng lại ta được:

$$\left(a+b+c\right)^n=\sum_{p=0}^{n}C_n^p.a^{n-p}.(\sum_{q=0}^{n}C_p^q.b^{n-q}.c^q)=\sum_{0\le q\le p\le n}C_n^p.C_p^q.b^{n-q}.c^q.a^{n-p}$$

STUDY TIP

Sau khi khai triển $(a+b+c)^n$ với $0\le q\le p\le n$ số hạng thứ $p+1$ trong khai triển là $T_p=C_n^p.C_p^q.b^{n-q}.c^q.a^{n-p}$.

Ví dụ 6. Hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $P(x)=\left(3x^2+x+1\right)^{10}$ là:

A. 1695. **B.** 1485. **C.** 405. **D.** 360.

Đáp án A.

Lời giải

Với $0\le q\le p\le 10$ thì số hạng tổng quát của khai triển $P(x)=\left(3x^2+x+1\right)^{10}$ là:

$$T_p=C_{10}^p.C_p^q.(3x^2)^{10-p}.(x)^{p-q}.1^q=C_{10}^p.C_p^q.3^{10-p}.(x)^{p-q+20-2p}$$

Theo đề bài thì $p-q+20-2p=4\Leftrightarrow p+q=16$

Do $0\le q\le p\le 10$ nên $(p;q)\in\{(8;8);(9;7);(10;6)\}$.

Vậy hệ số của x^4 trong khai triển $P(x)=\left(3x^2+x+1\right)^{10}$ là:

$$C_{10}^8.C_8^8.3^{10-8}+C_{10}^9.C_9^7.3^{10-9}+C_{10}^{10}.C_{10}^6.3^{10-10}=1695.$$

STUDY TIP

Chú ý khi ra nhiều trường hợp của (p,q) thì ta công hệ số các trường hợp với nhau để có kết quả.

Ví dụ 7. Tìm số hạng chứa x^{13} trong khai triển thành các đa thức của $\left(x+x^2+x^3\right)^{10}$ là:

A. 135. **B.** 45. **C.** $135x^{13}$. **D.** $45x^{13}$.

Đáp án C.

Lời giải

Với $0 \le q \le p \le 10$ thì số hạng tổng quát của khai triển $\left(x+x^2+x^3\right)^{10}$ là:

$$T_p = C_{10}^p.C_p^q.(x)^{10-p}.(x^2)^{p-q}.(x^3)^q = C_{10}^p.C_p^q.3^{10-p}.(x)^{10+p+q}$$

Theo đề bài thì $10+p+q=13 \Leftrightarrow p+q=3$

Do $0 \le q \le p \le 10$ nên $(p;q) \in \{(2;1);(3;0)\}$.

Vậy hệ số của x^{13} trong khai triển là: $C_{10}^2.C_2^1 + C_{10}^3.C_3^0 = 210$.

Dạng 2: Các bài toán về công thức tổ hợp và nhị thức Newton

Các bài toán về công thức tổ hợp và nhị thức Newton

Một số công thức thường dùng trong các bài tập dạng này như sau:

$C_n^k = C_n^{n-k}$ $\qquad$ $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1},\ (n>1)$

$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1} \quad (*)$ $\qquad$ $\dfrac{1}{k+1}C_n^k = \dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

$2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$ $\qquad$ $2^{n-1} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 ... + C_n^{2\left[\frac{n}{2}\right]}$

$2^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 ... + C_n^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}$

STUDY TIP

Ngoài ra từ công thức $(*)$ ta mở rộng được công thức:

$C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2} = C_{n+2}^{k+2}$

$C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}$

Ví dụ 1. Cho $n;k \in \mathbb{N}^*, k \le n$ trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào **sai?**

A. $C_n^k = \dfrac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$.. $\qquad$ **B.** $\dfrac{1}{k+1}C_n^k = \dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$..

C. $C_n^k = C_n^{n-k}$.. $\qquad$ **D.** $nC_n^k = kC_{n-1}^{k-1}$.

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: **Giải theo phương pháp tự luận**

Với A: Ta có $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n}{k}\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \dfrac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$

Từ A ta suy ra $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, từ đây ta có luôn D sai. Ta chọn D.

Đọc thêm: Chứng minh B; C.

Với B: $\dfrac{1}{k+1}C_n^k = \dfrac{n!}{(k+1)(n-k)!k!} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)(n-k)!(k+1)!} = \dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

Với C: Ta có $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^{n-k}$

Cách 2: **Sử dụng máy tính để thử**

Với các bài toán xét đẳng thức đúng thi ta có thể sử dụng máy tính để thử. Ta thử với từng trường hợp, thử với cặp số cụ thể.

Ví dụ với A ta thử ngay với $k=3; n=4$ ta thấy đẳng thức này đúng, suy ra A đúng, từ đây suy ra D sai.

Math ▲
$4C3 - \dfrac{4}{3} \times 3C2$
0

STUDY TIP

Đẳng thức ở phương án A là một đẳng thức quan trọng trong các bài toán về công thức tổ hợp Ta có hai hệ quả quan trọng như sau:

Với mọi $n; k \in \mathbb{N}^*, 2 \le k \le n$

- **Hệ quả 1:** Ta có
  $(k-1)kC_n^k = (n-1)nC_{n-2}^{k-2}$
- **Hệ quả 2:** Ta có
  $k^2C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$

Ví dụ 2. Cho $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $6n - 6 + C_n^3 \ge C_{n+1}^3$, Số các số n thỏa mãn là:.

A. 10 số. **B.** 9 số. **C.** 8 số. **D.** 7 số.

Đáp án A.

Lời giải

Điều kiện $n \ge 3$. Ta có $6n - 6 + C_n^3 \ge C_{n+1}^3 \Leftrightarrow 6n - 6 \ge C_n^2 \left(do\, C_{n+1}^3 = C_n^3 + C_n^{32} \right)$

$\Leftrightarrow 6n - 6 \ge \dfrac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow n^2 - 13n + 12 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le n \le 12.$

Ví dụ 3. Cho $S = C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^{10} + ... + C_{15}^{15}$. Tính S.

A. $S = 2^{15}$. **B.** $S = 2^{14}$. **C.** $S = 2^{13}$. **D.** $S = 2^{12}$.

Đáp án B

Lời giải

Cách 1: Sử dụng đẳng thức $C_n^k = C_n^{n-k}$ ta được:

$S = C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^{10} + ... + C_{15}^{15} = C_{15}^7 + C_{15}^6 + C_{15}^5 + ... + C_{15}^0.$

$\Rightarrow 2S = (C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^{10} + ... + C_{15}^{15}) + (C_{15}^7 + C_{15}^6 + C_{15}^5 + ... + C_{15}^0) = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k = 2^{15}$

$\Rightarrow S = 2^{14}$

Vậy $S = (C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^{10} + ... + C_{15}^{15}) = 2^{14}$

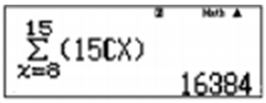
Cách 2: Sử dụng máy tính Casio

Do bài toán này, tổng bé và số các số hạng trong tổng ít nên ta có sử dụng lệnh tổng trong máy tính Caiso bằng cách bấm máy: $SHIFT\ LOG_{\square}\square(\sum_{\square}^{\square}\square)$.

Ta nhập $SHIFT\ LOG_{\square}15\ SHIFT \div alpha\,)\nabla 8\Delta 15 =$

STUDY TIP

Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.



Với các bài toán tính tổng ở trên ta cần chú ý kỹ thuật sử dụng các đẳng thức cơ bản sau:

$C_n^k = C_n^{n-k}, C_n^k = \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$ và các hệ quả: $\begin{cases} k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} \\ k^2C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1} \end{cases}$

Đẳng thức Pascal: $C_m^k = C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1}$

$$\begin{cases} C_m^0 - C_m^1 + C_m^2 - ... + (-1)^{m-1}C_m^{m-1} + (-1)^m C_m^m = (-1+1)^m = 0 \\ C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + ... + C_m^{m-1} + C_m^m = (1+1)^m = 2^m \end{cases}$$

Xét $m = 2n$: $\begin{cases} C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - ... + (-1)^{2n-1}C_{2n}^{2n-1} + (-1)^{2n} C_{2n}^{2n} = (-1+1)^m = 0 \\ C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = (1+1)^{2n} = 2^{2n} \end{cases}$

Cộng vế theo vế, trừ vế theo vế, ta được kết quả sau:

$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + ... + C_{2n}^{2n-2} + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + ... + C_{2n}^{2n-3} + C_{2n}^{2n-1} = 2^{n-1}$

Xét $m = 2n + 1$, hoàn toàn tương tự, ta được:

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+!}^4 + ... + C_{2n+1}^{2n} = C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n}$$

Ví dụ 4. Trong các đẳng thức sau đẳng thức nào sai?

A. $S_1 = 1C_n^1 + 2C_n^2 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = n2^{n-1}$.

B. $S_2 = 1.2.C_n^1 + 2.3.C_n^2 + ... + (n-1).n.C_n^n = (n-1).n.C_{n-2}^{k-2}$.

C. $S_3 = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + ... + (n-1)^2C_n^{n-1} + n^2C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$.

D. $S_4 = \frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + ... + \frac{C_n^{n-1}}{n} + \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}(2^n - 1)$.

Đáp án D.

Lời giải

Ta có thể sử dụng máy tính để thử trường hợp riêng của đẳng thức trên, tôi xin phép không đưa cách làm cụ thể vì độc giả có thể dễ dàng giải được.

Tôi xin giới thiệu cách chứng minh cụ thể như sau:

Với A: Ta sẽ dùng đẳng thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

Khi đó ta có:

$S_1 = 1C_n^1 + 2C_n^2 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k$

$= \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} = n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + ... + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) = n(1+1)^{n-1} = n.2^{n-1}$

Vậy A đúng.

Với B: Ta sẽ dùng đẳng thức $(k-1)kC_n^k = (n-1)nC_{n-1}^{k-1}$.

Khi đó ta có:

$S_2 = 1.2C_n^1 + 2.3C_n^2 + ... + (n-1).nC_n^{n-1} = \sum_{k=2}^{n}(k-1)kC_n^k = \sum_{k=2}^{n}(n-1)nC_{n-2}^{k-2}$

$= (n-1)n(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + ... + C_{n-2}^{n-3} + C_{n-2}^{n-2}) = (n-1)n.2^{n-2}$

Vậy B đúng.

Với C: Ta có $k^2C_n^k = (n-1)nC_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$.

Khi đó ta có: $S_3 = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 ... + (n-1)^2 C_n^{n-1} + n^2C_n^n$.

$= \sum_{k=1}^{n} k^2C_n^k = \sum_{k=1}^{n}\left[(n-1)nC_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}\right]$.

$= (n-1)n\left(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-2}^2 + ... + C_{n-2}^{n-3} + C_{n-2}^{n-2}\right) + n\left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + ... + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}\right)$.

$= (n-1)n2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$..

Vậy C đúng.

Từ đây ta chọn ***D.***

Đọc thêm tính tổng S_4*:* Các số hạng của S_4 có dạng $\frac{C_n^k}{k+1}$ nên ta sẽ dùng đẳng thức $\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$.

Khi đó ta có: $S_4 = \frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + ... + \frac{C_n^{n-1}}{n} + \frac{C_n^n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$.

$= \frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + ... + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - C_{n+1}^0\right) = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right)$.

STUDY TIP.

* Các số hạng của S_3 có dạng $k^2C_n^k$ nên ta dùng đẳng thức $k^2C_n^k = (n-1)nC_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$.

* Các số hạng của S_4 có dạng $\frac{C_n^k}{k+1}$ nên ta sẽ dùng đẳng thức $\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$.

Ví dụ 5. Một học sinh giải bài toán "Rút gọn biểu thức $S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + ... + (-1)^k C_n^k$ với $k \le n$; $n > 1$."

Như sau:

Bước 1: Ta áp dụng công thức $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1} = C_n^{k+1}$.

$S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 ... + (-1)^k C_n^k$.

$= C_n^0 - \left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1\right) + \left(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2\right) - \left(C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3\right) + ... + (-1)^k\left(C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k\right)$.

Bước 2: Mở dấu ngoặc ta có:

$S_k = C_n^0 - C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 - C_{n-1}^2 - C_{n-1}^3 + (-1)^k C_{n-1}^{k-1} + (-1)^k C_{n-1}^k$.

Bước 3: Vậy với mọi k thì $S_k = (-1)^k C_{n-1}^k$.

Kết luận nào sau đây là đúng:

A. Lời giải trên sai từ bước 1. **B.** Lời giải trên sai từ bước 2.

C. Lời giải trên sai ở bước 3. **D.** Lời giải trên đúng.

Đáp án A.

Lời giải.

Ta thấy lời giải trên sai khi đã không xét hai trường hợp $k < n$; hoặc $k = n$.

Vì nếu $k = n$ thì không tồn tại C_{n-1}^k.

Rất nhiều học sinh mắc sai lầm khi giải như trên, hoặc sai lầm khi giải như sau:

$S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 ... + (-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0$.

Ta có lời giải đúng như sau:

TH1: Với $k < n$, ta áp dụng công thức $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1} = C_n^{k+1}$, ta có:

$S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 ... + (-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0$.

$= C_n^0 - \left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1\right) + \left(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2\right) - \left(C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3\right) + ... + (-1)^k \left(C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k\right)$.

$= C_n^0 - C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 - C_{n-1}^2 - C_{n-1}^3 + ... + (-1)^k C_{n-1}^{k-1} + (-1)^k C_{n-1}^k$.

Vậy $S_k = (-1)^k C_{n-1}^k$ khi $k < n$.

TH2: Với $k = n$, thì $S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 ... + (-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0$.

STUDY TIP.

Trong các bài toán mà các số k, n tổng quát ta cần lưu ý phân rõ trường hợp $k < n$ và $k = n$.

Ví dụ 6. Tính tổng $S = 1.C_{2018}^1 + 2.C_{2018}^2 + 3.C_{2018}^3 + \ldots + 2018.C_{2018}^{2018}$

A. 2018.2^{2017}. **B.** 2017.2^{2018}. **C.** 2018.2^{2018}. **D.** 2017.2^{2017}.

Đáp án A.

Lời giải.

Cách 1: Xét số hạng tổng quát.

$$k.C_{2018}^k = k.\frac{2018!}{k!(2018-k)!} = k.\frac{2018.2017!}{k.(k-1)!\ (2018-k)!} = 2018.C_{2017}^{k-1}.$$

Cho k chạy từ 1 đến 2018 ta được:

$S = 2108.C_{2017}^0 + C_{2017}^1 + \ldots + C_{2017}^{2017} = 2018.2^{2017}$.

STUDY TIP.

Với các bài toán tính tổng thường sử dụng công thức $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Cách 2: Khi các em học đạo hàm ở cuối chương trình lớp 11 ta sẽ nghiên cứu ở chương đạo hàm. Khi đó ta xét hàm số:.

$f(x) = (1+x)^{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 x + ... + C_{2018}^{2018} x^{2018}$.

$\Rightarrow f'(x) = 2018.(1+x)^{2017} = C_{2018}^1 + 2C_{2018}^2 x + ... + 2018.C_{2018}^{2018} x^{2017}$.

$\Rightarrow f'(1) = 2018.2^{2017} = C_{2018}^1 + 2C_{2018}^2 + ... + 2018.C_{2018}^{2018}$.

$\Rightarrow 2018.2^{2017} = S \Rightarrow$ ta chọn **A.**

Ví dụ 7. Tính tổng $S = C_{2017}^0 + \frac{1}{2}C_{2017}^1 + \frac{1}{3}C_{2017}^2 + ... + \frac{1}{2018}C_{2017}^{2017}$

A. $\frac{2^{2017}-1}{2017}$. **B.** $\frac{2^{2018}-1}{2018}$. **C.** $\frac{2^{2018}-1}{2017}$. **D.** $\frac{2^{2017}-1}{2018}$.

Đáp án B.

Lời giải.

Cách 1: Xét số hạng tổng quát $\frac{1}{k+1}C_{2017}^k$, ta có:.

$$\frac{1}{k+1}C_{2017}^k = \frac{1}{1+k}\frac{2017!}{k!(2017-k)!} = \frac{1}{2018}\frac{2018!}{(k+1)!(2017-k)!} = \frac{1}{2018}C_{2018}^{k+1}.$$

Vậy $\frac{1}{k+1}C_{2017}^k = \frac{1}{2018}C_{2018}^{k+1}$, cho k chạy từ 0 đến 2017 thì ta được:.

$$S = \frac{1}{2018}\left[C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + C_{2018}^2 + ... + C_{2018}^{2018}\right] - \frac{C_{2018}^0}{2018} = \frac{1}{2018}2^{2018} - \frac{1}{2018} = \frac{2^{2018}-1}{2018}..$$

Cách 2: Sử dụng tích phân (các em sẽ học ở chương trình lớp 12).

Xét $f(x) = (1+x)^{2017} = C_{2017}^0 + C_{2017}^1 x + C_{2017}^2 x^2 + ... + C_{2017}^{2017}x^{2017}$.

$$\Rightarrow \int_0^1 (1+x)^{2017}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[C_{2017}^0 + C_{2017}^1 x + C_{2017}^2 x^2 + ... + C_{2017}^{2017}x^{2017}\right]\mathrm{d}x.$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(1+x)^{2018}}{2018}\right|_0^1 = \left.\left[C_{2017}^0 x + \frac{1}{2}C_{2017}^1 x^2 + \frac{1}{3}C_{2017}^2 x^3 + ... + \frac{1}{2018}C_{2017}^{2017}x^{2018}\right]\right|_0^1.$$

$\Leftrightarrow \frac{2^{2018}-1}{2018} = S$. Chọn **B.**

Ví dụ 8. ***(đọc thêm)**: Cho hai đẳng thức sau với $n > 1;\ n \in \mathbb{N}$.

$$S_1 = C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - ... + (-1)^n (n+1)C_n^n = 0, \ (1)$$
$$S_2 = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}, \ (2).$$

Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng.

A. (1) đúng, (2) sai. **B.** (1) sai, (2) đúng.

C. Cả hai đều sai. **D.** Cả hai đều đúng.

Đáp án D.

Lời giải.

Ta có thể sử dụng máy tính để thử trường hợp riêng của các đẳng thức trên, tôi xin phép không đưa ra cách làm cụ thể vì độc giả có thể dễ dàng thử được.

Dưới đây tôi xin giới thiệu hai phương pháp tính tổng sử dụng đạo hàm và tích phân ta học cuối chương trình 11 và đầu chương trình 12.

STUDY TIP.

Có thể tính tổng.

$S_1 = C_n^0 + 2aC_n^1 + ... + (n+1)a^n C_n^n$

$S_2 = C_{2n}^0 + 3a^2 C_{2n}^2 + ... + (2n+1)a^{2n} C_{2n}^{2n}$.

$S_3 = 2aC_{2n}^1 + 4a^3 C_{2n}^3 + 6a^4 C_{2n}^4 + ... + 2na^{2n-1} C_{2n}^{2n-1}$

khi xét đa thức $P(x) = x(1+x)^n$ và chứng tỏ rằng $S_1 = P'(a)$.

Xét đa thức $Q(x) = x(1+x)^{2n}$ và chứng tỏ rằng.

$2S_2 = Q'(a) + Q'(-a)$;

$2S_3 = Q'(a) - Q'(-a)$.

Ta có thể giải thích cụ thể như sau:

*** Với S_1:**

Ta khai triển đa thức $P(x) = x(1+x)^n$.

$P(x) = C_n^0 x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + ... + C_n^n x^{n+1}$, nên.

$P'(x) = C_n^0 + 2C_n^1 x + 3C_n^2 x^2 + ... + (n+1)C_n^n x^n$;

$P'(-1) = C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - ... + (-1)^n (n+1)C_n^n = S_1$.

Mặt khác $P'(x) = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} \Rightarrow P'(-1) = 0$.

Vậy $S_1 = 0$.

*** Với *S_2*:**

Xét đa thức $P(x) = (1+x)^n$, ta có: $P(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$.

Suy ra $\int_0^1 P(x)\,dx = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = S_2$.

Do đó $S_2 = \int_0^1 (1+x)^n\,dx = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

STUDY TIP.

Có thể tính tổng: $S = (b-a)C_n^0 + \frac{b^2-a^2}{2}C_n^1 + \frac{b^3-a^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}C_n^n$ khi xét đa thức:

$P(x) = (1+x)^n$ và chứng tỏ rằng $S = \int_a^b P(x)\,dx$.

Ta thường gặp bài toán với một trong 2 cận của tích phân là 0 và 1, hoặc -1. Trong một số trường hợp ta phải xét đa thức $P(x) = x^k(1+x)^n$ với $k = 1, 2, ...$

Dạng 3. Phương trình, bất phương trình chứa công thức tổ hợp.

Ví dụ 1. Cho phương trình $A_x^3 + 2C_{x+1}^{x-1} - 3C_{x-1}^{x-3} = 3x^2 + P_6 + 159$. Giả sử $x = x_0$ là nghiệm của phương trình trên, lúc này ta có

A. $x_0 \in (10;\ 13)$. **B.** $x_0 \in (12;\ 14)$. **C.** $x_0 \in (10;\ 12)$. **D.** $x_0 \in (14;\ 16)$.

Đáp án A.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3, x \in \mathbb{N}$. Phương trình đã cho có dạng:.

$$\frac{x!}{(x-3)!}+\frac{2(x+1)!}{2!(x-1)!}-\frac{3(x-1)!}{2!(x-3)!}=3x^2+6!+159.$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2)+x(x+1)-\frac{3}{2}(x-1)(x-2)=3x^2+879.$$

$\Leftrightarrow x=12$ (sử dụng lệnh SHIFT SOLVE trên máy tính).

STUDY TIP.

Khi sử dụng lệnh SHIFT SOLVE ta nên rút gọn phương trình về đa thức, không nên để dạng phân thức vì máy tính ưu tiên sử lý các dạng phương trình không chứa phân thức trước.

Ví dụ 2. Bất phương trình $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}.C_x^3+10$ có tập nghiệm là:

A. $S=[3;\ 5]$. **B.** $S=[3;\ 4]$. **C.** $S=\{3;\ 4;\ 5\}$. **D.** $S=\{3;\ 4\}$.

Đáp án D.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3, x \in \mathbb{N}$.

Ta có bất phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{2x!}{(2x-2)!}-\frac{x!}{(x-2)!} \leq \frac{6}{x}\frac{x!}{3!(x-3)!}+10$.

$\Leftrightarrow 2x^2-x-x^2+x \leq x^2-3x+2+10$.

$\Leftrightarrow 3x \leq 12 \Leftrightarrow x \leq 4.$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta có $3 \leq x \leq 4$. Vậy $S=\{3;\ 4\}$ là tập nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 3. Tổng của ba số hạng liên tiếp lập thành cấp số cộng trong dãy số sau $C_{23}^0; C_{23}^1; \ldots; C_{23}^{13}$ có giá trị là

A. 2451570. **B.** 3848222. **C.** 836418. **D.** 1307527.

Đáp án A.

Lời giải.

Giả sử 3 số $C_{23}^n; C_{23}^{n+1}; C_{23}^{n+2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi

$2C_{23}^{n+1}=C_{23}^n+C_{23}^{n+2}$.

$\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1}=C_{23}^n+C_{23}^{n+2}$.

$\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1}=C_{25}^{n+2}$

$$\Leftrightarrow \frac{4.23!}{(n+1)!(22-n)!}=\frac{25!}{(n+2)!(23-n)!}.$$

$$\Rightarrow (n+2)(23-n)=150 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=8\ (tm) \\ n=13\ (l) \end{array}\right..$$

Vậy $C_{23}^8+C_{23}^9+C_{23}^{10}=2451570$.

STUDY TIP.

Một số tình huống thường gặp thì lập phương trình tổ hợp là:.

* Ba số a,b,c lập thành cấp số cộng (hoặc cấp số nhân) khi và chỉ khi $2b=a+c$ (hoặc $b^2=ac$).

* Cho tập hợp A có n phần tử, số tập con của A gồm x phần tử bằng k lần số tập con của A gồm y phần tử, tương ứng với phương trình $C_n^x=kC_n^y$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Trong khai triển nhị thức Newton $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$, số hạng có số mũ a và b bằng nhau là

A. C_{21}^{12}. **B.** $C_{21}^{12}a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}$. **C.** $C_{21}^{9}a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}$. **D.** C_{21}^{9}.

Câu 2. Khi khai triển nhị thức Newton $G(x)=(ax+1)^n$ thì ta thấy trong đó xuất hiện hai số hạng $24x$ và $252x^2$. Lúc này giá trị của a và n là

A. $a=3;n=8$. **B.** $a=4;n=6$.

C. $a=2;n=12$. **D.** $a=3;n=7$.

Câu 3. Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $(x+1)^{10}$ là

A. $C_{10}^5x^5$. **B.** $C_{10}^6x^5$. **C.** 252. **D.** 210.

Câu 4. Hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển $\left(\frac{4}{x}-3x^3\right)^{15}$ là

A. $3^6C_{15}^9x^9$. **B.** $3^62^{18}C_{15}^9x^9$.

C. $3^6C_{15}^9$. **D.** $3^62^{18}C_{15}^9$.

Câu 5. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$ là

A. $2^6C_{20}^6$. **B.** 2^8. **C.** $2^8C_{20}^8$. **D.** 2^6.

Câu 6. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2+\frac{1}{x}-1\right)^{10}$ là

A. 1951. **B.** 1950. **C.** 3150. **D.** -360.

Câu 7. Số hạng chứa x^8 trong khai triển $(x^3-x^2-1)^8$ là

A. $168x^8$. **B.** 168. **C.** $238x^8$. **D.** 238.

Câu 8. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1+C_n^3=13n$.

A. C_{10}^6. **B.** C_{10}^5. **C.** C_{10}^{10}. **D.** C_{10}^3.

Câu 9. Giả sử có khai triển $(1-2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$. Tìm a_5 biết $a_0+a_1+a_2=71$.

A. $672x^5$. **B.** -672. **C.** $-672x^5$. **D.** 672.

Câu 10. Hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức $(x+2)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn $3^n C_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = 2048$.

A. $22x^{10}$. **B.** $123x^{10}$. **C.** 123. **D.** 22.

Câu 11. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ biết $n \geq 2$ là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^2 - C_{n+1}^{n-2} = 14 - 14n$.

A. 73789. **B.** 73788. **C.** 72864. **D.** 56232.

Câu 12. Cho khai triển: $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}, n \geq 2$ với $a_0, a_1, a_2, ..., a_{2n}$ là các hệ số. Tính tổng $S = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{2n}$ biết $\dfrac{a_3}{14} = \dfrac{a_4}{41}$.

A. $S = 3^{10}$. **B.** $S = 3^{12}$. **C.** $S = 2^{10}$. **D.** $S = 2^{12}$.

Câu 13. Số lớn nhất trong các số $C_{16}^0; C_{16}^1; C_{16}^2; ...; C_{16}^{15}; C_{16}^{16}$ là

A. C_{16}^7. **B.** C_{16}^6. **C.** C_{16}^9. **D.** C_{16}^8.

Câu 14. Hệ số lớn nhất trong khai triển $(x+2)^{10}$ là

A. C_{10}^5. **B.** 128. **C.** 15360. **D.** C_{10}^3.

Câu 15. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^2 - 3C_n^{n-1} = 11n$.

Xét khai triển $P(x) = (x+2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Hệ số lớn nhất của $P(x)$ là

A. $C_{15}^5.2^{11}$. **B.** $C_{15}^5.2^{10}$. **C.** 252. **D.** 129024.

Câu 16. Giả sử $P(x) = (2x+1)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ thỏa mãn $a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{2^2} + ... + \dfrac{a_n}{2^n} = 2^{12}$. Hệ số lớn nhất trong các hệ số $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_n\}$ là

A. 126720. **B.** 495. **C.** 256. **D.** 591360.

Câu 17. Cho khai triển $(x+2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Tìm tất cả các giá trị của n để $\max\{a_0, a_1, a_2, ..., a_n\} = a_{10}$.

A. $\{29;30;31;32\}$. **B.** 12.

C. $\{12;13;14;15\}$. **D.** 16.

Câu 18. Cho n là số nguyên dương. Gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n(x+2)^n$. Tìm n sao cho $a_{3n-3} = 26n$.

A. $n = 10$. **B.** $n = 3$. **C.** $n = 4$. **D.** $n = 5$.

Câu 19. Khi khai triển nhị thức Newton $G(x) = (ax+1)^n$ thì ta thấy trong đó xuất hiện hai số hạng $24x$ và $252x^2$. Tìm a và n.

A. $a = 3; n = 8$. **B.** $a = 2; n = 7$.

C. $a=4;n=9$. **D.** $a=5;n=10$.

Câu 20. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

$$\frac{C_n^1}{2}-\frac{2C_n^2}{2^2}+\frac{3C_n^3}{2^3}-...+(-1)^{n-2}\frac{(n-1)C_n^{n-1}}{2^{n-1}}+(-1)^{n-1}\frac{nC_n^n}{2^n}=\frac{1}{32}$$

A. $n=10$. **B.** $n=9$. **C.** $n=8$. **D.** $n=7$.

Câu 21. Cho $S=1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+n(n+1)(n+2)$. Kết quả biểu diễn S theo n là

A. $S=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. **B.** $S=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

C. $S=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$. **D.** $S=n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Câu 22. Tính tổng $S=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n$ theo n ta được

A. $S=2^{n-1}-1$. **B.** $S=2^n-1$. **C.** $S=2^{n-1}$. **D.** $S=2^n$.

Câu 23. Giá trị của n thỏa mãn $C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+...+2^2C_n^n=243$. là

A. $n=7$. **B.** $n=3$. **C.** $n=5$. **D.** $n=4$.

Câu 24. Tính tổng $S=\frac{1}{2!2017!}+\frac{1}{4!2015!}+\frac{1}{6!2013!}+...+\frac{1}{2016!3!}+\frac{1}{2018!}$ theo n ta được

A. $S=\frac{2^{2018}-1}{2017!}$. **B.** $S=\frac{2^{2018}-1}{2017}$.

C. $S=\frac{2^{2018}}{2017!}$. **D.** $S=\frac{2^{2018}}{2017}$.

Câu 25. Cho số nguyên $n\ge 3$. Giả sử ta có khai triển

$(x-1)^{2n}+x(x+1)^{2n-1}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}$. Biết $T=a_0+a_2+...+a_{2n}=768$. Tính a_5.

A. $126x^5$. **B.** $-126x^5$. **C.** 126. **D.** -126.

Câu 26. Tìm n sao cho $C_{2n}^1+C_{2n}^3+...C_{2n}^{2n-1}=2048$. là

A. $n=8$. **B.** $n=6$. **C.** $n=7$. **D.** $n=9$.

Câu 27. Cho khai triển $(1+2x)^{2014}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2014}x^{2014}$. Khi đó tổng

$S=a_1+3^2a_3+...+3^{2010}a_{2011}+3^{2012}a_{2013}$ có giá trị bằng

A. $\frac{7^{2014}-5^{2014}}{6}$. **B.** $\frac{7^{2014}-5^{2014}}{2}$.

C. $\frac{7^{2014}}{6}$. **D.** $\frac{5^{2014}}{2}$.

Câu 28. Tính tổng $S=C_{100}^0-5C_{100}^1+5^2C_{100}^2-...+5^{100}C_{100}^{100}$

A. 6^{100}. **B.** 4^{100}. **C.** 2^{300}. **D.** 3^{200}.

Câu 29. Đẳng thức nào sau đây **sai?**

A. $2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n$.

B. $0=C_n^0-C_n^1+C_n^2-...+(-1)^nC_n^n$.

C. $1=C_n^0-2C_n^1+4C_n^2-...+(-2)^n C_n^n$.

D. $3^n=C_n^0+2C_n^1+4C_n^2+...+2^n C_n^n$.

Câu 30. Khai triển $(2x+y)^5$ ta được kết quả là

A. $32x^5+16x^4y+8x^3y^2+4x^2y^3+2xy^4+y^5$.

B. $32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$.

C. $2x^5+10x^4y+20x^3y^2+20x^2y^3+10xy^4+y^5$.

D. $32x^5+10000x^4y+8000x^3y^2+400x^2y^3+10xy^4+y^5$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Đáp án B.

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}=\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{6}}\right)^{21}=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^k\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}\right)^k\left(b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{6}}\right)^{21-k}=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^k a^{\frac{k}{3}-\frac{21-k}{6}}b^{-\frac{k}{6}+\frac{21-k}{2}}$$

Hệ số của số hạng có số mũ a và b bằng nhau ứng với: $\frac{k}{3}-\frac{21-k}{6}=-\frac{k}{6}+\frac{21-k}{2}\Leftrightarrow k=12$

Vậy số hạng cần tìm là $C_{21}^{12}a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}$.

Câu 2. Đáp án A.

Ta có $G(x)=(ax+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(ax)^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k x^k$

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases}C_n^1ax=24x\\C_n^2a^2x^2=252x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}na=24\\\frac{n(n-1)}{2}a^2=252\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n^2a^2=576\\\frac{n(n-1)}{2}a^2=252\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}na=24\\\frac{2n^2}{n(n-1)}=\frac{16}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}na=24\\14n=16(n-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=8\\a=3\end{cases}$$

Vậy $a=3;n=8$ là các số cần tìm.

Câu 3. Đáp án C.

Số hạng tổng quát sau khi khai triển $T_{k+1}=C_{10}^k x^k$

Số hạng chứa x^5 trong khai triển là $C_{10}^5x^5$. Đề bài hỏi hệ số nên ta chọn C.

Câu 4. Đáp án D.

Ta có $\left(\frac{4}{x}-3x^3\right)^{15}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k(ax)^k=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k\left(\frac{4}{x}\right)^k\left(-3x^3\right)^{15-k}=\sum_{k=0}^{15}(-3)^{15-k}4^kC_{15}^kx^{45-4k}$

Số hạng chứa x^9 tương ứng với $45-4k=9\Leftrightarrow k=9$ nên hệ số của x^9 trong khai triển trên là $(-3)^6 4^9C_{15}^9=3^64^9C_{15}^9$.

Câu 5. Đáp án C.

Ta có $\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}=\sum_{k=0}^{20}C_{20}^{k}\left(2\sqrt{x}\right)^{k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20-k}=\sum_{k=0}^{20}2^{k}C_{20}^{k}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{k}\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{20-k}=\sum_{k=0}^{20}2^{k}C_{20}^{k}x^{\frac{5k-40}{6}}$

Số hạng không chứa x tương ứng với $\frac{5k-40}{6}=0\Leftrightarrow k=8$. Do vậy số hạng đó là $2^{8}C_{20}^{8}$.

Câu 6. Đáp án A.

Từ lý thuyết ta có công thức tổng quát như sau: Với $0\le q\le p\le n$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $\left(x^2+\frac{1}{x}-1\right)^{10}$ là

$$T_p=C_{10}^{p}C_{p}^{q}\left(x^2\right)^{10-p}\left(\frac{1}{x}\right)^{p-q}\left(-1\right)^{q}=C_{10}^{p}C_{p}^{q}\left(-1\right)^{q}x^{20+q-3p}$$

Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với $20+q-3p=0\Leftrightarrow 3p-q=20$. Mà $0\le q\le p\le n$ và $q,p,n\in\mathbb{N}$ nên $(p;q)\in\{(7;1),(8;4)(9;7),(10;10)\}$. Lúc này số hạng không chứa x trong khai triển là $(-1)^1C_{10}^{7}C_{7}^{1}+(-1)^4C_{10}^{8}C_{8}^{4}+(-1)^{10}C_{10}^{10}C_{10}^{10}+(-1)^{7}C_{10}^{9}C_{9}^{7}=1951$

Câu 7. Đáp án C.

Từ lý thuyết ta có công thức tổng quát như sau: Với $0\le q\le p\le n$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $\left(x^3-x^2-1\right)^8$ là

$$T_p=C_{8}^{p}C_{p}^{q}\left(x^3\right)^{8-p}\left(-x^2\right)^{p-q}\left(-1\right)^{q}=C_{8}^{p}C_{p}^{q}x^{24-3p}x^{2p-2q}\left(-1\right)^{p}$$

Ta có: $24-3p+2p-2q=8\Leftrightarrow 24-p-2q=8\Leftrightarrow p+2q=16$. Suy ra $(p;q)\in\{(8;4)(6;5)\}$.

Lúc này hệ số của x^8 trong khai triển là $C_{8}^{8}C_{8}^{4}(-1)^8+C_{10}^{6}C_{6}^{5}(-1)^6=238$

Câu 8. Đáp án A.

Theo giả thiết ta có:

$$C_n^1+C_n^3=13n\Leftrightarrow n+\frac{n!}{3!(n-3)!}=13n\Leftrightarrow n+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=13n\Leftrightarrow n\left(n^2-3n-70\right)=0\Leftrightarrow n=10$$

Khi đó ta có $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^n=\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}\left(x^2\right)^{k}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{10-k}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}x^{5k-30}$

Số hạng không chứa x tương ứng với $5k-30=0\Leftrightarrow k=6$. Vậy số hạng không chứa x trong khai triển đã cho là $C_{10}^{6}=210$.

Câu 9. Đáp án B.

Ta cần biết công thức tổng quát của a_k để thay vào điều kiện $a_0+a_1+a_2=71$, rồi sau đó giải ra để tìm n. Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n=(1-2x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-2x)^k=\sum_{k=0}^{n}(-2)^kC_n^kx^k.$$

Do đó $a_k=(-2)^k C_n^k, \forall k\in\{0,1,2,...,n\}$.. Khi đó theo giả thiết ta có

$71=a_0+a_1+a_2=(-2)^0 C_n^0+(-2)^1 C_n^1+(-2)^2 C_n^2=1-2n+2n(n-1)\Leftrightarrow n^2-2n-35=0\Leftrightarrow n=7.$

Như vậy $a_5=(-2)^5 C_7^5=-672$..

Câu 10. Đáp án D.

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$3^n C_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2-...+(-1)^n C_n^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 3^{n-k}C_n^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k 3^{n-k}=(-1+3)^n=2^n.$$

Do đó $2^n=2048=2^{11}\Leftrightarrow n=11$. Như vậy ta có $(x+2)^n=(x+2)^{11}=\sum_{k=0}^{11}C_{11}^k x^k 2^{11-k}$, suy ra hệ số của x^{10} ứng với $k=10$ và đó là số $C_{11}^{10}.2=22$

Câu 11. Đáp án A.

Ta có $A_n^2-C_{n+1}^{n-2}=14-14n\Leftrightarrow n(n-1)-\dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}=14-14\text{n}$

$\Leftrightarrow (n-1)\left[n-\dfrac{n(n+1)}{6}+14\right]=0\Leftrightarrow (n-1)(n^2-5n-84)=0\Leftrightarrow n=12$ vì $n\ge 2$.

Lúc này ta có $\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)^n=\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)^{12}$

Từ công thức tổng quát tam thức Newton ta có với $0\le q\le p\le 12$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)^{12}$ là

$$T_p=C_{12}^p C_p^q 1^{12-p}(x)^{p-q}\left(\frac{1}{x}\right)^q=C_{12}^p C_p^q x^{p-q-q}=C_{12}^p C_p^q x^{p-2q}$$

Ta có: $p-2q=0\Leftrightarrow p=2q$. Kết hợp với điều kiện ở trên ta có:

$(p;q)\in\{(0;0),(2;1)(4;2),(6;3),(8;4),(10;5),(12;6)\}$. Suy ra số hạng không chứa x là

$C_{12}^0C_0^0+C_{12}^2C_2^1+C_{12}^4C_4^2+C_{12}^6C_6^3+C_{12}^8C_8^4+C_{12}^{10}C_{10}^5+C_{12}^{12}C_{12}^6=73789$

Câu 12. Đáp án A.

Theo giả thiết ta có: $P(x)=(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}$

Thay $x=1$ ta được $S=a_0+a_1+a_2+...+a_{2n}=P(1)=3^n$. Như vậy ta chỉ cần xác định được n

Với $0\le q\le p\le n$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $(1+x+x^2)^n$ là

$$T_p=C_n^p C_p^q 1^{n-p}x^{p-q}(x^2)^q=C_n^p C_p^q x^{p+q}$$

Hệ số của x^3 ứng với: $\begin{cases} p+q=3 \\ 0\le q\le p\le n \end{cases} \Rightarrow (p;q)\in\{(3;0),(2;1)\}$.

Suy ra $a_3=C_n^3C_3^0+C_n^2C_2^1=C_n^3+2C_n^2$.

Hệ số của x^4 ứng với: $\begin{cases} p+q=4 \\ 0\le q\le p\le n \end{cases} \Rightarrow (p;q)\in\{(4;0),(3;1),(2;2)\}$.

Suy ra $a_4=C_n^4C_4^0+C_n^3C_3^1+C_n^2C_2^2=C_n^4+3C_n^3+C_n^2$.

$$\frac{a_3}{14}=\frac{a_4}{41}\Leftrightarrow\frac{1}{14}\frac{n(n-1)(n+4)}{6}=\frac{1}{41}\left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{14}\frac{(n+4)}{3}=\frac{1}{41}\left(\frac{n^2-5n+6}{12}+n-1\right)\Leftrightarrow 7n^2-33n-370=0\Leftrightarrow n=10.$$

Vậy $S=a_0+a_1+a_2+...+a_{2n}=3^{10}$

Câu 13. Đáp án D.

Vì $C_n^k=C_n^{n-k}$ nên ta có $\{C_{16}^0,C_{16}^1,...,C_{16}^8\}=\{C_{16}^{16},C_{16}^{15},...,C_{16}^8\}$, suy ra ta chỉ cần tìm số lớn nhất trong các số $C_{16}^0,C_{16}^1,...,C_{16}^7,C_{16}^8$. Bằng tính toán trực tiếp, ta có

$C_{16}^0=1,C_{16}^1=16,C_{16}^2=120,C_{16}^3=560,C_{16}^4=1820,C_{16}^5=4368,C_{16}^6=8008,C_{16}^7=11440,C_{16}^8=12870$

Như vậy $C_{16}^0<C_{16}^1<C_{16}^2<...<C_{16}^7<C_{16}^8$

Do đó: $C_{16}^8=\max\{C_{16}^0;C_{16}^1;C_{16}^2;...;C_{16}^{15};C_{16}^{16}\}$

Câu 14. Đáp án C.

Ta có $a_k=2^{10-k}C_{10}^k$ với $k=0,1,2,...,10$. Bài toán tương đương với tìm $k\in\{0,1,2,...,10\}$ sao cho a_k lớn nhất. Xét bất phương trình sau:

$$a_k\le a_{k+1}\Leftrightarrow 2^{10-k}C_{10}^k\le 2^{9-k}C_{10}^{k+1}\Leftrightarrow 2\frac{10!}{k!(10-k)!}\le\frac{10!}{(k+1)!(9-k)!}$$

$$\Leftrightarrow 2(k+1)\le 10-k\Leftrightarrow k\le\frac{8}{3}\Leftrightarrow k\in\{0,1,2\}$$

Từ đây ta có: $\begin{cases} a_k\le a_{k+1}\forall k\in\{0;1;2\} \\ a_k=a_{k+1}\Leftrightarrow k=\frac{8}{3},k\notin N \\ a_k>a_{k+1}\forall k\in\{3;4;....10\} \end{cases}$

Do đó: $a_0<a_1<a_2<a_3>a_4>a_5>...>a_{10}$ hay a_3 là hệ số lớn nhất cần tìm. $a_3=C_{10}^3.2^7=15360$.

Câu 15. Đáp án B.

$A_n^2 - 3.C_n^{n-1} = 11n \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!} - 3n = 11n.$

$\Leftrightarrow n(n-1) - 3n = 11n \Leftrightarrow n = 15.$

$(x+2)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^k .2^{15-k}$

Xét bất phương trình: $a_k \le a_{k+1} \Leftrightarrow C_{15}^k .2^{15-k} \le C_{15}^{k+1} .2^{14-k} \Leftrightarrow$

$2\dfrac{15!}{k!.(15-k)!} \le 2\dfrac{15!}{(k+1)!.(14-k)!} \Leftrightarrow \dfrac{2}{15-k} \le \dfrac{1}{k+1} \Leftrightarrow k \le \dfrac{13}{3}, k \in N \Rightarrow k \in \{0,1,2,3,4\}$

Từ đây ta có: $\begin{cases} a_k \le a_{k+1} \forall k \in \{0,1,2,3,4\} \\ a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = \dfrac{13}{3}, k \notin N \\ a_k > a_{k+1} \forall k \in \{5;6;....15\} \end{cases}$

Do đó: $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 > a_6 > a_7 > ... > a_{15}$

Vậy $a_5 = max\{a_i | i = \overline{0,15}\} = C_{15}^5 .2^{10}$

Câu 16. Đáp án A

$2^{12} = a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{2^2} + ... + \dfrac{a^n}{2^n} = a_0 + a_1\left(\dfrac{1}{2}\right) + a_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + ... + a_n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$= P\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(1 + 2.\dfrac{1}{2}\right)^n = 2^n$

$\Rightarrow n = 12$

$(2x+1)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (2x)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k .x^k 2^k.$

$\Rightarrow a_k = C_{12}^k .2^k \forall k\overline{0,12} \Rightarrow a_k \le a_{k+1} \Leftrightarrow C_{12}^k .2^k \le C_{12}^{k+1} .2^{k+1}$

$\dfrac{12!}{k!.(12-k)!} \le \dfrac{12!}{(k+1)!.(11-k)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{12-k} \le \dfrac{2}{k+1}$

$\Leftrightarrow k \le \dfrac{23}{3}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \{0,1,2,3,...7\}$

Từ đây ta có: $\begin{cases} a_k \le a_{k+1} \forall k \in \{0,1,2,3,...7\} \\ a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = \dfrac{23}{3}, k \notin N \\ a_k > a_{k+1} \forall k \in \{8;9;....11\} \end{cases}$

Do đó: $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < ..... < a_8 > a_9 > .... > a_{12}$

Vậy $a_5 = max\{a_i | i = \overline{0,12}\} = C_{12}^8 .2^8$

Câu 17. Đáp án A

Giả sử n là số nguyên dương sao cho:

$max\{a_0,a_1,...a_n\}=a_{10}$

Theo công thức khai triển newton ta có:

$$P(x)=(x+2)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k2^{n-k}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k.x^k2^k.$$

$$\Rightarrow a_k=C_n^k.2^{n-k}\forall k\overline{0,n}$$

Ta có: $a_{10}=max\{a_0,a_1,...a_n\}\Leftrightarrow\begin{cases}a_9\le a_{10}\\a_{10}\ge a_{11}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_n^9.2^{n-9}\le C_n^{10}.2^{n-10}\\C_n^{10}.2^{n-10}\ge C_n^{11}.2^{n-11}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{n-9}\le\dfrac{1}{10}\\\dfrac{1}{11}\le\dfrac{2}{n-10}\end{cases}\Leftrightarrow 29\le n\le 32$$

Các phép biến đổi trên là đương tương nên ta không cần phải thử lại các giá trị trên.

Vậy $n\in\{29,30,31,32\}$ là tất cả các giá trị thỏa mãn bài toán (thử lại thấy thở mãn).

Câu 18. Đáp án D

Theo công thức khai triển Newton ta có:

$$(x^2+1)^n(x+2)^n=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^{2k}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}C_n^ix^i2^{n-i}\right).$$

Số hạng chứa 3^{3n-3} tương ứng với cặp (k,i) thỏa mãn:

$$\begin{cases}2k+i=3n-3\\0\le k;i\le n\end{cases}\Rightarrow(k;i)\in\{(n,n-3);(n-1,n-1)\}$$

Do đó hệ số của 3^{3n-3} là: $a_{3n-3}=C_n^n.2^3.C_n^{n-3}+C_n^{n-1}.2^1.C_n^{n-1}=8C_n^3+2n^2=26n$

$$\Leftrightarrow 8\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+2n^2=26n\Rightarrow 2n^2-3n-35=0\Rightarrow n=5$$

Câu 19. Đáp án A.

Ta có: $G(x)=(ax+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^kx^k$.

Từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases}C_n^1ax=24\\C_n^2a^2x^2=252x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}na=24\\\dfrac{n(n-1)}{2}a^2=252\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n^2a^2=576\\\dfrac{n(n-1)}{2}a^2=252\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}na=24\\\dfrac{2n^2}{n(n-1)}=\dfrac{16}{7}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}na=24\\14n=16(n-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=8\\a=3\end{cases}$$

Vậy $a=3,n=8$ là các số cần tìm.

Câu 20. Đáp án C

Các số hạng của tổng vế trái có dạng:

$$(-1)^{k-1}\frac{kC_n^k}{2^k}=(-1)^{k-1}\frac{nC_{n-1}^{k-1}}{2^k}=\frac{n}{2}C_{n-1}^{k-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Do đó ta có:

$$\frac{C_n^1}{2}-\frac{2C_n^2}{2^2}+\frac{3C_n^3}{2^3}-...+(-1)^{n-2}\frac{(n-1)C_n^{n-1}}{2^{n-1}}+(-1)^{n-1}\frac{nC_n^n}{2^n}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{kC_n^k}{2^k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{2}C_{n-1}^{k-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{n}{2}\sum_{k=1}^{n-1}C_{n-1}^{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}=\frac{n}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)^{n-1}=\frac{n}{2^n}.$$

Như vậy ta cần dùng số nguyên dương n thỏa mãn: $\frac{n}{2^n}=\frac{1}{32}\Leftrightarrow 2^{n-5}=n\Leftrightarrow n=8$.

Câu 21. Đáp án A

Cách 1: Ta có

$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$

$C_{n-1}^k=C_{n-2}^k+C_{n-2}^{k-1}$

$C_{n-2}^k=C_{n-3}^k+C_{n-3}^{k-1}$

....

$C_{k+1}^k=C_k^k+C_k^{k-1}$

$C_k^k=C_{k-1}^k+C_{k-1}^{k-1}$

Cộng các đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-2}^{k-1}+...+C_k^{k-1}+C_{k-1}^{k-1}\quad(*)$

Ta có: $1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+n(n+1)(n+2)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+2)!}{(k-1)!}=6\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+2)!}{3!(k-1)!}=6\sum_{k=1}^{n}C_{k+2}^3=6\left(C_3^3+C_4^3+...+C_{n+1}^3+C_{n+2}^3\right).$$

Áp dụng câu $(*)$ với $k=4$, thay n bởi $n+3$ ta được:

$C_3^3+C_4^3+...+C_{n+1}^3+C_{n+2}^3=C_{n+3}^4$

Vậy $1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+n(n+1)(n+2)=6C_{n+3}^4=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Cách 2: Với bài toán này ta có thể dùng máy tính để thử trường hợp riêng.

Câu 22. Đáp án D

Xét khai triển:

$(a+b)^n=C_n^0b^n+C_n^1a^1b^{n-1}+...+C_n^{n-2}a^{n-2}b^2+C_n^{n-1}a^{n-1}b^1+C_n^na^n$.

Chọn $a=b=1$ ta được $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n$

Câu 23. Đáp án C

Xét khai triển: $(a+b)^n = C_n^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + ... + C_n^{n-2} a^{n-2} b^2 + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n a^n$.

Chọn $a=2, b=1$ ta được:

$3^n = (2+1)^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + ... + 2^n C_n^n = 243 \Rightarrow n = 5$

Câu 24. Đáp án A

Các số hạng của S có dạng:

$$\frac{1}{(2k)!(2019-2k)!} = \frac{1}{2019!}\frac{2019!}{(2k)!(2019-2k)!} = \frac{1}{2019!}C_{2019}^{2k}.$$

Do đó $\Rightarrow 2019!S = C_{2019}^2 + C_{2019}^4 + ... + C_{2019}^{2016} + C_{2019}^{2018}$.

Nhận thấy C_{2019}^{2k} là hệ số của x^{2k} trong khai triển $(x+1)^{2019}$.

Vì vậy xét $P(x) = (x+1)^{2019}$, theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$P(x) = (x+1)^{2019} = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + C_{2019}^2 x^2 + ... + C_{2019}^{2019} x^{2019}$

Từ đó ta có:

$P(1) = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 + C_{2019}^2 + ... + C_{2019}^{2019}$.

$P(-1) = C_{2019}^0 - C_{2019}^1 + C_{2019}^2 - ... + C_{2019}^{2018} - C_{2019}^{2019}$

Suy ra: $2019!S + 1 = C_{2019}^0 + C_{2019}^2 + C_{2019}^4 + ... + C_{2019}^{2018} = \frac{P(1)+P(-1)}{2} = 2^{2018}$

$\Leftrightarrow S = \frac{2^{2018}-1}{2019!}$

Câu 25. Đáp án D

Theo giả thiết ta có:

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{2n} x^{2n}$.

Khi đó $P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{2n}$ và $P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - ... + a_{2n}$.

Suy ra $T = a_0 + a_2 + ... + a_{2n} = \frac{P(1)+P(-1)}{2} = \frac{2^{2n-1}+2^{2n}}{2} = 3.2^{2n-2}$

$\Rightarrow 768 = 3.2^{2n-2} \Leftrightarrow n = 5$

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$P(x) = (x-1)^{2n} + x(x+1)^{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k x^k (-1)^{2n-k} + x\sum_{k=1}^{2n-1} C_{2n-k}^k x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k x^k (-1)^{2n-k} + \sum_{k=1}^{2n} C_{2n-k}^{k-1} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{2n}\left(C_{2n}^k (-1)^k + C_{2n-1}^{k-1}\right)x^k = 1 + \sum_{k=1}^{10}\left(C_{10}^k (-1)^k + C_9^{k-1}\right)x^k.$$

Vậy $a_5 = C_{10}^5 (-1)^5 + C_9^4 = -126$.

Câu 26. Đáp án B.

Xét khai triển $(a+b)^{2n} = C_{2n}^0 b^{2n} + C_{2n}^1 a^1 b^{2n-1} + ... + C_{2n}^{2n-1} a^{2n-2} b^1 + C_{2n}^{2n} a^{2n}$

Chọn $a = b = 1$, ta được:

$2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$

Chọn $a = 1, b = -1$, ta được:

$0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + ... - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$

Trừ hai đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$2^{2n} = 2\left(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1}\right) = 2.2048 = 2^{12} \Leftrightarrow n = 6$

Câu 27. **Đáp án A.**

Nhận thấy rằng:

$3S = 3a_1 + 3^3 a_3 + ... + 3^{2011} a_{2011} + 3^{2013} a_{2013}$

Lần lượt thay $x = 3, x = -3$ vào khai triển đã cho ta được:

$P(3) = 7^{2014} = a_0 + 3a_1 + 3^2 a_2 + ... + 3^{2013} a_{2013} + 3^{2014} a_{2014}$

$P(-3) = 5^{2014} = a_0 - 3a_1 + 3^2 a_2 - ... - 3^{2013} a_{2013} + 3^{2014} a_{2014}$

Trừ hai đẳng thức này vế theo vế, ta được:

$2\left(3a_1 + 3^3 a_3 ... + 3^{2011} a_{2011} + 3^{2013} a_{2013}\right) = 7^{2014} - 5^{2014}$

$\Leftrightarrow 3S = \dfrac{7^{2014} - 5^{2014}}{2} \Leftrightarrow S = \dfrac{7^{2014} - 5^{2014}}{6}$

Vậy $S = a_1 + 3^2 a_3 + ... + 3^{2010} a_{2011} + 3^{2012} a_{2013} = \dfrac{7^{2014} - 5^{2014}}{6}$

Câu 28. **Đáp án B.**

Nhận thấy $(-5)^k C_{100}^k$ là hệ số của x^k trong khai triển $(1-5x)^{100}$

Vì thế xét $P(x) = (1-5x)^{100}$, theo khai triển nhị thức NewTon, ta có:

$P(x) = (1-5x)^{100} = C_{100}^0 - C_{100}^1 5x + C_{100}^2 (5x)^2 - ... + C_{100}^{100} (5x)^{100}$

Thay $x = 1$ vào ta được:

$P(x) = (4)^{100} = C_{100}^0 - C_{100}^1 5 + C_{100}^2 5^2 - ... + C_{100}^{100} 5^{100}$

Chú ý: Ta cũng có thể xét khai triển $(1+5x)^{100}$ rồi sau đó thay $x = -1$ vào.

Câu 29. **Đáp án C.**

Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$

Cho $x = 1$ thì A đúng.

Cho $x = -1$ thì B đúng.

Cho $x = 2$ thì D đúng.

Cho $x = -2$ thì $(-1)^n = C_n^0 - 2C_n^1 + C_n^2 2^2 - ... + C_n^n (-2)^n$.

Vậy C sai.

Câu 30. **Đáp án B.**

$(2x+y)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4 y + 10(2x)^3 y^2 + 10(2x)^2 y^3 + 5(2x) y^4 + y^5$

$= 32x^5 + 80x^4 y + 80x^3 y^2 + 40x^2 y^3 + 10xy^4 + y^5$.

XÁC SUẤT

A. LÝ THUYẾT

I. PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ KHÔNG GIAN MẪU

1. Phép thử ngẫu nhiên

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

2. Không gian mẫu

Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử đó và ký hiệu là Ω.

Ví dụ: Khi ta tung một đồng xu có 2 mặt, ta hoàn toàn không biết trước được kết quả của nó, tuy nhiên ta lại biết chắc chắn rằng đồng xu rơi xuống sẽ ở một trong 2 trạng thái: sấp (S) hoặc ngửa (N).

Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \{S; N\}$

II. BIẾN CỐ

1. Một biến cố A (còn gọi là sự kiện A) liên quan tới phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của nó còn tùy thuộc vào kết quả của T.

Mỗi kết quả của phép thử T làm cho biến cố A xảy ra được gọi là một kết quả thuận lợi cho A.

2. Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được kí hiệu bởi Ω_A. Để đơn giản, ta có thể dùng chính chữ A để kí hiệu tập hợp các kết quả thuận lợi cho A.

Khi đó ta cũng nói biến cố A được mô tả bởi tập A.

3. Biến cố chắc chắn là biến cố luôn xảy ra khi thực hiện hiện phép thử T. Biến cố chắc chắn được mô tả bởi tập Ω và được ký hiệu là Ω.

4. Biến cố không thể là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử T. Biến cố không thể được mô tả bởi tập $\varnothing$.

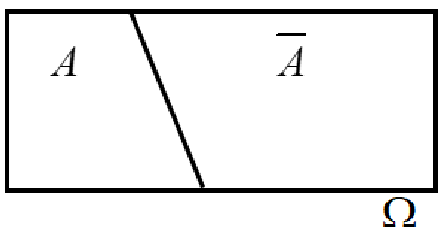
Các phép toán trên biến cố

* Tập $\Omega \setminus A$ được gọi là biến cố đối của biến cố A, kí hiệu là $\overline{A}$. Giả sử A và B là hai biến cố liên quan đến một phép thử. Ta có:

* Tập $A \cup B$ được gọi là hợp của các biến cố A và B.

* Tập $A \cap B$ được gọi là giao của các biến cố A và B.

* Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì ta nói A và B xung khắc.



Bảng đọc ngôn ngữ biến cố.

Kí hiệu	Ngôn ngữ biến cố
$A \in \Omega$	A là biến cố
$A = \varnothing$	A là biến cố không
$A = \Omega$	A là biến cố chắc chắn

$C = A \cup B$	C là biến cố "A hoặc B"
$C = A \cap B$	C là biến cố "A và B"
$A \cap B = \varnothing$	A và B xung khắc
$B = \overline{A}$	A và B đối nhau

III. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Định nghĩa cổ điển của xác suất:

Giả sử phép thử T có một số hữu hạn kết quả có thể đồng khả năng. Khi đó xác suất của một biến cố A liên quan tới T là tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho A và số kết quả có thể

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Trong cuộc sống khi nói về biến cố, ta thường nói biến cố này có nhiều khả năng xảy ra, biến có kia có ít khả năng xảy ra, biến cố này có nhiều khả năng xảy ra hơn biến cố kia. Toán học đã định lượng hóa các khả năng này bằng cách gán cho mỗi biến cố một số không âm, nhỏ hơn hoặc bằng 1 gọi là xác suất của biến cố.

Từ định nghĩa cổ điển về xác suất ta có các bước để tính xác suất của một biến cố như sau:

Bước 1: Xác định không gian mẫu Ω rồi tính số phần tử của Ω, tức là đếm số kết quả có thể của phép thử T.

Bước 2: Xác định tập con A mô tả biến cố A rồi tính số phần tử của A, tứ là đếm số kết quả thuận loại cho A.

Bước 3: Lấy kết quả của bước 2 chia cho bước 1.

Nhận xét: Việc tính số kết quả có thể (bước 1) thường dễ dàng hơn hiều so với việc tính số kết quả thuận lợi cho A (bước 1). Để giải quyết tốt các bài toán xác suất ta cần nắm chắc phần tổ hợp trước.

STUDY TIP

Từ định nghĩa cổ điển về xác suất ta suy ra: $0 \le P(A) \le 1;\ P(\Omega) = 1;\ P(\varnothing) = 0$

<u>*Chú ý:*</u> Các kí hiệu $n(\Omega); n(A)$ được hiểu tương đương với $|\Omega|; |\Omega_A|$ là số phần tử của không gian mẫu và của tập hợp thuận lợi cho biến cố A.

4. Quy tắc cộng xác suất

a) Quy tắc cộng xác suất

* Nếu hai biến cố A, B xung khắc nhau thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

* Nếu các biến cố $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ xung khắc nhau thì

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k)$$

STUDY TIP

Vì $A \cup \overline{A} = \Omega$ và $A \cap \overline{A} = \varnothing$ nên theo công thức cộng xác suất thì

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$$

b) Công thức tính xác suất biến cố đối

Xác suất của biến cố $\overline{A}$ của biến cố A là

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Dưới đây là một ví dụ để ta hiểu rõ hơn về quy tắc cộng.

Ví dụ 1. Một hộp đựng 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên hai viên biên. Xác suất để chọn được hai viên bi cùng màu là

A. $\frac{5}{18}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{36}$. **D.** $\frac{1}{12}$.

Lời giải

Đáp án A.

Gọi A là biến cố : "Chọn được hai viên bi xanh".

B là biến cố : "Chọn được hai viên bi đỏ".

C là biến cố : "Chọn được hai viên bi vàng".

Khi đó biến cố: "Chọn được hai viên bi cùng màu" là biến cố $A \cup B \cup C$. Do A, B, C đôi một xung khắc với nhau nên theo quy tắc cộng ta có

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

Ta có $P(A) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36}$; $P(B) = \frac{C_3^2}{C_9^2} = \frac{3}{36}$; $P(C) = \frac{C_2^2}{C_9^2} = \frac{1}{36}$.

Vậy $P(A \cup B \cup C) = \frac{6}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$

5) Quy tắc nhân xác suất

Biến cố giao	**Biến cố độc lập**
Cho biến cố A và B. Biến cố " cả A và B đều xảy ra" kí hiệu là AB gọi là giao của hai biến cố A và B.	Hai biến cố gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra biến cố kia.
Một cách tổng quát, cho k biến cố $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$. Biến cố: "Tất cả k biến cố $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ đều xảy ra", kí hiệu là $A_1 A_2 A_3 ... A_k$ được gọi là giao của k biến cố đó.	Một cách tổng quát, cho k biến cố $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$. Chúng được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của một nhóm bất kì trong các biến cố trên không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của các biến cố còn lại.

Quy tắc nhân xác suất

Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì

$$P(AB) = P(A).P(B)$$

Một cách tổng quát, nếu k biến cố $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ là độc lập thì

$$P(A_1, A_2, A_3, ..., A_k) = P(A_1).P(A_2)...P(A_k)$$

Chú ý:

* Nếu A và B độc lập thì A và $\overline{B}$ độc lập, B và $\overline{A}$ độc lập, $\overline{B}$ và $\overline{A}$ độc lập. Do đó Nếu A và B độc lập thì ta còn có các đẳng thức

$$P\left(A\overline{B}\right)=P\left(A\right).P\left(\overline{B}\right)$$
$$P\left(\overline{A}B\right)=P\left(\overline{A}\right).P\left(B\right)$$
$$P\left(\overline{A}\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right).P\left(\overline{B}\right)$$

* Nếu một trong các đẳng thức trên bị vi phạm thì hai biến cố A và B không độc lập với nhau

Ví dụ 2. Gieo hai con súc sắc I và II cân đối, đồng chất một cách độc lập. Ta có biến cố A: "Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm". Lúc này giá trị của $P(A)$ là

A. $\frac{25}{36}$. **B.** $\frac{11}{36}$. **C.** $\frac{1}{36}$. **D.** $\frac{15}{36}$.

Lời giải

Đáp án B.

Gọi $A_i\left(i=1;2\right)$ là biến cố : "Con súc sắc thứ i ra mặt 6 chấm"

$\Rightarrow A_1$ và A_2 là hai biến cố độc lập và ta có $\begin{cases} P\left(A_1\right)=\frac{1}{6} \\ P\left(A_2\right)=\frac{1}{6} \end{cases}$

Thay vì tính $P\left(A\right)$ ta đi tính $P\left(\overline{A}\right)$. Ta có $\overline{A}=\overline{A_1}.\overline{A_2}$.

$$P\left(\overline{A}\right)=P\left(\overline{A_1}\right).P\left(\overline{A_2}\right)=\left(1-P\left(A_1\right)\right).\left(1-P\left(A_2\right)\right)=\frac{5}{6}.\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$$

Vậy $P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ XÁC SUẤT

DẠNG 1. SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN VỀ XÁC XUẤT - QUY VỀ BÀI TOÁN ĐẾM.

Bài toán 1. Bài toán tính xác suất sử dụng định nghĩa cổ điển bằng cách tính trực tiếp số phần tử thuận lợi cho biến cố.

Phương pháp chung:

Trong bài toán này, việc xác định số phần tử thuận lợi cho biến cố cần tìm dễ dàng xác định (có thể liệt kê các phương án, có thể tính được các cách chọn ngắn gọn).

Bước 1: Tìm số phần tử của không gian mẫu.

Bước 2: Đếm số phần tử thuận lợi của không gian mẫu.

Bước 3: Tính xác suất $P\left(A\right)=\frac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}$.

STUDY TIP

Phần lớn các bài toán xác suất đều có thể quy về 2 bài toán đếm:

* Đếm số phần tử của tập thuận lợi với biến cố.

* Đếm số phần tử của không gian mẫu Ω.

Các bước làm bài đã được trình bày rõ ở lý thuyết trước.

Ví dụ 1. Gieo ngẫu nhiên hai con xúc sắc cân đối và đồng chất. Xác suất của biến cố " Có ít nhất một con xúc sắc xuất hiện mặt một chấm" là

A. $\frac{11}{36}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{25}{36}$. **D.** $\frac{15}{36}$.

Lời giải

Đáp án A.

Gọi A là biến cố: "Có ít nhất một con xúc sắc xuất hiện mặt một chấm".

Bước 1: Tìm số phần tử không gian mẫu.

Do mỗi xúc sắc có thể xảy ra 6 trường hợp nên số kết quả có thể xảy ra là $|\Omega| = 6.6 = 36$

.

Bước 2: Tìm số kết quả thuận lợi cho A.

Ta có các trường hợp sau:

$$\{(1;1);(1;2);(1;3);(1;4);(1;5);(1;6);(2;1);(3;1);(4;1);(5;1);(6;1)\} \Rightarrow |\Omega_A| = 11$$

Bước 3: Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{11}{36}$.

Ví dụ 2. Một tổ gồm 9 em, trong đó có 3 nữ được chia thành 3 nhóm đều nhau. Tính xác xuất để mỗi nhóm có một nữ.

A. $\frac{3}{56}$. **B.** $\frac{27}{84}$. **C.** $\frac{53}{56}$. **D.** $\frac{19}{28}$.

Lời giải

Đáp án B.

Bước 1: Tìm số phần tử không gian mẫu.

Chọn ngẫu nhiên 3 em trong 9 em đưa vào nhóm thứ nhất có số khả năng xảy ra là C_9^3

Chọn ngẫu nhiên 3 em trong 6 em đưa vào nhóm thứ hai có số khả năng xảy ra là C_6^3

.

Còn 3 em đưa vào nhóm còn lại thì số khả năng xảy ra là 1 cách.

Vậy $|\Omega| = C_9^3 C_6^3 .1 = 1680$

Bước 2: Tìm số kết quả thuận lợi cho A.

Phân 3 nữ vào 3 nhóm trên có $3!$ cách.

Phân 6 nam vào 3 nhóm theo cách như trên có $C_6^2 C_4^2 .1$ cách khác nhau.

$\Rightarrow |\Omega_A| = 3!.C_6^2 C_4^2 .1 = 540.$

Bước 3: Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{540}{1680} = \frac{27}{84}$.

STUDY TIP

Bài toán ở ví dụ 2 liên quan chặt chẽ với phép đếm. Ta cần nắm chắc phần quy tắc cộng, quy tắc nhân để giải quyết các bài toán tính xác suất theo phương pháp cổ điển.

Ví dụ 3. Một hộp chứa 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Chọn 6 viên bi một cách ngẫu nhiên rồi cộng các số trên 6 viên bi được rút ra với nhau. Xác suất để kết quả thu được là số lẻ là

A. $\frac{226}{462}$. **B.** $\frac{118}{231}$. **C.** $\frac{115}{231}$. **D.** $\frac{103}{231}$.

Lời giải

Đáp án B.

Bước 1: Tìm số phần tử không gian mẫu.

Chọn ngẫu nhiên 6 viên bi trong 11 viên bi thì số cách chọn là $n(\Omega)=C_{11}^{6}=462$

Bước 2: Tìm số phần tử thuận lợi cho biến cố.

Gọi A là biến cố : "Chọn 6 viên bi cộng các số trên 6 viên bi đó thu được là số lẻ".

Trong 11 viên bi có 6 viên bi mang số lẻ đó là $\{1;3;5;7;9;11\}$ và 5 viên bi mang số chẵn $\{2;4;6;8;10\}$.

*** Trường hợp 1:** 1 viên bi mang số lẻ và 5 viên bi mang số chẵn.

Số cách chọn trong trường hợp 1 là $C_6^1.C_5^5$ cách.

*** Trường hợp 2:** 3 viên bi mang số lẻ và 3 viên bi mang số chẵn.

Số cách chọn trong trường hợp 2 là $C_6^3.C_5^3$ cách.

*** Trường hợp 3:** 5 viên bi mang số lẻ và 1 viên bi mang số chẵn.

Số cách chọn trong trường hợp 3 là $C_6^5.C_5^1$ cách.

Suy ra $n(A)=C_6^1.C_5^5+C_6^3.C_5^3+C_6^5.C_5^1=6+200+30=236.$

$\Rightarrow |\Omega_A|=3!.C_6^2C_4^2.1=540.$

Bước 3: Tính xác suất $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{236}{462}=\frac{118}{231}$.

STUDY TIP

Giải thích thực tế: Ta có thể đưa ra các trường hợp như vậy là vì ta có:

Để có được tổng là số lẻ thì ta phải có: lẻ + chẵn = lẻ.

TH1: 5 số chẵn cộng lại với nhau sẽ ra số chẵn. Do đó cộng với 1 lẻ thì ra số lẻ.

TH2: 3 lẻ = (1 lẻ + 1 lẻ) + 1 lẻ = 1 chẵn + 1 lẻ = 1 lẻ.

3 số chẵn cộng lại với nhau ra chẵn. Do đó cộng với 1 lẻ thì ra số lẻ.

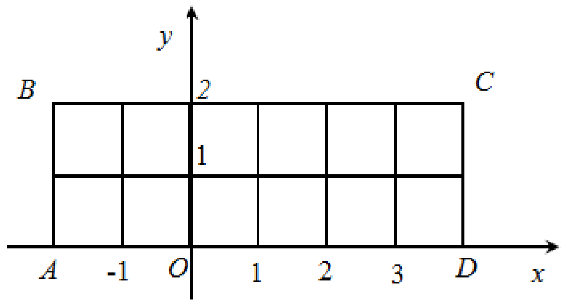
…

$\Rightarrow$ số viên bi mang số lẻ phải là số lẻ.

Ví dụ 4. Trong hệ trục tọa độ Oxy cho $A(-2;0), B(-2;2), C(4;2), D(4;0)$. Chọn ngẫu nhiên một điểm có tọa độ $(x;y)$; (với x, y là các số nguyên) nằm trong hình chữ nhật $ABCD$ (kể cả các điểm nằm trên cạnh).
Gọi A là biến cố : "x, y đều chia hết cho 2". Xác suất của biến cố A là

A. $\frac{7}{21}$. **B.** $\frac{13}{21}$. **C.** 1. **D.** $\frac{8}{21}$.

Lời giải



Ta có $\Omega = \{(x;y), -2 \le x \le 4, 0 \le y \le 2\}$, với $x, y \in \mathbb{Z}$.

Vậy $x \in \{-2;-1;;1;2;3;4\}$ và $y \in \{0;1;2\}$.

Suy ra $n(\Omega) = 7.3 = 21$ (mỗi điểm là một giao điểm trên hình).

Ta có A: "x, y đều chia hết cho 2". Nên ta có $A = \{(x;y): x \in \{-2;0;2;4\}; y \in \{0;2\}\}$

Theo quy tắc nhân ta có $n(A) = 4.2 = 8 \Rightarrow n(A) = 8 \Rightarrow P(A) = \frac{8}{21}$

STUDY TIP

Với các bài toán có miền giới hạn nhỏ, ta nên liệt kê các phần tử ra tránh sử dụng miền sẽ nhầm lẫn số phần tử.

Ví dụ 5. Một người bỏ ngẫu nhiên 4 lá thư và 4 chiếc phong bì thư đã để sẵn địa chỉ. Xác suất để có ít nhất một lá thư bỏ đúng địa chỉ là.

A. $\frac{5}{8}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Gọi 4 lá thư lần lượt là A, B, C, D và 4 phong bì thư có địa chỉ đúng với các lá thư trên lần lượt là $1; 2; 3; 4$

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = 4! = 24$.

Gọi X là biến cố " có ít nhất một lá thư bỏ đúng địa chỉ".
Ta có các trường hợp sau:

***TH1:** Cả 4 lá thư đều bỏ đúng địa chỉ: Chỉ có một trường hợp duy nhất

***TH2:** Có đúng 2 lá thư bỏ đúng địa chỉ. Có 6 trường hợp xảy ra là: $A1-B2-C4-D3$; $A1-B4-C3-D2$; $A4-B2-C3-D1$; $A1-B3-C2-D4$; $A3-B2-C1-D4$; A3 hoặc $A2-B1-C3-D4$.

***TH3:** Có đúng 1 lá thư bỏ đúng địa chỉ: Chỉ có lá thư A bỏ đúng địa chỉ thì có 2 trường hợp $A1-B3-C4-D2$; $A1-B4-C2-D3$

Tương tự với lá thư B có 2 trường hợp.

Lá thư C chỉ có đúng 2 trường hợp.

Lá thư D chỉ có đúng 2 trường hợp.

Suy ra có 8 trường hợp chỉ có đúng 1 lá thư bỏ đúng địa chỉ.

Vậy số phần tử của biến cố X là $n\left(X\right)=1+6+8=15$

Nên $P\left(X\right)=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$.

STUDY TIP

Giải thích thực tế: có nhiều độc giả sẽ thêm trường hợp có 3 lá thư bỏ đúng địa chỉ, tuy nhiên như vậy là lặp lại trường hợp 4 lá thư bỏ đúng địa chỉ. Do đó nếu 3 lá thư đúng địa chỉ rồi thì lá thư cuối cùng cũng nghiễm nhiên đúng địa chỉ và trùng với TH1.

Ví dụ 1. Một hộp đựng 15 viên bi, trong đó có 7 biên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi (không kể thứ tự) ra khỏi hộp. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất 1 viên màu đỏ.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{418}{455}$. **C.** $\frac{1}{13}$. **D.** $\frac{12}{13}$.

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ 15 viên bi thì số cách chọn là $C_{15}^{3}=445$.

Gọi A là biến cố "trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất một viên màu đỏ". Số trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

***Trường hợp 1:** Lấy được 1 viên màu đỏ, số cách lấy là: $C_8^1.C_7^2$.

***Trường hợp 2:** Lấy được 2 viên màu đỏ, số cách lấy là: $C_8^2.C_7^1$.

***Trường hợp 3:** Lấy được 3 viên màu đỏ, số cách lấy là: C_8^3.

Số trường hợp thuận lợi cho biến cố A là $n\left(A\right)=C_8^1.C_7^2+C_8^2.C_7^1+C_8^3=420$

Vậy $P\left(A\right)=\frac{C_8^1.C_7^2+C_8^2.C_7^1+C_8^3}{C_{15}^3}=\frac{12}{13}$.

Bài toán 2: Tính xác suất sử dụng định nghĩa cổ điển bằng phương pháp gián tiếp.

Trong nhiều bài toán tính xác suất, việc tính số phần tử thuận lợi cho biến cố A trở nên khó khăn do có quá nhiều trường hợp, thì ta đi tìm số phần tử thuận lợi cho biến cố đối của biến cố A. Sau đó lấy số phần tử không gian mẫu trừ đi kết quả vừa tìm được thì ta có số phần tử thuận lợi cho biến cố A.

Ta sẽ sử dụng bài toán ở ví dụ 6 như sau:

Ví dụ 2. Một hộp đựng 15 viên bi, trong đó có 7 biên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi (không kể thứ tự) ra khỏi hộp. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất 1 viên màu đỏ.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{418}{455}$. **C.** $\frac{1}{13}$. **D.** $\frac{12}{13}$.

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ 15 viên bi thì số cách chọn là $C_{15}^3 = 445$.

Gọi A là biến cố "trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất một viên màu đỏ" thì là biến cố $\overline{A}$ " cả ba viên bi lấy ra đều không có màu đỏ" (tức là lấy ra cả ba viên bi đều màu xanh"

Số cách chọn ra 3 viên bi mà 3 viên bi đó đều màu xanh là $C_7^3 = 35 \Rightarrow n\left(\overline{A}\right) = 35$

$\Rightarrow$ Số cách chọn ra 3 viên bi mà trong đó có ít nhất một viên bi màu đỏ là $455 - 35 = 420$ cách $\Rightarrow n(A) = 420$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{420}{455} = \frac{12}{13}$$

STUDY TIP

Giải thích thực tế: Dấu hiệu nhận biết các bài toán thực tế chọn đồ vật mà sử dụng cách tính gián tiếp đó là câu hỏi xuất hiện từ "có ít nhất …" thì thường ta sẽ giải quyết theo cách gián tiếp đó là tìm số cách chọn sao cho "không xuất hiện…" Ta sẽ tìm hiểu kĩ hơn ở ví dụ 8.

Ví dụ 3. Một hộp quà đựng 16 dây buộc tóc cùng chất liệu, cùng kiểu dáng nhưng khác nhau về màu sắc. Cụ thể trong hộp có 8 dây xanh, 5 dây đỏ, và 3 dây vàng. Bạn An được chọn ngẫu nhiên 6 dây từ hộp quà để làm phần thưởng cho mình. Tính xác suất để trong 6 dây bạn An chọn có ít nhất 1 dây vàng và không quá 4 dây đỏ.

A. $\frac{8005}{8008}$. **B.** $\frac{11}{14}$. **C.** $\frac{6289}{8008}$. **D.** $\frac{1719}{8008}$.

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên 6 dây từ 16 dây thì số cách chọn là $n(\Omega) = C_{16}^6 = 8008$

Gọi A là biến cố " 6 dây bạn An chọn có ít nhất 1 dây vàng và không quá 4 dây đỏ".

Do đó nếu tính trực tiếp sẽ có quá nhiều trường hợp, và từ STUDY TIP ở ví dụ 7, ta sẽ sử dụng biến cố đối để giải quyết bài toán:

Trường hợp 1: Không có dây nào vàng, số cách lấy là: C_{13}^{6}.

Trường hợp 2: Có 1 dây vàng và 5 dây đỏ, số cách lấy là: $C_{3}^{1}.C_{5}^{5}$.

Suy ra $n(A)=C_{16}^{6}-C_{13}^{6}-C_{3}^{1}.C_{5}^{5}=6289$

Nên $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{C_{16}^{6}-C_{13}^{6}-C_{3}^{1}.C_{5}^{5}}{C_{16}^{6}}=\dfrac{6289}{8008}$.

Ví dụ 4. Một trường THPT có 18 học sinh giỏi toàn diện, trong đó có 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Chọn ngẫu nhiên 8 học sinh từ 18 học sinh trên để đi dự trại hè. Tính xác suất để mỗi khối có ít nhất 1 học sinh được chọn.

A. $\dfrac{212}{221}$. **B.** $\dfrac{9}{221}$. **C.** $\dfrac{59}{1326}$. **D.** $\dfrac{1267}{1326}$.

Lời giải

Chọn 8 học sinh bất kì trong 18 học sinh thì số cách chọn là $n(\Omega)=C_{18}^{8}$ cách.

Tương tự với dấu hiệu mà STUDY TIP đưa ra thì ta tìm số trường hợp thuận lợi cho biến cố đối của biến cố cần tìm.

Chọn 8 học sinh mà không có khối 10, có C_{13}^{8} cách.

Chọn 8 học sinh mà không có khối 11, có C_{12}^{8} cách.

Chọn 8 học sinh mà không có khối 12, có C_{11}^{8} cách.

Gọi A là biến cố " 8 học sinh được chọn, mỗi khối có ít nhất 1 học sinh". Số trường hợp thuận lợi cho A là $n(A)=C_{18}^{8}-\left(C_{13}^{8}+C_{12}^{8}+C_{11}^{8}\right)=41811$

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{41811}{C_{18}^{8}}=\dfrac{1267}{1326}$.

Ví dụ 5. Xét các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ các số 1, 3, 5, 7, 9. Tính xác suất để tìm được một số không bắt đầu bởi 135.

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{60}$. **C.** $\dfrac{59}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải

Số phần tử không gian mẫu là: $n(\Omega)=5!$.

Gọi A là biến cố "số tìm được không bắt đầu bởi 135".

Thì biến cố $\overline{A}$ là biến cố "số tìm được bắt đầu bởi 135"

Buộc các số 135 lại thì ta còn 3 phần tử. Số các số tạo thành thỏa mãn số 135 đứng đầu là $1.2.1=2$ cách $\Rightarrow n(A)=120-2=118$ cách

Nên $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{118}{120}=\frac{59}{60}$

STUDY TIP

Phương pháp "buộc" các phần tử được giới thiệu kĩ ở phần quy tắc đếm, được áp dụng khi các phần tử có điều kiện đứng liền kề nhau.

DẠNG 2. SỬ DỤNG QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

Bước 1: Xác định biến cố của các xác suất, có thể gọi tên các biến cố $A;B;C;D$ để biểu diễn.

Bước 2: Tìm mối quan hệ giữa các biến cố vừa đặt tên, biểu diễn biến cố trung gian và quan trọng nhất là biến cố đề bài đang yêu cầu tính xác suất thông qua các biến cố ở bước 1.

Bước 3: Sử dụng các mối quan hệ vừa xác định ở bước 2 để chọn công thức cộng hay công thức nhân phù hợp.

Ví dụ 1. Một chiếc ôtô với hai động cơ độc lập đang gặp trục trặc kĩ thuật. Xác suất để động cơ 1 gặp trục trặc là 0,5. Xác suất để động cơ 2 gặp trục trặc là 0,4. Biết rằng xe chỉ không thể chạy được khi cả hai động cơ bị hỏng. Tính xác suất để xe đi được.

A. $0,2$. **B.** $0,8$. **C.** $0,9$. **D.** $0,1$.

Lời giải

Gọi A là biến cố "động cơ 1 bị hỏng", gọi B là biến cố "động cơ 2 bị hỏng".

Suy ra AB là biến cố "cả hai động cơ bị hỏng" $\Leftrightarrow$ " xe không chạy được nữa".

Lại thấy hai động cơ hoạt động độc lập nên A và B là hai biến cố độc lập.

$\Rightarrow$ Áp dụng quy tắc nhân xác suất ta được xác suất để xe phải dừng lại giữa đường là $P(AB)=0,5.0,4=0,2$.

Vậy xác suất để xe đi được là $1-0,2=0,8$.

STUDY TIP

Các bài toán không nói bất kì đối tượng nào mà chỉ cho các giá trị xác suất thì ta bắt buộc phải sử dụng công thức cộng hoặc công thức nhân xác suất. Ở đây hai động cơ độc lập nên A và B là hai biến cố độc lập, do vậy ta áp dụng công thức nhân xác suất.

Ví dụ 2. Túi I chứa 3 bi trắng, 7 bi đỏ, 15 bi xanh. Túi II chứa 10 bi trắng, 6 bi đỏ, 9 bi xanh. Từ mỗi túi lấy ngẫu nhiên 1 viên bi. Tính xác suất để lấy được hai viên cùng màu.

A. $\frac{207}{625}$. **B.** $\frac{72}{625}$. **C.** $\frac{418}{625}$. **D.** $\frac{553}{625}$.

Lời giải

Gọi A_t,A_d,A_x lần lượt là biến cố bi rút được từ túi I là trắng, đỏ, xanh.

Gọi B_t,B_d,B_x lần lượt là biến cố bi rút được từ túi II là trắng, đỏ, xanh.

Các biến cố A_t,A_d,A_x độc lập với B_t,B_d,B_x.

Vậy xác suất để lấy được hai bi cùng màu là

$P(A_tB_t \cup A_dB_d \cup A_xB_x) = P(A_tB_t) + P(A_dB_d) + P(A_xB_x)$

$= P(A_t)P(B_t) + P(A_d)P(B_d) + P(A_x)P(B_x) = \frac{3}{25}.\frac{10}{25} + \frac{7}{25}.\frac{6}{25} + \frac{15}{25}.\frac{9}{25} = \frac{207}{625}.$

STUDY TIP

Nhận thấy bài toán bên là bài toán sử dụng cả hai công thức tính là công thức cộng và công thức nhân xác suất. Bài toán sử dụng công thức cộng xác suất vì các biến cố $A_tB_t; A_dB_d; A_xB_x$ lần lượt là các biến cố đôi một xung khắc (do biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra). Trong khi đó các biến cố A_t và B_t; A_d và B_d; A_x và B_x lần lượt là các cặp biến cố độc lập (việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến biến cố kia) nên sử dụng công thức nhân xác suất.

Ví dụ 3. Gieo một con xúc sắc cân đối và đồng chất 2 lần. Tính xác suất sao cho tổng số chấm trong hai lần gieo là số chẵn.

A. $0,09$. **B.** $0,91$. **C.** $0,36$. **D.** $0,06$.

Lời giải

Đặt A là biến cố " Lần gieo đầu tiên xuất hiện mặt chấm chẵn";

B là biến cố " Lần gieo thứ hai xuất hiện mặt chấm chẵn";

C là biến cố " Tổng số chấm trong hai lần gieo là số chẵn".

Ta có $C = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

Ta thấy $(A \cap B)$ và $(\overline{A} \cap \overline{B})$ là hai biến cố xung khắc nên

$P\left[(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})\right] = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$ $P\left[(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})\right] = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$

Vì A và B là hai biến cố độc lập nên theo STUDY TIP ở trên thì

$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B}) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Vậy $P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

STUDY TIP

Ở đây $C = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ vì tổng hai chấm xuất hiện ở hai lần gieo là chẵn có nghĩa là có 2 trường hợp:

***TH1:** Hai lần gieo đều được số chẵn $A \cap B$.

***TH2:** Hai lần gieo đều được số lẻ $\overline{A} \cap \overline{B}$.

STUDY TIP

Ta có $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$ bởi xúc sắc có số mặt chẵn và số mặt lẻ bằng nhau, do vây ta dễ dàng có xác suất là $\frac{1}{2}$.

Ví dụ 4. Ba xạ thủ A, B, C độc lập với nhau cùng nổ súng vào một mục tiêu. Xác suất bắn trúng mục tiêu của A, B, C tương ứng là $0,4;0,5$ và $0,7$. Tính xác suất để có ít nhất một người bắn trúng mục tiêu.

A. $0,09$. **B.** $0,91$. **C.** $0,36$. **D.** $0,06$.

Lời giải

Gọi A, B, C tương ứng là các biến cố "A bắn trúng"; "B bắn trúng"; "B bắn trúng".

A, B, C là ba biến cố độc lập. Do A, B, C là các biến cố đôi một nên:

Xác suấy để cả ba người đều bắn trượt là

STUDY TIP

Nhắc lại chú ý phần lý thuyết nhân xác suất, tôi có đưa ra: Nếu A, B, C là hai biến cố độc lập thì $P(\overline{A}.\overline{B})=P(\overline{A}).P(\overline{B})$

Và bài toán ở ví dụ 9 này là bài toán mở rộng của chú ý đó đối với ba biến cố đối một cách độc lập

$$P(\overline{ABC})=P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C})=(1-0,4)(1-0,5)(1-0,7)=0,09$$

Vậy xác suất để có ít nhất một trong ba người bắn trùng là $1-0,09=0,91$.

Ví dụ 5. Một xạ thủ bắn bia. Biết rằng xác suất bắn trúng vòng tròn 10 là $0,2$; vòng 9 là $0,25$ và vòng 8 là $0,15$. Nếu trúng vòng k thì được k điểm. Giả sử xạ thủ đó bắn ba phát súng một cách độc lập. Xả thủ đạt loại giỏi nếu anh ta đạt ít nhấ 28 điểm. Xác suất để xả thủ này đạt loại giỏi

A. $0,0935$. **B.** $0,0755$. **C.** $0,0365$. **D.** $0,0855$.

Lời giải

Chọn A

Gọi H là biến cố: "Xạ thủ bắn đạt loại giỏi". $A; B; C; D$ là các biến cố sau:

A: "Ba viên trúng vòng 10"

B: "Hai viên trúng vòng 10 và một viên trúng vòng 9"

C: "Một viên trúng vòng 10 và hai viên trúng vòng 9"

D: "Hai viên trúng vòng 10 và một viên trúng vòng 8"

Các biến cố $A; B; C; D$ là các biến cố xung khắc từng đôi một và $H=A\cup B\cup C\cup D$

Suy ra theo quy tắc cộng mở rộng ta có $P(H)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)$

Mặt khác $P(A)=(0,2).(0,2).(0,2)=0,008$

$P(B)=(0,2).(0,2).(0,25)+(0,2)(0,25)(0,2)+(0,25)(0,2)(0,2)=0,03$

$P(C)=(0,2).(0,25).(0,25)+(0,25)(0,2)(0,25)+(0,25)(0,25)(0,2)=0,0375$

$P(D)=(0,2).(0,2).(0,15)+(0,2)(0,15)(0,2)+(0,15)(0,2)(0,2)=0,018$

Do đó $P(H)=0,008+0,03+0,0375+0,018=0,0935$

STUDY TIP

Ở các phần tính xác suất biến cố B,C,D ta có các trường hợp như vậy bởi vì thứ tự trúng vòng của 3 lần bắng khác nhau là các trường hợp khác nhau. Nhiều độc giả không tính các trường hợp khác nhau. Nhiều độc giả không tính các trường hợp đó dẫn đến chọn C là **sai**

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Tung một viên súc sóc cân đối, tìm xác suất để số chấm xuất hiện nhỏ hơn 4.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{36}$. **D.** $\frac{1}{256}$.

Câu 2. Một lớp học có 100 học sinh, trong đó có 40 học sinh giỏi ngoại ngữ; 30 học sinh giỏi tin học và 20 học sinh giỏi cả ngoại ngữ và tin học. Học sinh nào giỏi ít nhất một trong hai môn sẽ được thêm điểm trong kết quả học tập của học kì. Chọn ngẫu nhiên một trong các học sinh trong lớp, xác suất để học sinh đó được tăng điểm là

A. $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 3. Một hộp đèn có 12 bóng trong đó có 7 bóng tốt. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng, xác suất để lấy được ít nhất 2 bóng tốt là

A. $\frac{21}{44}$. **B.** $\frac{7}{44}$. **C.** $\frac{7}{11}$. **D.** $\frac{4}{11}$.

Câu 4. Trong một hộp gồm 8 viên bi xanh và 6 viên bi trắng, chọn ngẫu nhiên 5 viên bi. Xác suất để 5 viên bi được chọn có cả bi xanh và bi trắng

A. $\frac{970}{1001}$. **B.** $\frac{139}{143}$. **C.** $\frac{31}{1001}$. **D.** $\frac{4}{143}$.

Câu 5. Một lớp có 25 học sinh, trong đó có 15 em học khá môn Toán, 16 em học khá môn Văn. Biết rằng mỗi học sinh trong lớp đều khá ít nhất một trong hai môn trên. Xác suất để chọn được 3 em học khá môn Toán nhưng không khá môn Văn

A. $\frac{21}{575}$. **B.** $\frac{7}{11}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 6. Gieo hai con xúc xắc cân đối đồng chất. Xác suất để tổng hai mặt xuất hiện bằng 7 là

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{6}{7}$.

Câu 7. Một lớp có 20 học sinh, trong đó có 6 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Văn và 4 học sinh giỏi cả 2 môn. Giáo viên chủ nhiệm chọn ra 2 em. Xác suất 2 em đó là học sinh giỏi

A. $\frac{11}{20}$. **B.** $\frac{169}{190}$. **C.** $\frac{21}{190}$. **D.** $\frac{9}{20}$.

Câu 8. Xét các số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau được lập từ 1, 3, 5, 7, 9. Xác suất để viết được số bắt đầu bởi 19 là

A. $\frac{59}{60}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{19}{20}$. **D.** $\frac{1}{20}$.

Câu 9. Cho tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Xác suất để lập được số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau sao cho số đó chia hết cho 5 và các chữ số 1, 2, 3 luôn có mặt cạnh nhau là

A. $\frac{11}{420}$. **B.** $\frac{11}{360}$. **C.** $\frac{349}{360}$. **D.** $\frac{409}{420}$.

Câu 10. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn mộ ban cán sự lớp gồm 4 em. Xác suất để 4 bạn đó có ít nhất một nam và 1 nữ

A. $\frac{15475}{18278}$. **B.** $\frac{2083}{18278}$. **C.** $\frac{11}{360}$. **D.** $\frac{349}{360}$.

Câu 11. Một trường có 50 em học sinh giỏi trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Cần chọn ra 3 học sinh trong số 50 học sinh để tham gia trại hè. Tính xác suất trong 3 em ấy không có cặp anh em sinh đôi.

A. $\frac{9}{1225}$. **B.** $\frac{1216}{1225}$. **C.** $\frac{12}{1225}$. **D.** $\frac{1213}{1225}$.

Câu 12. Một hội nghị bàn tròn có phái đoàn các nước: Mỹ có 5 người, Nga có 5 người, Anh có 4 người, Pháp có 6 người, Đức có 4 người. Xếp ngẫu nhiên các đại biểu vào bàn tròn. Xác suất sao cho các người quốc tịch ngồi cùng nhau

A. $\frac{6}{23!}$. **B.** $\frac{4!}{24!}$. **C.** $\frac{4!5!5!4!6!4!}{24!}$. **D.** $\frac{23!-6}{23!}$.

Câu 13. Nam tung một đồng xu cân đối 5 lần liên tiếp. Xác suất xảy ra để Nam tung cả 5 lần đồng xu đều là mặt sấp

A. $0,5$. **B.** $0,03125$. **C.** $0,25$. **D.** $0,125$.

Câu 14. Ba xạ thủ bắn vào mục tiêu một cách độc lập với nhau. Xác suất bắn trúng của xạ thủ thứ nhất, thứ hai và thứ ba lần lượt là 0,6; 0,7; 0,8. Xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng là

A. $0,188$. **B.** $0,024$. **C.** $0,976$. **D.** $0,812$.

Câu 15. Trong dịp nghỉ lễ 30-4 và 1-5 thì một nhóm các em thiếu niên tham gia trò chơi "Ném vòng cổ chai lấy thưởng". Mỗi em được ném 3 vòng. Xác suất ném vào cổ trai lần đầu là 0,75. Nếu ném trượt lần đầu thì xác suất ném vào cổ chai lần thứ hai là 0,6. Nếu ném trượt cả hai lần ném đầu tiên thì xác suất ném vào cổ chai ở lần thứ ba (lần cuối) là 0,3. Chọn ngẫu nhiên một em trong nhóm chơi. Xác suất để em đó ném vào đúng cổ chai là

A. $0,18$. **B.** $0,03$. **C.** $0,75$. **D.** $0,81$.

Câu 16. Gieo 3 đồng xu cùng một lúc. Gọi A là biến cố "có ít nhất một đồng xu xuất hiện mặt ngửa". Xác suất của biến cố A là

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{7}{8}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 17. Gieo 3 con xúc xắc, kết quả là một bộ thứ tự $(x;y;z)$ với $x;y;z$ lần lượt là số chấm xuất hiện trên mỗi con xúc xắc. Xác suất để $x+y+z<16$ là

A. $\frac{5}{108}$. **B.** $\frac{23}{24}$. **C.** $\frac{1}{24}$. **D.** $\frac{103}{108}$.

Câu 18. Gieo 2 con xúc xắc cân đối, đồng chất. Xác định để gieo được hai mặt xúc sắc có tổng của hai số lớn hơn 9

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{11}{360}$. **C.** $\frac{5}{36}$. **D.** $\frac{31}{36}$.

Câu 19. Gieo đồng thời 2 con xúc xắc cân đối, đồng chất. Một con màu đỏ và một con màu đen. Xác suất của biến cố A "Số chấm trên con xanh nhiều hơn trên con đỏ 2 đơn vị"

A. $\frac{32}{36}$. **B.** $\frac{1}{9}$. **C.** $\frac{5}{36}$. **D.** $\frac{9}{36}$.

Câu 20. Viết 6 chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 lên 6 mảnh bìa như nhau. Rút ngẫu nhiên ra 3 tấm bìa và xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang. Xác suất sao cho 3 tấm bìa đó xếp thành số có 3 chữ số là

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{7}{40}$. **D.** $\frac{33}{40}$.

Câu 21. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 2 chữ số khác nhau lập từ $\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Chọn ngẫu nhiên 2 số từ tập S. Xác suất để tích hai số chọn được là một số chẵn

A. $\frac{41}{42}$. **B.** $\frac{1}{42}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Câu 22. Cho 8 quả cân có trọng lượng lần lượt là 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 (kg). Chọn ngẫu nhiên 3 quả trong số đó. Xác suất để trọng lượng 3 quả không nhỏ hơn 10 (kg) là

A. $\frac{3}{28}$. **B.** $\frac{25}{28}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{7}{8}$.

Câu 23. Trong một hộp đựng 20 viên bi trong đó có 12 viên bi đỏ khác nhau và 8 viên bi xanh khác nhau. Lấy ngẫu nhiên ra 7 viên bi. Xác suất để 7 viên bi được chọn ra không quá 2 viên bi đỏ

A. $\frac{84}{1615}$. **B.** $\frac{101}{1938}$. **C.** $\frac{1882}{1983}$. **D.** $\frac{1531}{1615}$.

Câu 24. Có 10 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm chia hết cho 10 là

A. $\frac{634}{667}$. **B.** $\frac{33}{667}$. **C.** $\frac{568}{667}$. **D.** $\frac{99}{667}$.

Câu 25. Một hộp đựng 9 tấm thẻ được đánh số 1 đến 9. Hỏi phải rút bao nhiêu thẻ để xác suất có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4 phải lớn hơn $\frac{5}{6}$

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 26. Năm đoạn thẳng có độ dài 1cm; 3cm; 5cm; 7cm; 9cm. Lấy ngẫu nhiên ba đoạn thẳng trong năm đoạn thẳng trên. Xác suất để ba đoạn thẳng lấy ra có thể tạo thành 1 tam giác là

A. $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{7}{10}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 27. Người ta sử dụng 5 cuốn sách Toán, 6 cuốn sách Vật lý, 7 cuốn Hóa học (các cuốn cùng loại thì giống nhau) để làm giải thưởng cho 9 học sinh, mỗi học sinh được 2 cuốn sách khác loại. Trong số 9 học sinh có 2 bạn X và Y. Xác suất để hai bạn đó có giải thưởng giống nhau là

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{12}$. **C.** $\frac{5}{8}$. **D.** $\frac{13}{18}$.

Câu 28. Xếp ngẫu nhiên 5 bạn nam và 3 bạn nữ vào một bàn tròn. Xác suất để không có ba bạn nữ nào ngồi cạnh nhau

A. $\frac{5}{7}$. **B.** $\frac{2}{7}$. **C.** $\frac{1}{84}$. **D.** $\frac{5}{84}$.

Câu 29. Đạt và Phong tham gia chơi trò một trò chơi đối kháng, thỏa thuận rằng ai thắng 5 ván trước là thắng chung cuộc và được hưởng toàn bộ số tiền thưởng của chương trình (không có ván nào hòa). Tuy nhiên khi Đạt thắng được 4 ván và Phong thắng được 2 ván rồi thì xảy ra sự cố kĩ thuật và chương trình buộc phải dừng lại. Biết rằng giới chuyên môn đánh giá Phong và Đạt ngang tài ngang sức. Hỏi phải chia số tiền thưởng như thế nào cho hợp lý (dựa trên quan điểm tiền thưởng tỉ lệ thuận với xác suất thắng cuộc của mỗi người)

A. Tỉ lệ chia số tiền cho Đạt và Phong là $4:3$. **B.** Tỉ lệ chia số tiền cho Đạt và Phong là $1:7$. **C.** Tỉ lệ chia số tiền cho Đạt và Phong là $7:1$. **D.** Tỉ lệ chia số tiền cho Đạt và Phong là $3:4$.

Câu 30. An và Bình thi đấu với nhau một trận bóng bàn, người nào thắng trước 3 séc sẽ giành chiến thắng chung cuộc. Xác suất An thắng mỗi séc là $0,4$ (không có hòa). Tính xác suất An thắng chung cuộc

A. $0,064$. **B.** $0,1152$. **C.** $0,13824$. **D.** $0,31744$.

Câu 31. Một đề thi trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu có 3 phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Một thí sinh chọn ngẫu nhiên các phương án trả lời, hỏi xác suất thí sinh có được điểm nào là cao nhất? Biết rằng mỗi câu trả lời đúng được 1 điểm, trả lời sai không bị trừ điểm.

A. điểm 3. **B.** điểm 4. **C.** điểm 5. **D.** điểm 6.

Câu 32. Một xạ thủ bán từ khoảng cách 100m có xác suất bắn trúng đích là:
- Tâm 10 điểm: 0,5.
- Vòng 9 điểm: 0,25.
- Vòng 8 điểm: 0,1.
- Vòng 7 điểm: 0,1.
- Ngoài vòng 7 điểm: 0,05.

Tính xác suất để sau 3 lần bắn xạ thủ đó được 27 điểm

A. $0,15$. **B.** $0,75$. **C.** $0,165625$. **D.** $0,8375$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Đáp án A.

Gọi A là biến cố "số chấm xuất hiện nhỏ hơn 4". Số chấm nhỏ hơn 4 dễ thấy chỉ có thể là 1, 2 và 3.

Gọi A_j là biến cố "số chấm xuất hiện là i" $\left(i=\overline{1,3}\right)$. Có thể thấy rằng các biến cố này đôi một xung khắc.

Do viên xúc sắc là cân đối nên xác suất chia đều ra cho 6 mặt, mỗi mặt có xác suất là $\frac{1}{6} \Rightarrow P\left(A_j\right)=\frac{1}{6}$.

Ta có $P(A)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+P\left(A_3\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

Câu 2. Đáp án B.

Gọi A là biến cố "học sinh chọn được tăng điểm".

Gọi B là biến cố "học sinh chọn học giỏi ngoại ngữ".

Gọi C là biến cố "học sinh chọn học giỏi tin học".

Thì $A=B\cup C$ và BC là biến cố "học sinh chọn học giỏi cả ngoại ngữ lẫn tin học".

Ta có $P(A)=P(B)+P(C)-P(BC)=\frac{30}{100}+\frac{40}{100}-\frac{20}{100}=\frac{1}{2}$

Câu 3. Đáp án C.

Gọi A là biến cố "lấy được ít nhất 2 bóng tốt".

Không gian mẫu: lấy ngẫu nhiên 3 quả bóng thì số cách lấy là $n(\Omega)=C_{12}^{3}=220$

TH1: Lấy 3 bóng trong đó có 2 bóng tốt và 1 bóng xấu thì số cách chọn là $C_7^2.C_5^1=105$ cách

TH2: Lấy 3 bóng đều tốt thì số cách lấy là $C_7^3=35$ cách

Suy ra $n(A)=105+35=140$. Vậy $P(A)=\frac{140}{220}=\frac{1}{7}$

Câu 4. Đáp án A.

Số cách chọn 5 viên bi từ 14 viên bi là $n(\Omega)=C_{14}^{5}=2002$.

Gọi A là biến cố "Trong 5 viên bi được chọn có cả bi xanh và bi trắng"

Trong đó:

Số cách chọn 5 viên bi toàn bi xanh là $C_8^5 = 56$ cách.

Số cách chọn 5 viên bi toàn bi trắng là $C_6^5 = 6$ cách.

Suy ra $n\left(\overline{A}\right) = 56 + 6 = 62 \Rightarrow P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{62}{2002} = \frac{970}{1001}$

Câu 5. Đáp án A.

Gọi X là tập hợp những em học khá môn Toán, Y là tập hợp những em học khá môn Văn.

$\Rightarrow$ Tập hợp những em học khá cả Toán và Văn là $X \cap Y$ $X \cap Y = 15 + 16 - 25 = 6$ học sinh.

Gọi A là biến cố "chọn được 3 em học khá môn Toán nhưng không khá môn Văn".

Ta có $n(\Omega) = C_{25}^3 = 2300$

Số học sinh học khá môn Toán nhưng không khá môn Văn là $\left|X \setminus (X \cap Y)\right| = 15 - 6 = 9$.

$\Rightarrow n(A) = C_9^3 = 84$ cách.

$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{84}{2300} = \frac{21}{575}$.

Câu 6. Đáp án B.

Con xúc xắc thứ nhất có thể xảy ra 6 kết quả, con thứ hai cũng vậy nên tổng số kết quả có thể xảy ra là $|\Omega| = 6.6 = 36$

Gọi A là biến cố "Tổng hai mặt xuất hiện mặt bằng 7". Dùng phương pháp liệt kê

$\Omega_A = \{(1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1)\} \Rightarrow P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Câu 7. Đáp án C.

Gọi X là tập hợp các học sinh giỏi Toán, Y là tập hợp các học sinh giỏi Văn.

$\Rightarrow X \cap Y$ là tập hợp các học sinh giỏi cả 2 môn và $X \cup Y$ là tập hợp những học sinh giỏi một trong hai môn (tập hợp các học sinh giỏi). Theo quy tắc cộng tổng quát ta có

$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| = 5 + 6 - 4 = 7$

Gọi A là biến cố "chọn được 2 em là học sinh giỏi" $\Rightarrow |\Omega| = C_{20}^2 = 190$ và $|\Omega_A| = C_7^2 = 21$

$\Rightarrow P(A) = \frac{21}{190}$.

Câu 8. Đáp án D.

Đặt 19 là một số a. Ta có số các số có các chữ số khác nhau tạo thành từ a, 3, 5, 7 với a là chữ số đứng đầu là $1.3.2.1 = 6$ (số) $\Rightarrow |\Omega_B| = 96 \Rightarrow P(B) = \frac{6}{120}$

Câu 9. Đáp án D.

Số các số có 5 chữ số khác nhau lập được từ tập A là $6.6.5.4.3 = 2160$ (số) $\Rightarrow |\Omega| = 2160$

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$ ta có $e = 0$ hoặc $e = 5$ (do số đó phải chia hết cho 5). Khi đó ta có các trường hợp:

a) $e=0$, chọn vị trí cho 3 số $1, 2, 3 \Rightarrow$ có 2 cách chọn, ngoài ra trong 3 số $1, 2, 3$ còn có $3!=6$ hoán vị trong đó. Cuối cùng ta chọn số còn lại có 3 cách chọn. Vậy số các số thuộc trường hợp này có $2.3.6=36$ số.

b) $e=5$, các số $1, 2, 3$ thuộc $b,c,d \Rightarrow$ có $3!.2=12$ số thỏa (do $a\neq 0$ nên chỉ có 2 cách chọn)

c) $e=5$, các số $1, 2, 3$ thuộc $a,b,c \Rightarrow$ có $3.3!=18$ số thỏa mãn.

Số các số thỏa mãn yêu cầu là $36+12+18=66$ số. $\Rightarrow |\Omega_A|=66$

Vậy xác suất cần tìm là $P=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{66}{2160}=\dfrac{11}{360}$.

Câu 10. Đáp án A.

Gọi B là biến cố "Chọn 4 em có ít nhất một nam và một nữ".

Số cách chọn 4 bạn bất kì vào ban cán sự lớp là C_{40}^4 cách.

Số cách chọn 4 bạn nam vào ban cán sự lớp là C_{25}^4 cách.

Số cách chọn 4 bạn nữ vào ban cán sự lớp là C_{15}^4 cách.

Vậy số cách chọn ban cán sự lớp có cả nam lẫn nữ là $C_{40}^4-C_{25}^4-C_{15}^4 \Rightarrow |\Omega_B|=77375$

Vậy xác suấtcần tìm là $P=\dfrac{|\Omega_B|}{|\Omega|}=\dfrac{77375}{91390}=\dfrac{15475}{18278}$.

Câu 11. Đáp án A.

Số cách chọn ra 3 học sinh mà không có điều kiện gì là C_{50}^3 cách $\Rightarrow |\Omega|=C_{50}^3$

Ta sẽ loại trừ các trường hợp có 1 cặp anh em sinh đôi. Đầu tiên ta chọn 1 cặp sinh đôi có 4 cách chọn. Sau đó chọn 1 học sinh còn lại từ 48 học sinh, có 48 cách chọn.

Vậy số cách chọn 3 em học sinh thỏa yêu cầu đề bài là: $C_{50}^3-4.48=19408$

Vậy xác suất cần tìm là $P=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{19408}{C_{50}^3}=\dfrac{1213}{1225}$.

Câu 12. Đáp án A.

Số cách xếp 24 người vào bàn là $23! \Rightarrow |\Omega|=23!$ (do ở đây là hoán vị vòng quanh).

Gộp các thành viên cùng quốc tịch vào cùng nhóm, trước tiên ta tính số cách xếp mọi người trong các nhóm đó.

Theo nguyên tắc "buộc" các phần tử, ta buộc thành các phần tử lớn là Mỹ, Nga, Anh, Pháp.

Lúc này bài toán trở thành xếp bốn phần tử vào bốn ghế trên bàn tròn.

Cố định nhóm Mỹ, có 3 cách xếp chỗ cho nhóm Nga, 2 cách xếp chỗ cho nhóm Anh, 1 cách xếp chỗ cho nhóm Pháp.

Vậy có $3!=6$ cách xếp.

Vậy xác suất để xếp cho các vị cùng quốc tịch ngồi cạnh nhau là $\frac{6}{23!}$.

Câu 13. Đáp án B.

Vì đồng xu là cân đối nên xác suất sấp – ngửa của mỗi lần tung là như nhau và bằng $0,5$.

Xác suất để 5 lần tung đồng xu đều sấp là $0,5^5 = 0,03125$

Câu 14. Đáp án C.

Gọi A_j là biến cố "Xạ thủ thứ j bắn trúng". Với $j = \overline{1;3}$.

$\Rightarrow P\left(\overline{A_1}\right) = 1 - 0,6 = 0,4$; $\Rightarrow P\left(\overline{A_2}\right) = 1 - 0,7 = 0,3; P\left(\overline{A_3}\right) = 1 - 0,8 = 0,2$

Gọi A là biến cố "Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng" thì $P(\overline{\mathrm{A}}) = P(\overline{\mathrm{A}_1}).P(\overline{\mathrm{A}_2}).P(\overline{\mathrm{A}_3}) = 0,4.0,3.0,2 = 0,024$

$\Rightarrow P(\mathrm{A}) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - 0,024 = 0,976$

Câu 15. Đáp án D.

Gọi K là biến cố "Ném được vòng vào cổ chai", A_1 là biến cố "Ném được vòng vào cổ chai lần đầu", A_2 là biến cố "Ném được vòng vào cổ chai lần thứ 2", A_3 là biến cố "Ném được vòng vào cổ chai lần thứ ba".

$\Rightarrow P(K) = P(A_1) + P(\overline{A_1}A_2) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) = P(A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)$;

$= 0,75 + 0,25.0,6 + 0,25.0,4.0,3 = 0,81$.

Câu 16. Đáp án C.

Mỗi đồng xu có hai khả năng: ngửa hoặc sấp. Do đó số phần tử của không gian mẫu khi gieo ba đồng xu là $|\Omega| = 2^3 = 8$.

Ta có biến cố đối của A là $\overline{A}$: "Không có đồng xu nào xuất hiện mặt ngửa" $\Leftrightarrow$ "Cả ba đồng xu đều xuất hiện mặt sấp".

Khi đó $\Omega_{\overline{A}} = \{(S;S;S)\} \Rightarrow |\Omega_{\overline{A}}| = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \frac{|\Omega_{\overline{A}}|}{|\Omega|} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Câu 17. Đáp án D.

Nhận xét: Do con xúc xắc chỉ có 6 mặt và để ý rằng $3.6 = 18$ là giá trị tối đa của tổng $x + y + z$. Và 18 không lớn hơn 16 là bao nhiêu nên ta sẽ sử dụng phương pháp tính phần bù.

Số các bộ thứ tự $(x;y;z)$ với $x;y;z$ là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 1 và nhỏ hơn hoặc bằng 6 là $|\Omega| = 6^3 = 216$.

Xét các bộ thứ tự $(x;y;z)$ có tổng $x + y + z \geq 16$. Ta có:

$16 = 5 + 5 + 6 = 5 + 6 + 5 = 6 + 5 + 5 = 6 + 6 + 4 = 6 + 4 + 6 = 4 + 6 + 6.$

$17 = 5 + 6 + 6 = 6 + 5 + 6 = 6 + 6 + 5$

$18 = 6 + 6 + 6$

Như vậy có tổng cộng 10 bộ $(x;y;z)$ thỏa mãn $x + y + z \geq 16$.

Số bộ $(x;y;z)$ thỏa mãn $x + y + z < 16$ là $216 - 10 = 206$.

Xác suất cần tính là $P = \frac{206}{216} = \frac{103}{108}$.

Câu 18. Đáp án A.

Nhận xét: Do con xúc xắc chỉ có 6 mặt và để ý rằng $3.6 = 18$ là giá trị tối đa của tổng $x + y + z$. Và 18 không lớn hơn 16 là bao nhiêu nên ta sẽ sử dụng phương pháp tính phần bù.

Số các bộ thứ tự $(x;y;z)$ với $x;y;z$ là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 1 và nhỏ hơn hoặc bằng 6 là $|\Omega| = 6^3 = 216$.

Xét các bộ thứ tự $(x;y;z)$ có tổng $x + y + z \geq 16$. Ta có:

$16 = 5 + 5 + 6 = 5 + 6 + 5 = 6 + 5 + 5 = 6 + 6 + 4 = 6 + 4 + 6 = 4 + 6 + 6.$

$17 = 5 + 6 + 6 = 6 + 5 + 6 = 6 + 6 + 5$

$18 = 6 + 6 + 6$

Như vậy có tổng cộng 10 bộ $(x;y;z)$ thỏa mãn $x + y + z \geq 16$.

Số bộ $(x;y;z)$ thỏa mãn $x + y + z < 16$ là $216 - 10 = 206$.

Xác suất cần tính là $P = \frac{206}{216} = \frac{103}{108}$.

Câu 19. Đáp án B.

Vì hai con xúc xắc có cùng 6 mặt nên số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6.6 = 36$.

Gọi $(x;y)$ là số chấm xuất hiện lần lượt trên mặt xanh và mặt đỏ.

Khi đó $\Omega_A = \{(3;1);(4;2);(5;3);(6;4)\} \Rightarrow |\Omega_A| = 4$

$\Rightarrow P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Câu 20. Đáp án A.

Số cách chọn 3 tấm bìa trong 6 tấm bìa và xếp thành một hang ngang là $|\Omega| = A_6^3 = 120$.

Số cách xếp 3 tấm bìa để không có được số có ba chữ số tức là vị trí đầu tiên là chữ số 0 là A_3^2 Số cách xếp 3 tấm bìa để tạo được số có ba chữ số là $A_6^3 - A_3^2 = 100$.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$.

Câu 21. Đáp án D.

Ta có điều kiện chủ chốt "tích hai số được chọn là một số chẵn" $\Leftrightarrow$ Tồn tại Doít nhất một trong hai số được chọn là chẵn.

Gọi $\overline{ab}$ là số tự nhiên có hai chữ số khác nhau được lập từ các số đã cho

Số cách chọn a: 6 cách; Số cách chọn b: 6 cách $\Rightarrow$ Số các số có hai chữ số khác nhau tạo được là $6.6=36$ số$\Rightarrow S$ có 36 phần tử.
Số cách lấy ngẫu nhiên 2 số từ tập S: $C_{36}^2=630$ cách
Gọi biến cố A: "Tích hai số được chọn là một số chẵn"
Gọi biến cố $\overline{A}$: "Tích hai số được chọn là một số lẻ"
Số các số lẻ trong S: $3.5=15$ (3 cách chọn chữ số hàng đơn vị là lẻ, 5 cách chọn chữ số hang chục khác 0).
Số cách lấy ngẫu nhiên 2 số lẻ trong 15 số lẻ: $C_{15}^2=105$ cách

$P(\overline{A})=\dfrac{|\Omega_{\overline{A}}|}{|\Omega|}=\dfrac{105}{630}=\dfrac{1}{6}$. Vậy $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

Câu 22. Đáp án D.
Chọn ba quả cân có $|\Omega|=C_8^3=56$ cách.
Chọn ba quả cân có tổng trọng lượng nhỏ hơn hoặc bằng 9 có các trường hợp sau:
TH1: Trong các quả được lấy ra không có quả cân trọng lượng 1 kg.
Ta có $2+3+4=9$ là tổng trọng lượng nhỏ nhất có thể. Do đó trong trường hợp này có đúng 1 cách chọn.
TH2: Trong các quả được lấy ra có quả cân trọng lượng 1 kg. Khi đó ta có:
$1+2+3=6;1+2+4=7;1+2+5=8;1+2+6=9;1+3+4=8;1+3+5=9.$
Trường hợp này ta có 6 cách chọn.
Vậy số cách chọn thỏa mãn ycbt là $56-1-6=49$.
Xác suất cần tính là: $\dfrac{49}{56}=\dfrac{7}{8}$.

Câu 23. Đáp án B.
Số cách lấy ra tùy ý 7 viên bi trong 20 viên bi đã cho là: $|\Omega|=C_{20}^7=77520$.
Để chọn ra không quá 2 viên bi đỏ từ 7 viên lấy ra là:
Lấy ra được 0 viên bi đỏ, 7 viên bi xanh: $C_8^7=8$ cách.
Lấy ra được 1 viên bi đỏ, 6 viên bi xanh: $C_{12}^1C_8^6=336$ cách.
Lấy ra được 2 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh: $C_{12}^2C_8^5=3696$ cách.
Vậy xác suất để 7 viên bi chọn ra không quá 2 viên bi đỏ là $\dfrac{8+336+3696}{77520}=\dfrac{101}{1938}$.

Câu 24. Đáp án D.
Gọi biến cố A: "Lấy 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10"
Số cách lấy ngẫu nhiên 10 tấm thẻ trong 30 tấm thẻ : C_{30}^{10} cách $\Rightarrow |\Omega|=C_{30}^{10}$.

Trong 30 tấm thẻ có 15 tấm thẻ mang số lẻ, 15 tấm thẻ mang số chẵn, 3 tấm thẻ mang số chia hết cho 10 (chú ý là các thẻ chia hết cho 10 đều là số chẵn)

Số cách chọn 5 tấm thẻ mang số lẻ: $C_{15}^{5}=3003$ cách.

Số cách chọn 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10 $C_{3}^{1}=3$ cách

Số cách chọn 4 tấm thẻ mang số chẵn không chia hết cho 10: $C_{12}^{4}=495$ cách

Số cách lấy 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ chia hết cho 10: $3003.3.495=4459455$ cách.

$\Rightarrow \Omega_A=4459455$

Vậy $P(A)=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\dfrac{4459455}{C_{30}^{10}}=\dfrac{99}{667}$.

Câu 25. Đáp án A.

Trong 9 thẻ đã cho có hai thẻ ghi số chia hết cho 4 (các thẻ ghi số 4 và 8), 7 thẻ còn lại có ghi số không chia hết cho 4.

Giả sử rút $x(1\le x\le 9; x\in\mathbb{N})$, số cách chọn x từ 9 thẻ trong hộp là C_9^x, số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega|=C_9^x$.

Gọi A là biến cố "Trong số x thẻ rút ra có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4 "

Số cách chọn tương ứng với biến cố $\overline{A}$ là $|\overline{A}|=C_7^x$

Ta có $P(\overline{A})=\dfrac{C_7^x}{C_9^x}\Rightarrow P(\text{A})=1-\dfrac{C_7^x}{C_9^x}$

Do đó $P(\text{A})>\dfrac{5}{6}\Leftrightarrow 1-\dfrac{C_7^x}{C_9^x}>\dfrac{5}{6}\Leftrightarrow x^2-17x+60<0\Rightarrow 5<x<12\Rightarrow 6\le x\le 9$

Vậy giá trị nhỏ nhất của x là 6. Vậy số thẻ ít nhất phải rút là 6.

Câu 26. Đáp án A.

Phân tích: Cần nhớ lại kiến thức cơ bản về bất đẳng thức tam giác.

Ba đoạn thẳng với chiều dài a,b,c có thể là 3 cạch của một tam giác khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a+b>c\\a+c>b\\b+c>a\end{cases}$$

Lời giải: Số phần tử của không gian mẫu là: $C_5^3=10$

Gọi A là biến cố "lấy ba đoạn thẳng lấy ra lập thành một tam giác"

Các khả năng chọn được ba đoạn thẳng lập thành một tam giác là $[3;5;7];[3;5;9];[5;7;9]$

Số trường hợp thuận lợi của biến cố A là 3. Suy ra xác suất của biến cố A là $P(\text{A})=\dfrac{3}{10}$

.

Câu 27. Đáp án C.

Gọi A là biến cố "A và B có giải thưởng giống nhau". Vì mỗi học sinh nhận được 2 cuốn sách các loại, nên giả sử có a học sinh nhận sách (Lí và Hóa) và $5-a$ học sinh nhận sách (Toán và Hóa).

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_9^2.C_7^3.C_4^4 = 1260$.

TH1: X và Y nhận sách (Toán, Lí), số khả năng là $C_7^3.C_4^4 = 35$.

TH2: X và Y nhận sách (Toán, Hóa), số khả năng là $C_7^1.C_6^2.C_4^4 = 105$.

TH1: X và Y nhận sách (Lí, Hóa), số khả năng là $C_7^2.C_5^3.C_2^2 = 210$.

$\Rightarrow |\Omega_A| = 25+105+210 = 350 \Rightarrow P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{5}{18}$

Câu 28. Đáp án B.

Theo công thức hoán vị vòng quanh ta có: $|\Omega| = 7!$

Để xếp các bạn nữ không ngồi cạnh nhau, trước hết ta xếp các bạn nam vào bàn tròn: có $4!$ cách, giữa 5 bạn nam đó ta sẽ có được 5 ngăn (do ở đây là bàn tròn). Xếp chỉnh hợp 3 bạn nữ vào 5 ngăn đó có A_5^3 cách.

Vậy xác suất xảy ra là: $P = \dfrac{4!.A_5^3}{7!} = \dfrac{2}{7}$.

Câu 29. Đáp án C.

Phân tích: Đề bài cho các điều kiện khá dài dòng, ta cần đưa chúng về dạng ngắn gọn dễ hiểu hơn.

+) "Biết rằng giới chuyên môn đánh giá Phong và Đạt ngang tài ngang sức": xác suất để Phong và Đạt thắng trong một ván là như nhau và bằng $0,5$.

+) "Khi Đạt thắng được 4 ván và Phong thắng được 2 ván rồi": nghĩa là Đạt chỉ cần thắng một ván nữa là được 5 ván, còn Phong phải thắng 3 ván nữa mới đạt được.

Lời giải:

Để xác định xác suất thắng chung cuộc của Đạt và Phong ta tiếp tục chơi thêm các ván "giả tưởng". Để Phong có thể thắng chung cuộc thì anh phải thắng Đạt 3 ván liên tiếp (vì Đạt chỉ còn một ván nữa là thắng).

Như vậy xác suất thắng cuộc của Phong là: $P(\mathrm{P}) = 0,5^3 = \dfrac{1}{8}$.

$\Rightarrow$ Xác suất thắng cuộc của Đạt là $P(\text{Đ}) = 1 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$

$\Rightarrow$ Tỉ lệ chia tiền phù hợp là $\dfrac{7}{8} : \dfrac{1}{8} = 7:1$

Câu 30. Đáp án D.

Phân tích: Bài này điểm mấu chốt là phải liệt kê được các trường hợp mà An thắng Bình ching cuộc. Ví dụ như: Séc 1: An thắng; Séc 2: An thắng; Séc 3 : Bình thắng; Séc 4: An thắng.

$\Rightarrow$ An thắng chung cuộc.

Lưu ý là ta phải tính cả thứ tự các séc An thắng hoặc thua. Như ở ví dụ trên là An thua ở séc thứ 3.

Lời giải: Giả sử số séc trong trân đấu giữa An và Bình là x. Dễ dàng nhận thấy $3 \le x \le 5$.

Ta xét các trường hợp:

TH1: Trận đấu có 3 séc$\Rightarrow$ An thắng cả 3 séc. Xác suất thắng trong trường hợp này là:

$P_1 = 0,4.0,4.0,4 - 0,064$

TH2: Trận đấu có 4 séc$\Rightarrow$ An thua 1 trong 3 séc: $1,2$ hoặc 3 và thắng séc thứ 4.

Số cách chọn 1 séc để An thua là: C_3^1 (Chú ý xác xuất để An thua trong 1 séc là $0,6$.)

$\Rightarrow P_2 = C_3^1.0,4^3.0,6 = 0,1152$

TH3: Trận đấu có 5 séc $\Rightarrow$ An thua 2 séc và thắng ở séc thứ 5.

Số cách chọn 2 trong 4 séc đầu để An thua là C_4^2 cách.

$\Rightarrow P_3 = C_4^2.0,4^3.0,6^2 = 0,13824$

Như vậy xác suất để An thắng chung cuộc là: $P = P_1 + P_2 + P_3 = 0,31744$

Nhận xét: *Trong bài này các bạn rất dễ mắc sai lầm sau: ở trường hợp 3 lại tính số cách chọn 2 ván An thua là C_5^2 mà không để ý rằng séc thứ 5 chắc chắn phải là An thắng.*

Câu 31. Đáp án D.

Phân tích: Với một bài yêu cầu tìm giá trị lớn nhất như thế này thì cách mà ta nghĩ đến đầu tiên là đặt ẩn (là số điểm) rồi sau đó tính biểu thức cần tính (xác suất đạt được số điểm) rồi sau đó tính biểu thức cần tính (xác suất đạt được số điểm) theo ẩn đó, việc còn lại là xử lí biểu thức.

Lời giải: Gọi x là số điểm bạn đó đạt được ($0 \le x \le 10$)($x \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow$ Bạn đó trả lời đúng x câu và trả lời sai $10 - x$ câu.

+) Xác suất mỗi câu bạn đó đúng là: $\frac{1}{3}$; sai là $\frac{2}{3}$.

+) Có C_{10}^x cách chọn ra x câu đúng. Do đó xác suất được x điểm là:

$$P(x) = C_{10}^x.\left(\frac{1}{3}\right)^x.\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x} = \frac{10!}{3^{10}}.\frac{2^{10-x}}{x!(10-x)!}$$

Do $P(x)$ là lớn nhất nên $\begin{cases} P(x) \geq P(x+1) \\ P(x) \geq P(x-1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10!}{3^{10}}.\dfrac{2^{10-x}}{x!(10-x)!} \geq \dfrac{10!}{3^{10}}.\dfrac{2^{9-x}}{(x+1)!(9-x)!} \\ \dfrac{10!}{3^{10}}.\dfrac{2^{10-x}}{x!(10-x)!} \geq \dfrac{10!}{3^{10}}.\dfrac{2^{11-x}}{(x-1)!(11-x)!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{10-x} \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x+1) \geq 10-x \Leftrightarrow x \geq \dfrac{8}{3} \\ \dfrac{x}{11-x} \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \leq 11-x \Leftrightarrow x \leq \dfrac{11}{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{8}{3} \leq x \leq \dfrac{11}{3}$. Mà $x \in \mathbb{N}$ nên $x = 3$

Nên xác suất bạ đó đạt 3 điểm là lớn nhất.

Câu 32. Đáp án C.

Ta có $27 = 10 + 10 + 7 = 10 + 9 + 8 = 9 + 9 + 9$

Với bộ $(10;10;7)$ có 3 cách xáo trộn điểm các lần bắn

Với bộ $(10;9;8)$ có 6 cách xáo trộn điểm các lần bắn

Với bộ $(9;9;9)$ có 1 cách xáo trộn điểm các lần bắn.

Do đó xác suất để sau 3 lần bắn xạ thủ được đúng 27 điểm là:

$P = 3.0,5^2.0,1 + 6.0,5.0,25.0,1 + 0,25^3 = 0,165625.$