QUY TẮC ĐẾM

A. LÝ THUYẾT

1. Quy tắc cộng

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiên, hành động kia có n cách thực hiên không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có m + n cách thực hiện.

Chú ý: số phần tử của tập hợp hữu hạn X được kí hiệu là |X| hoặc n(X)

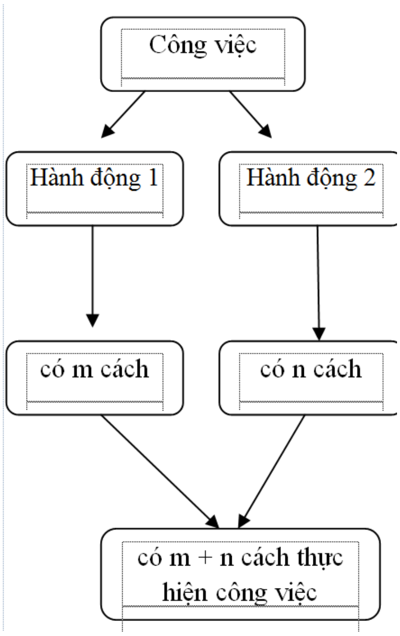
Quy tắc cộng được phát biểu ở trên thực chất là quy tắc đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau: Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau thì $n\left(A \cup B\right) = n\left(A\right) + n\left(B\right)$

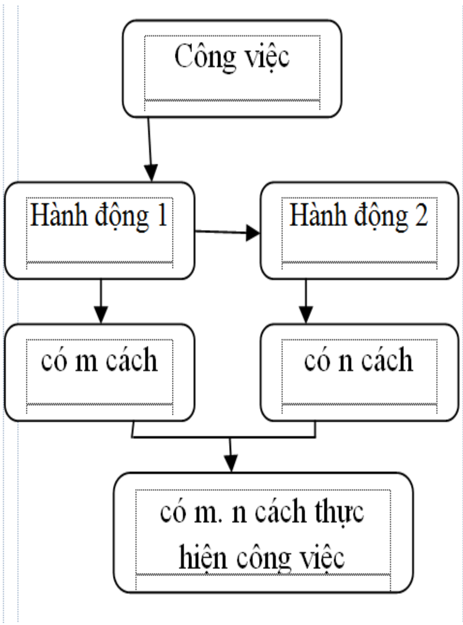
Mở rộng: Một công việc được hoàn thành bởi một trong k hành động $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ .Nếu hành động A_1 có $m_1$cách thực hiện, hành động A_2 có m_2 cách thực hiện,…, hành động A_k có m_k cách thực hiện và các cách thực hiên của các hành động trên không trùng nhau thì công việc đó có $m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_k$ cách thực hiện.

2. Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp.Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có m.n cách thực hiện.

Mở rộng: Một công việc được hoàn thành bởi k hành động $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ liên tiếp. Nếu hành động A_1 có $m_1$cách thực hiện, ứng với mỗi cách thực hiện hành động A_1 có m_2 cách thực hiện hành động A_2,…, có m_k cách thực hiện hành động A_k thì công việc đó có $m_1.m_2.m_3.....m_k$ cách hoàn thành.





B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHÉP ĐẾM

Phương pháp chung:

Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện một công việc A bằng quy tắc cộng, ta thực hiện các bước:

Bước 1: Phân tích xem có bao nhiêu phương án riêng biệt để thực hiện công việc A (có nghĩa công việc A có thể hoàn thành bằng một trong các phương án $A_1; A_2; ...; A_n$).

Bước 2: Đếm số cách chọn $x_1; x_2; ...; x_n$ trong các phương án $A_1; A_2; ...; A_n$.

Bước 3: Dùng quy tắc cộng ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện công việc A bằng quy tắc nhân, ta thực hiện các bước:

Bước 1: Phân tích xem có bao nhiêu công đoạn liên tiếp cần phải tiến hành để thực hiện công việc A (giả sử A chỉ hoàn thành sau khi tất cả các công đoạn $A_1; A_2; ...; A_n$ hoàn thành).

Bước 2: Đếm số cách chọn $x_1; x_2; ...; x_n$ trong các công đoạn $A_1; A_2; ...; A_n$.

Bước 3: Dùng quy tắc nhân ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là $x = x_1.x_2.x_3...x_n$.

Ví dụ 1. Một lớp học có 25 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn ra:

a) một học sinh đi dự trại hè của trường.

b) một học sinh nam và một học sinh nữ dự trại hè của trường. Số cách Chonju trong mỗi trường hợp a và b lần lượt là

A. 45 và 500. **B.** 500 và 45. **C.** 25 và 500. **D.** 500 và 25.

Lời giải

Chọn A

a) Bước 1: Với bài toán a thì ta thấy cô giáo có thể có hai phương án để chọn học sinh đi thi:

Bước 2: Đếm số cách chọn.

∗ ***Phương án 1:*** chọn 1 học sinh đi dự trại hè của trường thì có 25 cách chọn.

∗ ***Phương án 2:*** chọn học sinh nữ đi dự trại hè của trường thì có 20 cách chọn.

Bước 3: Áp dụng quy tắc cộng.

Vậy có $20+25=45$ cách chọn.

b) Bước 1: Với bài toán b thì ta thấy công việc là chọn học sinh nam và một học sinh nữ. Do vậy ta có 2 công đoạn.

Bước 2: Đếm số cách chọn trong các công đoạn.

∗ ***Công đoạn 1:*** Chọn 1 học sinh nam trong số 25 học sinh nam thì có 25 cách chọn.

∗ ***Công đoạn 2:*** Chọn 1 học sinh nữ trong số 20 học sinh nữ thì có 20 cách chọn.

Bước 3: Áp dụng quy tắc nhân.

Vậy ta có $25.20=500$ cách chọn.

STUDY TIP

Bài toán ở ví dụ 1 giúp ta cũng cố và định hình các bước giải quyết bài toán đếm sử dụng quy tắc cộng; quy tắc nhân.

Chú ý:

∗ ***Quy tắc cộng:*** Áp dụng khi công việc có nhiều phương án giải quyết.

∗ ***Quy tắc nhân:*** Áp dụng khi công việc có nhiều công đoạn.

Ví dụ 2. Trên giá sách có 10 quyển sách Văn khác nhau, 8 quyển sách Toán khác nhau và 6 quyển sách Tiếng Anh khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai quyển sách khác môn nhau?

A. 80. **B.** 60. **C.** 48. **D.** 188.

Lời giải

Chọn D

Theo quy tắc nhân ta có:

$10.8=80$ cách chọn một quyển sách Văn và một quyển sách Toán khác nhau.

$10.6=60$ cách chọn một quyển sách Văn và một quyển sách Tiếng Anh khác nhau.

$8.6=48$ cách chọn một quyển sách Toán và một quyển sách Tiếng Anh khác nhau.

Theo quy tắc cộng ta có số cách chọn 2 quyển sách khác môn là $80+60+48=188$ cách.

STUDY TIP

Ta thấy bài toán ở ví dụ 2 là sự kết hợp của cả quy tắc cộng và quy tắc nhân khi bài toán vừa cần chia trường hợp vừa cần lựa chọn theo bước.

Ví dụ 3. Biển đăng kí xe ô tô có 6 chữ số và hai chữ cái trong số 26 chữ cái (không dùng các chữ I và O). Chữ đầu tiên khác 0. Hỏi số ô tô được đăng kí nhiều nhất có thể là bao nhiêu?

A. 5184.10^5. **B.** 576.10^6. **C.** 33384960. **D.** 4968.10^5.

Lời giải

Chọn A

Theo quy tắc nhân ta thực hiện từng bước.

Chữ cái đầu tiên có 24 cách chọn.

Chữ cái tiếp theo cũng có 24 cách chọn.

Chữ số đầu tiên có 9 cách chọn.

Chữ số thứ hai có 10 cách chọn.

Chữ số thứ ba có 10 cách chọn.

Chữ số thứ tư có 10 cách chọn.

Chữ số thứ năm có 10 cách chọn.
Chữ số thứ sau có 10 cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $24.24.9.10^5 = 5184.10^5$ là số ô tô nhiều nhất có thể đăng kí.

STUDY TIP

Có thể phân biệt bài toán sử dụng quy tắc cộng hay quy tắc nhân là phân biệt xem công việc cần làm có thể chia trường hợp hay phải làm theo từng bước.

Ví dụ 4. Có bao nhiêu cách xếp 7 học sinh A, B, C, D, E, F, G vào một hàng ghế dài gồm 7 ghế sao cho hai bạn B và F ngồi ở hai ghế đầu?

A. 720 cách. **B.** 5040 cách. **C.** 240 cách. **D.** 120 cách.

Lời giải

Chọn C

Ta thấy ở đây bài toán xuất hiện hai đối tượng.
Đối tượng 1: Hai bạn B và F (hai đối tượng này có tính chất riêng).
Đối tượng 2: Các bạn còn lại có thể thay đổi vị trí cho nhau.
Bước 1: Ta sử dụng tính chất riêng của hai bạn B và F trước. Hai bạn này chỉ ngồi đầu và ngồi cuối, hoán đổi cho nhau nên có $2!$ cách xếp.
Bước 2: Xếp vị trí cho các bạn còn lại, ta có $5!$ cách xếp.
Vậy ta có $2!.5! = 240$ cách xếp.

STUDY TIP

Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng hoán vị của n phần tử, ta dựa trên dấu hiệu

a. Tất cả n phần tử đều có mặt.
b. Mỗi phần tử chỉ xuất hiện 1 lần.
c. Có sự phân biệt thứ tự giữa các phần tử.
d. Số cách xếp n phần tử là số hoán vị của n phần tử đó $P_n = n!$.

Ví dụ 5. Một nhóm 9 người gồm ba đàn ông, bốn phụ nữ và hai đứa trẻ đi xem phim. Hỏi có bao nhiêu cách xếp họ ngồi trên một hàng ghế sao cho mỗi đứa trẻ ngồi giữa hai phụ nữ và không có hai người đàn ông nào ngồi cạnh nhau?

A. 288. **B.** 864. **C.** 24. **D.** 576.

Lời giải

Chọn B

Kí hiệu T là ghế đàn ông ngồi, N là ghế cho phụ nữ ngồi, C là ghế cho trẻ con ngồi. Ta có các phương án sau:

PA1: $TNCNTNCNT$

PA2: $TNTNCNCNT$

PA3: $TNCNCNTNT$

Xét phương án 1: Ba vị trí ghế cho đàn ông có $3!$ cách.

Bốn vị trí ghế cho phụ nữ có thể có $4!$ cách.

Hai vị trí ghế trẻ con ngồi có thể có $2!$ cách.

Theo quy tắc nhân thì ta có $3!.4!.2! = 288$ cách.

Lập luận tương tự cho phương án 2 và phương án 3.

Theo quy tắc cộng thì ta có $288 + 288 + 288 = 864$ cách.

STUDY TIP

Với các bài toán gồm có ít phần tử và vừa cần chia trường hợp vừa thực hiện theo bước thì ta cần chia rõ trường hợp trước, lần lượt thực hiện từng trường hợp (sử dụng quy tắc nhân từng bước) sau đó mới áp dụng quy tắc cộng để cộng số cách trong các trường hợp với nhau.

Ví dụ 6. Một chồng sách gồm 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Vật lý, 5 quyển sách Hóa học. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các quyển sách trên thành một hàng ngang sao cho 4 quyển sách Toán đứng cạnh nhau, 3 quyển Vật lý đứng cạnh nhau?

A. 1 cách. **B.** 5040 cách. **C.** 725760 cách. **D.** 144 cách.

Lời giải

Chọn C.

Bước 1: Do đề bài cho 4 quyển sách Toán đứng cạnh nhau nên ta sẽ coi như "buộc" các quyển sách Toán lại với nhau thì số cách xếp cho "buộc" Toán này là $4!$ cách.

Bước 2: Tương tự ta cũng "buộc" 3 quyển sách Lý lại với nhau, thì số cách xếp cho "buộc" Lý này là $3!$ cách.

Bước 3: Lúc này ta sẽ đi xếp vị trí cho 7 phần tử trong đó có:

+ 1 "buộc" Toán.
+ 1 "buộc" Lý.
+ 5 quyển Hóa.

Thì sẽ có $7!$ cách xếp.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $7!.4!.3! = 725760$ cách xếp.

STUDY TIP

Với các dạng bài tập yêu cầu xếp hai hoặc nhiều phần tử đứng cạnh nhau thì ta sẽ "buộc" các phần tử này một nhóm và coi như 1 phần tử.

Ví dụ 7. Một câu lạc bộ phụ nữ của phường Khương Mai có 39 hội viên. Phường Khương Mai có tổ chức một hội thảo cần chọn ra 9 người xếp vào 9 vị trí lễ tân khác nhau ở cổng chào, 12 người vào 12 vị trí khác nhau ở ghế khách mời. Hỏi có bao nhiêu cách chọn các hội viên để đi tham gia các vị trí trong hội thao theo quy định?

A. $A_{39}^{9}.A_{39}^{12}$. **B.** $C_{39}^{9}.C_{30}^{12}$. **C.** $C_{39}^{9}.C_{39}^{12}$. **D.** $A_{39}^{9}.A_{30}^{12}$.

Phân tích

Bài toán sử dụng quy tắc nhân khi ta phải thực hiện hai bước:

Bước 1: Chọn 9 người vào vị trí lễ tân.

Bước 2: Chọn 12 người vào vị trí khách mời.

Dấu hiệu nhận biết sử dụng chỉnh hợp ở phần STUDY TIP.

Lời giải

Chọn D.

Bước 1: Chọn người vào vị trí lễ tân.

Do ở đây được sắp theo thứ tự nên ta sẽ sử dụng chỉnh hợp. Số cách chọn ra 9 người vào vị trí lễ tân là A_{39}^{9} cách.

Bước 2: Chọn người vào vị trí khách mời. Số cách chọn là 12 thành viên trong số các thành viên còn lại để xếp vào khách mời là A_{39}^{12} cách.

Vậy theo quy tắc nhân thì số cách chọn các hội viên để đi dự hội thảo theo đúng quy định là $A_{39}^{9}.A_{39}^{12}$ cách.

STUDY TIP

Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng chỉnh hợp chập k của n phần tử, ta cần có các dấu hiệu:

a. Phải chọn k phần tử từ n phần tử cho trước.
b. Có sự phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.
c. Số cách chọn k phần tử có phân biệt thứ tự từ n phần tử là A_n^k cách.

Ví dụ 8. Có 6 học sinh và 2 thầy giáo được xếp thành hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho hai thầy giáo không đứng cạnh nhau?

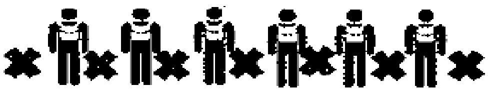
A. 30240 cách. **B.** 720 cách. **C.** 362880 cách. **D.** 1440 cách.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1: Trước hết, xếp 6 học sinh thành một hàng có $6!$ cách.

Lúc này giữa hai học sinh bất kì sẽ tạo nên một vách ngăn và 6 học sinh sẽ tạo nên 7 vị trí có thể xếp các thầy vào đó tính cả hai vị trí ở hai đầu hàng (hình minh họa bên dưới). 7 vị trí dấu nhân chính là 7 vách ngăn được tạo ra.



+ Do đề yêu cầu 2 thầy giáo không đứng cạnh nhau nên ta xếp 2 thầy giáo vào 2 trong 7 vị trí vách ngăn được tạo ra có A_7^2 cách.

Theo quy tắc nhân ta có tất cả $6!.A_7^2 = 30240$ cách xếp.

Cách 2:

- Có $8!$ cách xếp 8 người.
- Buộc hai giáo viên lại với nhau thì có $2!$ cách buộc.

Khi đó có $2.7!$ cách xếp. Mà hai giáo viên không đứng cạnh nhau nên số cách xếp là $8! - 2.7! = 30140$ cách xếp.

STUDY TIP

Khi bài toán yêu cầu xếp hai hoặc nhiều phần tử không đứng cạnh nhau. Chúng ta có thể tạo ra các "vách ngăn" các phần tử này trước khi xếp chúng.

Ví dụ 9. Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa xem như đôi một khác nhau), người ta muốn chọn một bó hồng gồm 7 bông, hỏi có bao nhiêu cách chọn bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông hồng vàng và 3 bông hồng đỏ?

A. 10 cách. **B.** 20 cách. **C.** 120 cách. **D.** 150 cách.

Phân tích

Ta thấy do chỉ chọn 7 bông hồng mà có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ nên chỉ có 3 trường hợp sau:

TH1: Chọn được 3 bông hồng vàng và 4 bông hồng đỏ.

TH2: Chọn được 4 bông hồng vàng và 3 bông hồng đỏ.

TH3: Chọn được 3 bông hồng vàng, 3 bông hồng đỏ và 1 bông hồng trắng.

Lời giải

Chọn D.

TH1: Số cách chọn 3 bông hồng vàng là C_5^3 cách.

Số cách chọn 4 bông hồng đỏ là C_4^4 cách.

Theo quy tắc nhân thì có $C_5^3.C_4^4 = 10$ cách.

TH2: Tương tự TH1 thì ta có $C_5^4.C_4^3 = 20$ cách.

TH3: Tương tự thì có $C_5^3.C_4^3.C_3^1 = 120$ cách.

Vậy theo quy tắc cộng thì có $10 + 20 + 120 = 150$ cách.

STUDY TIP

Để nhận dạng bài toán sử dụng tổ hợp chập k của n phần tử, ta dựa trên dấu hiệu:

a. Phải chọn ra k phần tử từ n phần tử cho trước.

b. Không phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.

c. Số cách chọn k phần tử không phân biệt thứ tự từ n phần tử đã cho là C_n^k cách.

Từ các bài toán trên ta rút ra được quy luật phân biệt tổ hợp và chỉnh hợp như sau:

- Chỉnh hợp và tổ hợp liên hệ với nhau bởi công thức: $A_n^k = k!.C_n^k$
- Chỉnh hợp: Có thứ tự.
- Tổ hợp: Không có thứ tự.
- Những bài toán mà kết quả phụ thuộc vào vị trí các phần tử thì sử dụng chỉnh hợp. Ngược lại thì sử dụng tổ hợp.
- Cách lấy k phần tử từ tập n phần tử $(k \le n)$:

  + Không thứ tự: C_n^k

  + Có thứ tự: A_n^k

Ví dụ 10. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

A. 120. **B.** 90. **C.** 270. **D.** 255.

Lời giải

Chọn D.

Số cách chọn 4 học sinh bất kì từ 12 học sinh là $C_{12}^4 = 495$ cách.

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một em được tính như sau:

∗ **TH1:** Lớp A có hai học sinh, các lớp B, C mỗi lớp có 1 học sinh:

Chọn 2 học sinh trong 5 học sinh lớp A có C_5^2 cách.

Chọn 1 học sinh trong 4 học sinh lớp B có C_4^1 cách.

Chọn 1 học sinh trong 3 học sinh lớp C có C_3^1 cách.

Suy ra số cách chọn là $C_5^2.C_4^1.C_3^1 = 120$ cách.

∗ **TH2:** Lớp B có 2 học sinh, các lớp A, C mỗi lớp có 1 học sinh:

Tương tự ta có số cách chọn là $C_5^1.C_4^2.C_3^1 = 90$ cách.

∗ **TH3:** Lớp C có 2 học sinh, các lớp A, B mỗi lớp có 1 học sinh:

Tương tự ta có số cách chọn là $C_5^1.C_4^1.C_3^2 = 60$ cách.

Vậy số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một học sinh là $120 + 90 + 60 = 270$ cách.

Số cách chọn ra 4 học sinh thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên là $495 - 270 = 225$ cách.

STUDY TIP

Trong nhiều bài toán, làm trực tiếp sẽ khó trong việc xác định các trường hợp hoặc các bước thì ta nên làm theo hướng gián tiếp như bài toán ở ví dụ 9.

Ta sử dụng cách làm gián tiếp khi bài toán giải bằng cách trực tiếp gặp khó khan do xảy ra quá nhiều trường hợp, chúng ta tìm cách gián tiếp bằng cách xét bài toán đối.

Ví dụ 11. Với các chữ số $0,1,2,3,4,5$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng một lần?

A. 6720 số. **B.** 40320 số. **C.** 5880 số. **D.** 840 số.

Lời giải

Chọn C.

Giả sử các số tự nhiên gồm 8 chữ số tương ứng với 8 ô.

Do chữ số 1 có mặt 3 lần nên ta sẽ coi như tìm số các số thỏa mãn đề bài được tạo nên từ 8 số $0,1,1,1,2,3,4,5$.

Số hoán vị của 8 số $0,1,1,1,2,3,4,5$ trong 8 ô trên là $8!$

Mặt khác chữ số 1 lặp lại 3 lần nên số cách xếp là $\frac{8!}{3!}$ kể cả trường hợp số 0 đứng đầu.

Xét trường hợp ô thứ nhất là chữ số 0, thì số cách xếp là $\frac{7!}{3!}$.

STUDY TIP

Bài toán trên là một dấu hiêu của hoán vị lặp. Để biết thêm về hoán vị lặp thì ta sẽ nghiên cứu ở phần đọc thêm.

❀ **ĐỌC THÊM:** Cho k phần tử khác nhau $a_1, a_2, ..., a_k$. Một cách sắp xếp n phân tử trong đó gồm n_1 phần tử a_1, n_2 phần tử $a_2, ..., n_k$ phần tử a_k $(n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$ theo một thứ tự nào đó được gọi là hoán vị lặp cấp n và kiểu $(n_1, n_2, ..., n_k)$ của k phần tử. Số các hoán vị lặp dạng như trên là

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!.n_2!...n_k!}.$$

Vậy các số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\frac{8!}{3!} - \frac{7!}{3!} = 5880$ số.

Ví dụ 12. Cho 8 bạn học sinh A, B, C, D, E, F, G, H. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 8 bạn đó ngồi xung quanh 1 bàn tròn có 8 ghế?

A. 40320 cách. **B.** 5040 cách. **C.** 720 cách. **D.** 40319 cách.

Lời giải

Ta thấy ở đây xếp các vị trí theo hình tròn nên ta phải cố định vị trí một bạn.

Ta chọn cố định vị trị của A, sau đó xếp vị trí cho 7 bạn còn lại có $7!$ cách.

Vậy có $7! = 5040$ cách.

ĐỌC THÊM

Hoán vị vòng quanh: Cho tập A gồm n phần tử. Một cách sắp xếp n phần tử của tập A thành một dãy kín được gọi là một hoán vị vòng quanh của n phần tử. Số các hoán vị vòng quanh của n phần tử là $Q_n = (n-1)!$

Ví dụ 13. Một thầy giáo có 10 cuốn sách khác nhau trong đó có 4 cuốn sách Toán, 3 cuốn sách Lí, 3 cuốn sách Hóa. Thầy muốn lấy ra 5 cuốn và tặng cho 5 em học sinh A, B, C, D, E mỗi em một cuốn. Hỏi thầy giáo có bao nhiêu cách tặng cho các em học sinh sao cho sau khi tặng xong, mỗi một trong ba loại sách trên đều còn ít nhất một cuốn.

A. 204 cách. **B.** 24480 cách. **C.** 720 cách. **D.** 2520 cách.

Lời giải

Ta thấy với bài toán này nếu làm trực tiếp thì sẽ khá khó, nên ta sẽ làm theo cách gián tiếp. Tìm bài toán đối đó là tìm số cách sao cho sau khi tặng sách xong có 1 môn hết sách.

TH1: Môn Toán hết sách:

Số cách chọn 4 cuốn sách Toán là 1 cách.

Số cách chọn 1 cuốn trong 6 cuốn còn lại là 6 cách.

Vậy có 6 cách chọn sách.

Số cách tặng 5 cuốn sách đó cho 5 em học sinh là $A_5^5 = 120$ cách.

Vậy có $6.120 = 720$ cách.

TH2: Môn Lí hết sách:

Số cách chọn 3 cuốn sách Lí là 1 cách.

Số cách chọn 2 cuốn trong 7 cuốn còn lại là C_7^2 cách.

Vậy có 21 cách chọn sách.

Số cách tặng 5 cuốn sách đó cho 5 em học sinh là $A_5^5 = 120$ cách.

Vậy có $21.120 = 2520$ cách.

TH3: Môn Hóa hết sách: Tương tự trường hợp 2 thì có 2520 cách.

Số cách chọn 5 cuốn bất kì trong 10 cuốn và tặng cho 5 em là $C_{10}^5.A_5^5 = 30240$ cách.

Vậy số cách chọn sao cho sau khi tặng xong, mỗi loại sách trên đều còn lại ít nhất một cuốn là $30240 - 720 - 2520 - 2520 = 24480$ cách.

STUDY TIP

Ở đây có nhiều độc giả không xét đến công đoạn sau khi chọn sách còn công đoạn tặng sách nữa. Do các bạn A, B, C, D, E là khác nhau nên mỗi cách tặng sách các môn cho các bạn là khác nhau, nên ta phải xét thêm công đoạn đó.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Trong một lớp có 17 bạn nam và 11 bạn nữ.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra hai bạn, trong đó có một bạn nam và một bạn nữ?

b) Hỏi có bao nhiêu cách chọn một bạn nam làm lớp trưởng?

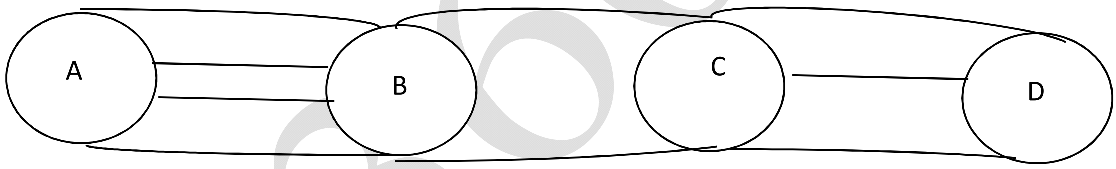
A. a. 187 cách và b. 28 cách.

B. a. 28 cách và b. 187 cách.

C. a. 17 cách và b. 11 cách.

D. a. 11 cách và b. 17 cách.

Câu 2. Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình dưới. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại B



A. 576. **B.** 24. **C.** 144. **D.** 432.

Câu 3. Một lớp có 25 học sinh khá môn Toán, 24 học sinh khá môn Ngữ Văn, 10 học sinh khá cả môn Toán và môn Ngữ Văn và 3 học sinh không khá cả Toán và Ngữ Văn. Hỏi lớp học đó có bao nhiêu học sinh?

A. 39. **B.** 42. **C.** 62. **D.** 52.

Câu 4. Trong kì thi tuyển nhân viên chuyên môn cho công ty cổ phần Giáo dục trực tuyến VEDU, ở khối A có 51 thí sinh đạt điểm giỏi môn Toán, 73 thí sinh đạt điểm giỏi môn Vật lí, 73 thí sinh đạt điểm giỏi môn Hóa học, 32 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Vật lí, 45 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Vật lí và Hóa học, 21 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Hóa học, 10 thí sinh đạt điểm giỏi cả ba môn Toán, Vật lí và Hóa học. Có 767 thí sinh mà cả ba môn đều không có điểm giỏi. Hỏi có bao nhiêu thí sinh tham dự tuyển nhân viên chuyên môn cho công ty?

A. 867. **B.** 776. **C.** 264. **D.** 767.

Câu 5. Người ta phỏng vấn 100 người về ba bộ phim A, B, C đang chiếu thì thu được kết quả như sau:

Bộ phim A: có 28 người đã xem.

Bộ phim B: có 26 người đã xem.

Bộ phim B: có 14 người đã xem.

Có 8 người đã xem hai bộ phim A và B

Có 4 người đã xem hai bộ phim B và C
Có 3 người đã xem hai bộ phim A và C
Có 2 người đã xem cả ba bộ phim A, B và C.
Số người không xem bất cứ phim nào trong cả ba bộ phim A, B, C là:

A. 55. **B.** 45. **C.** 32. **D.** 51.

Câu 6. Một đội văn nghệ chuẩn bị được 2 vở kịch, 3 điệu múa và 6 bài hát. Tại hội diễn, mỗi đội chỉ được trình diễn 1 vở kịch, 1 điệu múa và 1 bài hát. Hỏi đội văn nghệ trên có bao nhiêu cách chọn chương trình diễn, biết chất lượng các vở kịch, điệu múa, bài hát là như nhau?

A. 11. **B.** 36. **C.** 25. **D.** 18.

Câu 7. Có bao nhiêu cách sắp xếp 8 viên bi đỏ khác nhau và 8 viên bi đen khác nhau thành một dãy sao cho hai viên bi cùng màu thì không được ở cạnh nhau?

A. 3251404800. **B.** 1625702400. **C.** 72. **D.** 36.

Câu 8. Sắp xếp 5 học sinh lớp A và 5 học sinh lớp B vào hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy 5 ghế sao cho 2 học sinh ngồi đối diện nhau thì khác lớp. Khi đó số cách xếp là:

A. 460000. **B.** 460500. **C.** 460800. **D.** 460900.

Câu 9. Có 20 cặp vợ chồng tham dự chương trình Gameshow truyền hình thực tế. Có bao nhiêu cách chọn ra hai cặp đôi sao cho hai cặp đó là hai đôi vợ chồng?

A. 380. **B.** 116280. **C.** 90. **D.** 5040.

Câu 10. Cho tập hợp $A=\{2;5\}$. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 10 chữ số sao cho không có chữ số 2 nào đứng cạnh nhau?

A. 144 số. **B.** 143 số. **C.** 1024 số. **D.** 512 số.

Câu 11. Có 6 học sinh và 3 thầy giáo A, B, C. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ cho 9 người đó ngồi trên một hàng ngang có 9 ghế sao cho mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh?

A. 43200. **B.** 720. **C.** 60. **D.** 4320.

Câu 12. Trong một tổ học sinh có 5 em gái và 10 em trai. Thùy là một trong 5 em gái và Thiện là một trong 10 em trai đó. Thầy chủ nhiệm chọn một nhóm 5 bạn tham gia buổi văn nghệ sắp tới. Hỏi thầy chủ nhiệm có bao nhiêu cách chọn mà trong đó có ít nhất một trong hai em Thùy hoặc Thiện không được chọn?

A. 286. **B.** 3003. **C.** 2717. **D.** 1287.

Câu 13. Một nhóm học sinh có 3 em nữ và 7 em trai. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 10 em này thành một hàng ngang sao cho giữa hai em nữ bất kì đều không có một em nam nào?

A. 241920. **B.** 30240. **C.** 5040. **D.** 840.

Câu 14. Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau và tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn bằng 8?

A. 720 số. **B.** 504 số. **C.** 936 số. **D.** 1440 số.

Câu 15. Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Biết rằng số tam giác có đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$ gấp 20 lần so với số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$. Vậy giá trị của n là:

A. $n=10$. **B.** $n=12$. **C.** $n=8$. **D.** $n=14$.

Câu 16. Giả sử ta dùng 5 màu để tô màu cho 3 nước khác nhau trên bản đồ và không có màu nào được dùng hai lần. Số các cách để chọn những màu cần dùng là:

A. $\frac{5!}{2!}$. **B.** 5.3. **C.** $\frac{5!}{3!2!}$. **D.** 5^3.

Câu 17. Ông bà An cùng 6 đứa con đang lên máy bay theo một hàng dọc. Có bao nhiêu cách xếp hàng khác nhau nếu ông An và bà An đứng ở đầu hoặc cuối hàng?

A. 720. **B.** 1440. **C.** 20160. **D.** 40320.

Câu 18. Có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu khó, 10 câu trung bình, 15 câu dễ. Từ 30 câu đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu khác nhau, sao cho mỗi đề phải có 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu dễ không ít hơn 2?

A. 142506. **B.** 56875. **C.** 10500. **D.** 22750.

Câu 19. Biển đăng kí xe ô tô có 6 chữ số và hai chữ cái trong số 26 chữ cái (không dùng các chữ I và O). Chữ số đầu tiên khác 0. Hỏi số ô tô được đăng kí nhiều nhất có thể là bao nhiêu?

A. 5184.10^5. **B.** 576.10^6. **C.** 33384960. **D.** 4968.10^5.

Câu 20. Một bộ ghép hình gồm các miếng gỗ. Mỗi miếng gỗ được đặc trưng bởi 4 tiêu chuẩn: chất liệu, màu sắc, hình dạng và kích cỡ. Biết rằng có 2 chất liệu (gỗ, nhựa); có 4 màu (xanh, đỏ, lam, vàng); có 4 hình dạng (hình tròn, vuông, tam giác, lục giác) và có 3 kích cỡ (nhỏ, vừa, lớn). Xét miếng gỗ "nhựa, đỏ, hình tròn, vừa". Hỏi có bao nhiêu miếng gỗ khác miếng gỗ trên ở đúng hai tiêu chuẩn?

A. 29. **B.** 39. **C.** 48. **D.** 56.

Câu 21. Có 5 bi đỏ và 5 bi trắng có kích thước đôi một khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các bi này thành một hàng dài sao cho hai bi cùng màu không được nằm kề nhau?

A. 28800. **B.** 86400. **C.** 43200. **D.** 720.

Câu 22. Cho $X=\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau từ X sao cho một trong 3 chữ số đầu tiên phải có mặt chữ số 1

A. 2880. **B.** 840. **C.** 1440. **D.** 2520.

Câu 23. Một hộp bi có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi xanh. Có bao nhiêu cách để lấy 4 viên bi từ hộp sao cho trong 4 viên bi lấy được số bi đỏ lớn hơn số bi vàng?

A. 125. **B.** 275. **C.** 150. **D.** 270.

Câu 24. Cho hai đường thẳng song song $d_1;d_2$. Trên đường thẳng d_1 lấy 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 lấy 15 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác tạo thành mà ba đỉnh của nó được chọn từ 25 điểm vừa nói ở trên?

A. $C_{10}^2C_{15}^1$. **B.** $C_{10}^1C_{15}^2$. **C.** $C_{10}^2C_{15}^1+C_{10}^1C_{15}^2$. **D.** $C_{10}^2C_{15}^1C_{10}^1C_{15}^2$.

Câu 25. Từ các chữ số của tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số trong đó chữ số 2 xuất hiện đúng ba lần, các chữ số còn lại đôi một khác nhau?

A. 31203. **B.** 12600. **C.** 181440. **D.** 36.

Câu 26. Trong mặt phẳng cho 2010 điểm phân biệt sao cho ba điểm bất kì không thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu vecto mà có điểm đầu và điểm cuối thuộc 2010 điểm đã cho?

A. 4040100. **B.** 4038090. **C.** 2021055. **D.** 2019045.

Câu 27. Cho hai đường thẳng song song $d_1;d_2$. Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt $(n\ge 2)$. Biết rằng có 2800 tam giác có đỉnh là các điểm nói trên. Vậy n có giá trị là?

A. 20. **B.** 21. **C.** 30. **D.** 32.

Câu 28. Trong mặt phẳng cho n điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và trong tất cả các đường thẳng nối hai điểm bất kì không có hai đường thẳng nào song song, trùng nhau hoặc vuông góc. Qua mỗi điểm vẽ các đường thẳng vuông góc với các đường thẳng được xác định bởi 2 trong $n-1$ điểm còn lại. Số giao điểm của các đường thẳng vuông góc giao nhau nhiều nhất là bao nhiêu?

A. $2C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}-\left[n\left(C^2_{n-1}-1\right)+5C^3_n\right]$.
B. $2C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}-2\left[n\left(C^2_{n-1}-1\right)+5C^3_n\right]$.
C. $3C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}-2\left[nC^2_{n-1}-1+5C^3_n\right]$.
D. $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}-\left[n\left(C^2_{n-1}-1\right)+5C^3_n\right]$.

Câu 29. Một bữa tiệc bàn tròn của các câu lạc bộ trong trường Đại học Sư Phạm Hà Nội trong đó có 3 thành viên từ câu lạc bộ Máu Sư Phạm, 5 thành viên từ câu lạc bộ Truyền thông và 7 thành viên từ câu lạc bộ Kĩ năng. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho các thành viên sao cho những người cùng câu lạc bộ thì ngồi cạnh nhau?

A. 7257600. **B.** 7293732. **C.** 3174012. **D.** 1418746.

Câu 30. Có 7 bông hồng đỏ, 8 bông hồng vàng, 10 bông hồng trắng, các bông hồng khác nhau từng đôi một. Hỏi có bao nhiêu cách lấy 3 bông hồng có đủ ba màu?

A. 560. **B.** 310. **C.** 3014. **D.** 319.

Câu 31. Xếp 6 người (trong đó có một cặp vợ chồng) ngồi quanh bàn tròn có 6 cái ghế không ghi số sao cho cặp vợ chồng ngồi cạnh nhau. Số cách xếp là:

A. 240. **B.** 48. **C.** 120. **D.** 24.

Câu 32. Một dãy ghế dài có 10 ghế. Xếp một cặp vợ chồng ngồi vào 2 trong 10 ghế sao cho người vợ ngồi bên phải người chồng (không bắt buộc phải ngồi gần nhau). Số cách xếp là:

A. 45. **B.** 50. **C.** 55. **D.** 90.

Câu 33. Một đoàn tàu có bốn toa đỗ ở sân ga. Có bốn hành khách bước lên tàu. Số trường hợp có thể xảy ra về cách chọn toa của bốn khách là:

A. 24. **B.** 256. **C.** 232. **D.** 1.

Câu 34. Trong một túi đựng 10 viên bi đỏ, 20 viên bi xanh, 15 viên bi vàng. Các viên bi có cùng kích cỡ. Số cách lấy ra 5 viên bi và sắp xếp chúng vào 5 ô sao cho 5 ô bi đó có ít nhất một viên bi đỏ.

A. 146611080. **B.** 38955840. **C.** 897127. **D.** 107655240.

Câu 35. Một bộ bài có 52 lá, có 4 loại: cơ, rô, chuồn, bích mỗi loại có 13 lá. Muốn lấy ra 8 lá bài phải có đúng 1 lá cơ, đúng 3 lá rô và không quá 2 lá bích. Hỏi có mấy cách chọn?

A. 39102206. **B.** 22620312. **C.** 36443836. **D.** 16481894.

Câu 36. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số trong đó các chữ số cách đều chữ số đứng giữa thì giống nhau?

A. 900. **B.** 9000. **C.** 90000. **D.** 27216.

Câu 37. Một lớp có n học sinh ($n>3$). Thầy chủ nhiệm cần chọn ra một nhóm và cần cử ra một học sinh làm nhóm trưởng. Số học sinh trong mỗi nhóm phải lớn hơn 1 và nhỏ hơn n. Gọi T là số cách chọn, lúc này:

A. $T=\sum\limits_{k=2}^{n-1}kC_n^k$. **B.** $T=n\left(2^{n-1}-1\right)$. **C.** $T=n2^{n-1}$. **D.** $T=\sum\limits_{k=1}^{n}kC_n^k$.

Câu 38. Trong một căn phòng có 36 người trong đó có 25 người họ Nguyễn, 11 người họ Trần. Trong số những người họ Nguyễn có 8 cặp là anh em ruột (anh trai và em gái), 9 người còn lại (gồm 4 nam và 5 nữ) không có quan hệ họ hàng với nhau. Trong 11 người họ

Trần, có 3 cặp là anh em ruột (anh trai và em gái), 5 người còn lại (gồm 2 nam và 3 nữ) không có quan hệ họ hàng với nhau. Chọn ngẫu nhiên 2 người.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai người cùng họ và khác giới tính?

A. 156. **B.** 30. **C.** 186. **D.** 126.

b) Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai người sao cho không có cặp anh em ruột nào?

A. 619. **B.** 630. **C.** 11. **D.** 25.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Đáp án A.

a) Bước 1: Chọn bạn nam có 17 cách. Bước 2: Chọn bạn nữ có 11 cách. Theo quy tắc nhân ta có $17.11=187$ cách

b) Số cách để chọn ra 1 bạn nam làm lớp trường là 17. Số cách để chọn ra 1 bạn nữ làm lớp trưởng là 11. Vậy có $11+17=28$ cách.

Câu 2. Đáp án C.

Đi từ A đến D có $4.2.3=24$ cách.

Đi từ D về B có $3.2=6$ cách.

Vậy đi từ A đến D rồi quay lại *B* có $6.24=144$ cách.

Câu 3. Đáp án B.

Gọi A là tập các học sinh khá môn Toán, B là tập các học sinh khá môn Ngữ Văn. Theo đề ta có: $|A|=25; |B|=24; |A\cap B|=10$.

Theo quy tắc tính số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn bất kì ta có:
$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=25+24-10=39$

Vậy lớp học có $39+3=42$ học sinh.

Câu 4. Đáp án A.

Kí hiệu A,B,C tương ứng là tập hợp các thí sinh đạt điểm giỏi ở ít nhất một trong ba môn là Toán, Vật lý, Hóa học.

$|A|=51; |B|=73; |C|=64; |A\cap B|=32; |B\cap C|=45; |A\cap C|=21; |A\cap B\cap C|=10.$

Lúc này ta có $A\cup B\cup C$ là tập hợp các học sinh đạt điểm giỏi ở ít nhất một trong ba môn là Toán, Vật lý, Hóa học. Ta có:

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|=51+73+64-32-45-21+10=100.$

Vậy số thí sinh dự tuyển vào công ty VEDU là $100+767=867$.

Câu 5. Đáp án B.

Theo quy tắc tính số phần tử của ba tập hợp hữu hạn bất kì, ta có số người xem ít nhất một bộ phim là $28+26+14-8-4-3+2=55$ người.

Vậy số người không xem bất cứ bộ phim nào là $100-55=45$ người.

Câu 6. Đáp án B.

Chọn 1 vở kịch có 2 cách. Chọn 1 điệu múa có 3 cách. Chọn 1 bài hát có 6 cách.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $2.3.6=36$ cách.

Câu 7. Đáp án A.

Nhận xét: Bài toán là sự kết hợp giữa quy tắc cộng và quy tắc nhân.

Do hai viên bi cùng màu không được ở cạnh nhau nên ta có trường hợp sau:

Phương án 1: Các bi đỏ ở vị trí lẻ. Có 8 cách chọn bi đỏ ở vị trí số 1.
Có 7 cách chọn bi đỏ ờ vị trí số 3.
....
Có 1 cách chọn bi đỏ ờ vị trí số 15.
Suy ra có $8.7.6...3.2.1$ cách xếp 8 bi đỏ.Tương tự có $8.7.6...3.2.1$ cách xếp 8 bi xanh.
Vậy có $(8.7...3.2.1)^2$ cách xếp.
Phương án 2: Các bi đỏ ở vị trí chẵn ta cũng có cách xếp tương tự.
Vậy theo quy tắc cộng ta có $(8!)^2+(8!)^2=3251404800$.

Câu 8. **Đáp án C.**

Cách 1:
Bước 1: Học sinh đầu tiên, giả sử đó là học sinh lớp A có 10 cách chọn ghế.
Bước 2: Có 5 cách chọn ra một học sinh lớp B ngồi vào ghế đối diện.
Bước 3: Có 8 cách chọn ra một học sinh lớp A vào ghế tiếp theo.
Bước 4: Có 4 cách chọn ra học sinh lớp B vào ghế đối diện.
Bước 5: Có 6 cách chọn ra học sinh lớp A.
Bước 6: Có 3 cách chọn học sinh lớp B vào ghế đối diện.
Bước 7: Có 4 cách chọn học sinh lớp A vào ghế tiếp.
Bước 8: Có 2 cách chọn học sinh lớp B vào ghế đối diện.
Bước 9: Có 2 cách chọn học sinh lớp A vào ghế kế tiếp.
Bước 10: Có 1 cách chọn học sinh lớp B vào ghế đối diện.
Theo quy tắc nhân thì có $10.5.8.4.6.3.4.2.2.1=(5!)^2.2^5=460800$ cách.

Cách 2:
Vì 2 học sinh ngồi đối diện nhau thì khác lớp nên mỗi cặp ghế đối diện nhau sẽ được xếp bởi 1 học sinh lớp A và 1 học sinh lớp B.
Số cách xếp 5 học sinh lớp A vào 5 cặp ghế là $5!$ cách. Số cách xếp 5 học sinh lớp B vào 5 cặp ghế là $5!$ cách. Số cách xếp chỗ ở mỗi cặp ghế là 2 cách.
Theo quy tắc nhân thì có $(5!)^2.2^5=460800$ cách.

Câu 9. **Đáp án A.**

Bước 1: Có 20 cách chọn người đàn ông đầu tiên.
Bước 2: Sau đó chỉ có 1 cách chọn vợ của anh ta.
Bước 3: Có 19 cách chọn người đàn ông tiếp theo.
Bước 4: Sau đó chỉ có 1 cách chọn vợ của anh ta.
Vậy theo quy tắc nhân thì có $20.1.19.1=380$ cách.

Câu 10. **Đáp án A.**

TH1: Số có 10 chữ số 5 : chỉ có 1 số duy nhất.
TH2: Số có 9 chữ số 5 và 1 chữ số 2.
Xếp 9 số 5 thành hàng có 1 cách. Khi đó tạo nên 10 "vách ngăn" để xếp số 2.
Xếp số 2 có C_{10}^1 cách. Vậy có C_{10}^1 số.
TH3: Số có 8 chữ số 5 và 2 chữ số 2.

Tương tự sử dụng phương pháp tạo vách ngăn như TH2 thì tìm được C_9^2 số.

TH4: Số có 7 chữ số 5 và 3 chữ số 2 : có C_8^3 số.

TH5: Số có 6 chữ số 5 và 4 chữ số 2 : có C_7^4 số.

TH6: Có 5 chữ số 5 và 5 chữ số 2 : có C_6^5 số.

Vậy theo quy tắc cộng thì có $1+C_{10}^1+C_9{}^2+C^3+C_7{}^4+C_6{}^5=144$ số.

Câu 11. Đáp án A.

Ta sử dụng phương pháp tạo "vách ngăn" được giới thiệu ờ phần lí thuyết.

Bước 1: Xếp vị trí cho 6 học sinh có $6!$ cách.

Bước 2: Do đề yêu cầu mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh nên ta chỉ tính 5 vách ngăn được tạo ra giữa 6 học sinh. Số cách xếp 3 thầy giáo vào 5 vị trí là A_5^3 cách.

Vậy theo quy tắc nhân thì có $6!.A_5^3=43200$ cách.

Câu 12. Đáp án C.

Do ở đây việc tìm trực tiếp sẽ có nhiều trường hợp nên ta sẽ giải bài toán bằng cách gián tiếp. Ta sẽ đi tìm bài toán đối.

Ta đi tìm số cách chọn ra 5 bạn mà trong đó có cả hai bạn Thùy và Thiện.

Bước 1: Chọn nhóm 3 em trong 13 em, trừ Thùy và Thiện thì có $C_{13}^3=286$ cách.

Bước 2: Ghép 2 em Thùy và Thiện có 1 cách.

Vậy theo quy tắc nhân thì có 286 cách chọn 5 em trong đó cả Thùy hoặc Thiện đều được chọn.

- Chọn 5 em bất kì trong số 15 em có $C_{15}^5=3003$ cách. Vậy theo yêu cầu đề bài thì có tất cả $3003-286=2717$ cách chọn mà trong đó có ít nhất một trong hai em Thùy và Thiện không được chọn.

Câu 13. Đáp án A.

Do ở đây xuất hiện dấu hiệu cúa phương pháp "buộc" phần từ đó là các phần tử được xếp cạnh nhau nên ta áp dụng như sau:

Bước 1: Buộc 3 em nữ thành một buộc thì số cách đổi vị trí các em nữ trong buộc đó là $3!$ cách.

Bước 2: Sau khi buộc 3 em nữ thì ta chỉ còn 8 phần tử. Số cách xếp 8 phần từ này là $8!$ cách.

Theo quy tắc nhân thì có $3!.8!=241920$ cách.

Câu 14. Đáp án D.

Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số cần lập. Theo giả thiết $a_3+a_4+a_5=8$. Suy ra $a_3;a_4;a_5\in\{1;2;5\}$ hoặc $a_3;a_4;a_5\in\{1;3;4\}$

TH1: $a_3;a_4;a_5\in\{1;2;5\}$

Có $3!$ cách chọn $\overline{a_3a_4a_5}$. Xếp $a_1;a_2;a_6$ có A_6^3 cách. Vậy theo quy tắc nhân thì có $3!A_6^3=720$ số.

TH2: $a_3;a_4;a_5 \in \{1;3;4\}$

Tương tự ta cũng tìm được 720 số.

Vậy có tất cả $720+720=1440$ số.

Câu 15. **Đáp án C.**

Số tam giác có 3 đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1;A_2;...;A_{2n}$ là C_{2n}^3.

Ứng với hai đường chéo đi qua tâm của đa giác $A_1A_2...A_{2n}$ cho tương ứng một hình chữ nhật có 4 đỉnh

là 4 điểm trong $2n$ điểm $A_1;A_2;...;A_{2n}$ và ngược lại mỗi hình chữ nhật như vậy sẽ cho ra 2 đường chéo đi qua tâm O của đa giác.

Mà số đường chéo đi qua tâm của đa giác đều $2n$ đỉnh là n nên số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong $2n$ điểm là C_n^2

Theo đề bài ta có: $C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \dfrac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} = \dfrac{20n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n=8$.

Câu 16. **Đáp án C.**

Số cách chọn ra 3 màu trong 5 màu mà không có màu nào trùng nhau là $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!.2!}$.

Câu 17. **Đáp án B.**

Bước 1: Xếp chỗ cho hai ông bà An có 2 cách.

Bước 2: xếp chỗ cho 6 người con có $6!$ cách.

Theo quy tắc nhân thì có $2.6!=1440$ cách

Câu 18. **Đáp án A.**

Xét các trường hợp:

THI: Đề gồm 2 câu dễ, 2 câu khó, 1 câu trung bình thì có $C_{15}^2C_5^2C_{10}^1 = 10500$ đề.

TH2: Đề gồm 2 câu dễ, 1 câu khó và 2 câu trung bình thì có $C_{15}^2C_5^1C_{10}^2 = 23625$ đề.

TH3: Đề gồm 3 câu dễ, 1 câu khó và 1 câu trung bình thì có $C_{15}^3C_5^1C_{10}^1 = 22750$ đề.

Theo quy tắc cộng thì có $10500+23625+22750=56875$ đề.

Câu 19. **Đáp án A.**

Theo quy tắc nhân ta thực hiện từng bước. Chữ cái đầu tiên có 24 cách chọn. Chữ cái tiếp theo cũng có 24 cách chọn.

Chữ số đầu tiên có 9 cách chọn

Chữ số thứ hai có 10 cách chọn.

Chữ số thứ ba có 10 cách chọn

Chữ số thứ bốn có 10 cách chọn

Chữ số thứ năm có 10 cách chọn

Chữ số thứ sáu có 10 cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $24.24.9.10^5 = 5184.10^5$ là số ô tô nhiều nhất có thể đăng ký.

Câu 20. **Đáp án A.**

Có $C_4^2=6$ cách chọn 2 trong 4 tiêu chuẩn.

Với hai tiêu chuẩn "chất liệu, cỡ" thì có $1.2=2$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.
Với hai tiêu chuẩn "chất liệu, màu" thì có $1.3=3$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.
Với hai tiêu chuẩn "chất liệu, dạng" thì có $1.3=3$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.
Với hai tiêu chuẩn "cỡ, dạng" thì có $2.3=6$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.
Với hai tiêu chuẩn "cỡ, màu" thì có $3.3=9$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.
Tóm lại có $2+3+3+6+6+9=29$ miếng.

Câu 21. **Đáp án A.**

Ta thấy điều kiện xếp là hai bi cùng màu không nằm cạnh nhau nên ta phải xếp xen kẽ các viên bi.

Có 2 cách chọn viên bi đầu tiên (có thể là đỏ hoặc trắng). Mỗi cách chọn có $5!$ cách xếp 5 bi đỏ và có $5!$ cách xếp 5 bi trắng. Vậy có $2.5!.5!=28800$ cách xếp.

Nhiều bạn có lời giải sai như sau: Ở đây ta áp dụng quy tắc "vách ngăn" để giải quyết bài toán.

Số cách xếp 5 bi đỏ là có $5!$ cách. 5 bi đỏ tạo ra 6 vách ngăn để xếp 5 bi trắng vào. Số cách xếp 5 bi trắng là A_6^5 cách.

Vậy số cách xếp các viên bi là $5!.A_6^5=86400$. Từ đây chọn B là sai. Do nếu theo quy tắc vách ngăn ở đây có 6 vách mà có 5 bi, tức là có thể có vách ngăn trống khiến cho 2 viên bi cùng màu cạnh nhau.

Câu 22. **Đáp án A.**

Gọi số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{abcde}$.

TH1: Nếu $a=1$ khi đó có $A_7^4=840$ cách chọn 4 chữ số xếp vào b,c,d,e.

TH2: Nếu $a\neq 1$, khi đó: Có 6 cách chọn a. Có 2 cách xếp chữ số 1 vào số cần tạo ở vị trí b hoặc c. Các chữ số còn lại trong số cần tạo có A_6^3 cách chọn. Như vậy trường hợp này có $2.6.A_6^3=1440$ số. Vậy có tất cả $840+1440=2280$ số.

Chú ý: Nhiều độc giả quên mất $a\neq 0$ nên tính cả $a=0$ nên dẫn đến ra D là sai.

Câu 23. **Đáp án B.**

Các trường hợp lấy được 4 bi trong đó số bi đỏ lớn hơn số bi vàng như sau:

***TH1:** Số bi lấy được không có bi vàng:

- lấy 4 bi đỏ: Có C_5^4 cách
- Lấy 1 bi đỏ, 3 bi xanh có $C_5^1C_4^3$ cách.
- Lấy 2 bi đỏ, 2 bi xanh có $C_5^2C_4^2$ cách.
- Lấy 3 bi đỏ, 1 bi xanh có $C_5^3C_4^1$ cách.

***TH2:** 4 bi lấy được có đúng 1 bi vàng

- Lấy 2 bi đỏ, 1 bi vàng, 1 bi xanh có $C_5^2C_3^1C_4^1$ cách.
- Lấy 3 bi đỏ, 1 bi vàng có $C_5^3C_3^1$ cách.

Vậy số cách là: $C_5^4 + C_5^1C_4^3 + C_5^2C_4^2 + C_5^3C_4^1 + C_5^2C_3^1C_4^1 + C_5^3C_3^1 = 275$

Câu 24. Đáp án C.

Ta có 2 trường hợp:

TH1:tam giác gồm hai đỉnh thuộc d_1 và một đỉnh thuộc d_2**.** Số cách chọn bộ hai điểm trong 10 điểm thuộc d_1 là C_{10}^2. Số cách chọn một điểm trong 15 điểm thuộc d_2 là C_{15}^1.Theo quy tắc nhân thì có $C_{10}^2C_{15}^1$ tam giác.

TH2: Gồm một đỉnh thuộc d_1 và hai đỉnh thuộc d_2. Tương tự ta tìm được $C_{10}^1C_{15}^2$ tam giác thỏa mãn.

Vậy theo quy tắc cộng thì có tất cả $C_{10}^2C_{15}^1 + C_{10}^1C_{15}^2$ tam giác.

Câu 25. Đáp án B.

Có C_7^3 cách để xếp 3 chữ số 2. Khi đó có A_6^4 cách xếp 4 chữ số còn lại. Vậy có $C_7^3A_6^4 = 12600$ số.

Câu 26. Đáp án A.

Cách 1: Chú ý: *Bài toán không nói vectơ có khác vectơ không nên ta vẫn xét cả vectơ không ở đây. Và 2 điểm khác nhau tạo nên 2 vectơ có điểm đầu và điểm cuối hoán vị cho nhau nên ở đây việc chọn vectơ sẽ sử dụng chỉnh hợp chứ không phải tổ hợp***.**

TH1: Có 2010 vectơ không được tạo thành.

TH2: Các vectơ khác vectơ không

Mỗi vectơ thỏa mãn yêu cầu bài toán ứng với một chỉnh hợp chập 2 của 2010 , nên số vectơ cần tìm là A_{2010}^2. Theo quy tắc cộng thì có $A_{2010}^2 + 2010 = 4040100$ vectơ tạo thành.

Cách 2*:* Có 2010 cách chọn điểm đầu. có 2010 cách chọn điểm cuối. $\Rightarrow$ Có $2010^2 = 4040100$ vectơ.

Câu 27. Đáp án A.

Tương tự Câu 24 ta có số tam giác được tạo thành theo n là

$$C_{10}^1C_n^2 + C_{10}^2C_n^1 = 2800 \Leftrightarrow 10\frac{n(n-1)}{2} + 45n = 2800 \Leftrightarrow n^2 + 8n - 560 = 0 \Leftrightarrow n = 20.$$

Câu 28. Đáp án D.

*Gọi n điểm đã cho là $A_1, A_2, ..., A_n$. Xét một điểm cố định, khi đó có C_{n-1}^2 đường thẳng được xác định bởi 2 trong $n-1$ điểm còn lại nên sẽ có C_{n-1}^2 đường thẳng vuông góc đi qua điểm cố định đó.

*Do đó có tất cả $nC_{n-1}^2 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}$ đường thẳng vuông góc nên có $C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2$ giao điểm (tính cả những giao điểm trùng nhau)

*Ta chia các điểm trùng nhau thành 3 loại

- Qua một điểm có $C_{n-1}^2 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ đường thẳng vuông góc nên ta phải trừ đi $n\left(C_{n-1}^2 - 1\right)$ điểm**.**

- Qua ba điểm A_1, A_2, A_3 của 1 tam giác có 3 đường thẳng cùng vuông góc với A_4A_5 và 3 đường thẳng này song song với nhau nên ta mất 3 giao điểm, do đó trong TH này ta phải loại đi $3C_n^3$

- Trong mỗi tam giác thì ba đường cao chỉ có một giao điểm, nên ta mất 2 điểm cho mỗi tam giác, do đó trường hợp này ta phải trừ đi $2C_n^3$.

Vậy số giao điểm nhiều nhất có được là: $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}} - \left[n\left(C_{n-1}^2 - 1\right) + 5C_n^3\right]$.

Câu 29. **Đáp án A.**

Do các thành viên cùng câu lạc bộ thì ngồi cạnh nhau nên ta sử dụng phương pháp "buộc" các phần tưt để giải quyết bài toán.

Lúc này ta có 3 phần tử đó là 3 câu lạc bộ. Theo công thức hoán vị vòng quanh được giới thiệu ở phần ví dụ thì ta có $2!$ cách xếp 3 câu lạc bộ vào bàn tròn. Với mỗi cách xếp thì có:

$3!$ cách xếp các thành viên CLB Máu Sư phạm.

$5!$ cách xếp các thành viên CLB Truyền thông.

$7!$ cách xếp các thành viên CLB Kỹ năng.

Vậy theo quy tắc nhân thì có tất cả: $2!.3!.5!.7! = 7257600$ cách xếp.

Câu 30. **Đáp án A.**

Cách 1: Số cách lấy 3 bông hồng bất kì: $C_{25}^3 = 2300$

Số cách lấy 3 bông hòng chỉ có một màu: $C_7^3 + C_8^3 + C_{10}^3 = 211$

Số cách lấy 3 bông hồng có đúng hai màu: $C_{15}^3 + C_{17}^3 + C_{18}^3 - 2\left(C_7^3 + C_8^3 + C_{10}^3\right) = 1529$

Vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2300 - 211 - 1529 = 560$.

Cách 2: Có 7 cách chọn bông hồng màu đỏ. Có 8 cách chọn bông hồng màu vàng. Có 10 cách chọn bông hồng màu trắng. $\Rightarrow$ Có $7.8.10 = 560$ cách.

Câu 31. **Đáp án B.**

Áp dụng quy tắc "buộc" các phần tử ta có $2!$ cách xếp hai vợ chồng. Sau khi "buộc" hai vợ chồng lại thì ta có tất cả 5 phần tử. Theo công thức hoán vị vòng quanh thì số cách xếp 5 phần tử quanh bàn tròn là $4!$.

Vậy theo quy tắc nhân thì có $2!.4! = 48$.

Câu 32. **Đáp án A.**

Ta lần lượt đánh số các ghế từ 1 đến 10.

- Nếu người chồng ở vị trí số 1 thì có 9 cách xếp người vợ.
- Nếu người chồng ở vị trí số 2 thì có 8 cách xếp người vợ.
- ….
- Nếu người chồng ở vị trí số 9 thì có 1 cách xếp người vợ.

Vậy có tất cả $9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45$ cách.

Câu 33. **Đáp án B.**

Chọn toa cho vị khách thứ nhất có 4 cách. Chọn toa cho vị khách thứ hai có 4 cách. Chọn toa cho vị khách thứ ba có 4 cách. Chọn toa cho vị khách thứ tư có 4 cách.

Theo quy tắc nhân thì có $4^4 = 256$ cách chọn toa cho bốn khách.

Câu 34. **Đáp án D.**

Bước 1: Chọn bi

- Số cách chọn ra 5 viên bi bất kì là C_{45}^5 cách.
- Số cách chọn ra 5 viên bi trong đó không có viên bi đỏ nào là C_{35}^5 cách.

- Số cách chọn ra 5 viên bi trong đó có ít nhất một viên bi màu đỏ là $C_{45}^5 - C_{35}^5$ cách.

Bước 2: Sắp xếp các viên bi.

Số cách xếp 5 viên bi vào 5 ô là $5!$

Theo quy tắc nhân thì có $5!.(C_{45}^5 - C_{35}^5) = 107655240$.

Câu 35. **Đáp án A.**

Xét các trường hợp sau:

- Lấy được 1 lá cờ, 3 lá rô và 4 chuồn thì có $C_3^1 C_{13}^3 C_{13}^1 C_{13}^3 = 22620312$ cách lấy.

Theo quy tắc cộng thì có tất cả $22620312 + 13823524 + 2658370 = 39102206$ cách lấy.

Câu 36. **Đáp án A.**

Gọi số cần tìm là $\overline{abcab}$.

Có 9 cách chọn a.

Có 10 cách chọn b.

Có 10 cách chọn c.

Vậy có tất cả $9.10.10 = 900$ số.

Câu 37. **Đáp án A.**

Gọi A_k là phương án: Chọn nhóm có k học sinh và chỉ định nhóm trưởng của nhóm.

Thầy chủ nhiệm có các phương án $A_2, A_3, A_4, ..., A_{n-1}$. Ta tính xem có bao nhiêu cách thực hiện.

Phương án A_k có hai công đoạn:

- Công đoạn 1: Chọn k học sinh có C_n^k cách chọn.

- Công đoạn 2: Chỉ định nhóm trưởng: có k cách chọn.

Theo quy tắc nhân thì phương án A_k có kC_n^k cách thực hiện.

Vậy theo quy tắc cộng thì $T = \sum_{k=2}^{n-1} kC_n^k$.

Câu 38.

a) Đáp án C.

* Có $8 + 4 = 12$ nam họ Nguyễn và có $8 + 5 = 13$ nữ họ Nguyễn. Vậy có $12.13 = 156$ cặp cùng họ Nguyễn mà khắc giới tính.

* Tương tự có $5.6 = 30$ cách cho cặp cùng họ Trần mà khác giới tính.

Vậy có $156 + 30 = 186$ cách chọn hai người cùng họ và khác giới tính.

b) Đáp án A.

Ta có $8+3=11$ cặp anh em trong đó 8 cặp họ Nguyễn và 3 cặp họ Trần.

Chọn bất kì 2 người trong số 36 người thì có $C_{36}^{2}=630$ cách chọn.

Vậy có tất cả $630-11=619$ cách chọn các cặp sao cho không có cặp anh em nào.