Phương pháp quy nạp toán học

A. LÝ THUYẾT

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số nguyên dương n là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp được thì có thể làm như sau:

- Bước 1: Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n=1$.

- Bước 2: Giả thiết rằng mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kỳ $n=k\geq 1$ (gọi là giả thiết quy nạp). Bằng kiến thức đã biết và giả thiết quy nạp, chứng minh rằng mệnh đề đó cũng đúng với $n=k+1$.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Ví dụ 1. Với mỗi số nguyên dương n, đặt $S=1^2+2^2+...+n^2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $S=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

B. $S=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3}$.

C. $S=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

D. $S=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Chúng ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học rằng mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ta có đẳng thức $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- Bước 1: Với $n=1$ thì vế trái bằng $1^2=1$, vế phải bằng $\dfrac{1(1+1)(2.1+1)}{6}=1$.

Vậy đẳng thức đúng với $n=1$.

-Bước 2: Giả sử đẳng thức đúng với $n=k\geq 1$, tức là chứng minh $1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[2(k+1)+1\right]}{6}=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Ta phải chứng minh đẳng thức cũng đúng với $n=k+1$, tức là chứng minh $1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[2(k+1)+1\right]}{6}=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có

$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$.

Mà $\dfrac{(k+1)(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Suy ra $1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Do đó đẳng thức đúng với $n=k+1$. Suy ra có điều phải chứng minh.

Vậy phương án đúng là C.

Cách 2: Kiểm tra tính đúng-sai của từng phương án đến khi tìm được phương án đúng thông qua một số giá trị cụ thể của n.

+ Với $n=1$ thì $S=1^2=1$ (loại được các phương án B và D);

+ Với $n=2$ thì $S=1^2+2^2=5$ (loại được phương án A).

Vậy phương án đúng là **C**.

STUDY TIP

Ngoài kết quả nêu trong ví dụ 1, chúng ta có thể đề cập đến các kết quả tương tự như sau:

1) $1+2+..+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2) $1^3+2^3+...+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3) $1^4+2^4+...+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

4) $1^5+2^5+...+n^5=\dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$.

5) $1.2.3+2.3.4+...+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Nhận xét: *Từ ví dụ 1 và các bài tập ở phần nhận xét, ta thấy bậc ở vế trái nhỏ hơn bậc ở vế phải là 1 đơn vị. Lưu ý điều này có thể tính được tổng dạng luỹ thừa dựa vào phương pháp hệ số bất định. Từ kết quả của ví dụ này, chúng ta hoàn toàn có thể đề xuất các câu hỏi trắc nghiệm sau đây:*

Câu 1. Với mỗi số nguyên n, đặt $S=1^2+2^2+...+n^2$. Mệnh đề nào dưới đây là **sai?**

A. $S=\dfrac{1}{6}\left(2n^3+3n^2+n\right)$. **B.** $S=\dfrac{1}{6}\left[(n+1)^3-(n+1)\right]+\dfrac{1}{6}\left(n^3-n\right)$.

C. $S=\dfrac{1}{6}\left[2(n+1)^3-3n(n+1)-2(n+1)\right]$. **D.** $S=\dfrac{n\left(n^2+1\right)(2n+1)}{6}$.

Câu 2. Với mỗi số nguyên dương n, ta có $1^2+2^2+...+n^2=an^3+bn^2+cn$, trong đó $a,\ b,\ c$ là các hằng số. Tính giá trị của biểu thức $M=ab^2+bc^2+ca^2$.

A. $M=25$. **B.** $M=\dfrac{25}{216}$. **C.** $M=\dfrac{25}{6}$. **D.** $M=23$.

Câu 3. Tìm tất cả các số nguyên dương n, để $1^2+2^2+...+n^2>2017$.

A. $n\ge 18$. **B.** $n\ge 20$. **C.** $n\ge 17$. **D.** $n\ge 19$.

Câu 4. Tính tổng S của tất cả các số nguyên dương n, thoả mãn $1^2+2^2+...+n^2<2018$.

A. $S=153$. **B.** $S=171$. **C.** $S=136$. **D.** $S=190$.

Ví dụ 2. Đặt $T_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}$ (có n dấu căn). Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $T_n=\sqrt{3}$. **B.** $T_n=2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. **C.** $T_n=\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. **D.** $T_n=\sqrt{5}$.

Đáp án B.

Lời giải

Ta chứng minh $T_n=2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy:

Bước 1: Với $n=1$ thì vế trái bằng $\sqrt{2}$, còn vế phải bằng $2\cos\dfrac{\pi}{2^{1+1}}=2\cos\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$.

Vậy đẳng thức đúng với $n=1$.

Bước 2: Giả sử đẳng thức đúng với $n=k\geq 1$, nghĩa là $T_k=2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$.

Ta phải chứng minh đẳng thức cũng đúng với $n=k+1$, tức là chứng minh $T_{k+1}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$.

Thật vậy, vì $T_{k+1}=\sqrt{2+T_k}$ nên theo giả thiết quy nạp ta có $T_{k+1}=\sqrt{2+T_k}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$.

Mặt khác, $1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}=1+\cos\left(2.\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)=2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}$ nên $T_{k+1}=\sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$.

Vậy phương án đúng là **B**.

STUDY TIP

Ngoài cách làm như trên, ta có thể làm theo cách sau: kiểm tra tính đúng – sai của từng phương án đến khi tìm được phương án đúng thông qua một số giá trị cụ thể của n.

+ Với $n=1$ thì $T_1=\sqrt{2}$ (loại ngay được phương án **A**, **C** và **D**).

Nhận xét: *Từ kết quả của ví dụ 2, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi dưới đây:*

Câu 1. Đặt $T_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}$ (có n dấu căn). Tìm n để $T_n=2\sin\frac{511\pi}{1024}$.

A. $n=10$. **B.** $n=9$. **C.** $n=11$. **D.** $n=8$.

Câu 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=\sqrt{2}$ và $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là:

A. $u_n=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$. **B.** $u_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

C. $u_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$. **D.** $u_n=\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Ví dụ 3. Đặt $S_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S_n=\frac{n+1}{2(2n+1)}$. **B.** $S_n=\frac{3n-1}{4n+2}$. **C.** $S_n=\frac{n}{2n+1}$. **D.** $S_n=\frac{n+2}{6n+3}$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Rút gọn biểu thức S_n dựa vào việc phân tích phần tử đại diện.

Với mọi số nguyên dương k, ta có $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$.

Do đó: $S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

Vậy phương án đúng là phương án **C.**

Cách 2: Kiểm tra tính đúng – sai của phương án dựa vào một số giá trị cụ thể của n.

Với $n=1$ thì $S_1=\frac{1}{1.3}=\frac{1}{3}$ (chưa loại được phương án nào);

Với $n = 2$ thì $S_2 = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} = \frac{2}{5}$ (loại ngay được các phương án A,B và D.

Vậy phương án đúng là phương án C.

Nhận xét: *Từ kết quả của ví dụ này,chúng ta hoàn toàn trả lời được các câu hỏi trắc nghiệm sau đây:*

Câu 1. Với $n \in \mathbb{N}^*$,biết rằng $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{an+b}{cn+1}$. Trong đó a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $P = a^2 + b^3 + c^4$.

A. $P = 17$. **B.** $P = 10$. **C.** $P = 9$. **D.** $P = 19$.

Câu 2. Với $n \in \mathbb{N}^*$,biết rằng $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{an+b}{4n+c}$. Trong đó a,b,c là các số nguyên.Tính giá trị biểu thức $T = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.

A. $T = 40$. **B.** $T = 4$. **C.** $T = 32$. **D.** $T = 16$.

Câu 3. Biết rằng $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{an^2+bn+c}{(2n+1)^2}$,trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $F = (a+b)^{a+c}$.

A. $F = 9$. **B.** $F = 6$. **C.** $F = 8$. **D.** $F = 27$.

Câu 4. Tính tổng S của tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn bất phương trình

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} < \frac{17}{35}$$

A. $S = 153$. **B.** $S = 136$. **C.** $S = 272$. **D.** $S = 306$.

Ví dụ 4. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^{n+1} > n^2 + 3n.$

A. $n \geq 3$. **B.** $n \geq 5$. **C.** $n \geq 6$. **D.** $n \geq 4$.

Đáp án D.

Lời giải

Kiểm tra tính đúng – sai của bất đẳng thức với các trường hợp $n = 1,2,3,4,$ ta dự đoán được $2^{n+1} > n^2 + 3n,$ với $n \geq 4.$ Ta chứng minh bất đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy:

-Bước 1: Với $n = 4$ thì vế trái bằng $2^{4+1} = 2^5 = 32,$ còn vế phải bằng $4^2 + 3.4 = 28.$

Do $32 > 28$ nên bất đẳng thức đúng với $n = 4.$

-Bước 2: Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 4,$ nghĩa là $2^{k+1} > k^2 + 3k.$

Ta phải chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với $n = k+1,$ tức là phải chứng minh $2^{(k+1)+1} > (k+1)^2 + 3(k+1)$ hay $2^{k+2} > k^2 + 5k + 4.$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có $2^{k+1} > k^2 + 3k.$

Suy ra $2.2^{k+1} > 2(k^2 + 3k)$ hay $2^{k+2} > 2k^2 + 6k$

Mặt khác $2k^2+6k-\left(k^2+5k+4\right)=k^2+k-4\geq 4^2+4-4=16$ với mọi $k\geq 4$.

Do đó $2^{k+2}>2\left(k^2+3k\right)>k^2+5k+4$ hay bất đẳng thức đúng với $n=k+1$.

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Vậy phương án đúng là **D.**

STUDY TIP

Dựa vào kết quả ví dụ 4, ta có thể đề xuất bài toán sau:

Tìm số nguyên tố p nhỏ nhất sao cho: $2^{n+1}>n^2+3n,\forall n\geq p,n\in\mathbb{N}*$

A. $p=3$. **B.** $p=5$. **C.** $p=4$. **D.** $p=7$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Tổng S các góc trong của một đa giác lồi n cạnh, $n\geq 3$, là:

A. $S=n.180°$. **B.** $S=(n-2).180°$.

C. $S=(n-1).180°$. **D.** $S=(n-3).180°$.

Câu 2. Với $n\in\mathbb{N}^*$, hãy rút gọn biểu thức $S=1.4+2.7+3.10+...+n(3n+1)$.

A. $S=n(n+1)^2$. **B.** $S=n(n+2)^2$. **C.** $S=n(n+1)$. **D.** $S=2n(n+1)$.

Câu 3. Kí hiệu $k!=k(k-1)...2.1,\forall k\in\mathbb{N}^*$. Với $n\in\mathbb{N}^*$, đặt $S_n=1.1!+2.2!+...+n.n!$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $S_n=2.n!$. **B.** $S_n=(n+1)!-1$. **C.** $S_n=(n+1)!$. **D.** $S_n=(n+1)!+1$.

Câu 4. Với $n\in\mathbb{N}^*$, đặt $T_n=1^2+2^2+3^2+...+(2n)^2$ và $M_n=2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\frac{T_n}{M_n}=\frac{4n+1}{2n+2}$. **B.** $\frac{T_n}{M_n}=\frac{4n+1}{2n+1}$. **C.** $\frac{T_n}{M_n}=\frac{8n+1}{n+1}$. **D.** $\frac{T_n}{M_n}=\frac{2n+1}{n+1}$.

Câu 5. Tìm số nguyên dương p nhỏ nhất để $2^n>2n+1$ với mọi số nguyên $n\geq p$.

A. $p=5$. **B.** $p=3$. **C.** $p=4$. **D.** $p=2$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho $2^n>n^2$.

A. $n\geq 5$. **B.** $n=1$ **hoặc** $n\geq 6$. **C** $n\geq 7$. **D.** $n=1$ **hoặc** $n\geq 5$.

Câu 7. Với mọi số nguyên dương n, ta có: $\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+...+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{an+b}{cn+4}$, trong đó a,b,c là các số nguyên. Tính các giá trị của biểu thức $T=ab^2+bc^2+ca^2$.

A. $T=3$. **B.** $T=6$. **C.** $T=43$. **D.** $T=42$.

Câu 8. Với mọi số nguyên dương $n\geq 2$, ta có: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{an+2}{bn+4}$, trong đó a,b là các số nguyên. Tính các giá trị của biểu thức $T=a^2+b^2$.

A. $P=5$. **B.** $P=9$. **C.** $P=20$. **D.** $P=36$.

Câu 9. Biết rằng $1^3+2^3+...+n^3=an^4+bn^3+cn^2+dn+e,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị biểu thức $M=a+b+c+d+e$.

A. $M=4$. **B.** $M=1$. **C.** $M=\frac{1}{4}$. **D.** $M=\frac{1}{2}$.

Câu 10. Biết rằng mọi số nguyên dương n, ta có $1.2+2.3+...+n(n+1)=a_1n^3+b_1n^2+c_1n+d_1$ và $1.2+2.5+3.8+...+n(3n-1)=a_2n^3+b_2n^2+c_2n+d_2$. Tính giá trị biểu thức $T=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2$.

A. $T=2$. **B.** $T=1$. **C.** $M=\frac{4}{3}$. **D.** $T=\frac{2}{3}$.

Câu 11. Biết rằng $1^k+2^k+...+n^k$, trong đó n,k là số nguyên dương. Xét các mệnh đề sau:

$S_1=\frac{n(n+1)}{2}$, $S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $S_3=\frac{n^2(n-1)^2}{4}$ và $S_4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Số các mệnh đề đúng trong các mệnh đề nói trên là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 12. Với $n\in\mathbb{N}^*$, ta xét các mệnh đề P:"7^n+5 chia hết cho 2"; Q:"7^n+5 chia hết cho 3" và Q:"7^n+5 chia hết cho 6". Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là :

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 13. Xét bài toán: "Kiểm nghiệm với số nguyên dương n bất đẳng thức $n\geq 2^{n-1}$". Một học sinh đã trình bày lời giải bài toán này bằng các bước như sau:

Bước 1: Với $n=1$, ta có: $n!=1!=1$ và $2^{n-1}=2^{1-1}=2^0=1$. Vậy $n!\geq 2^{n-1}$ đúng.

Bước 2 : Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k\geq 1$, tức là ta có $k!\geq 2^{k-1}$.

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$, nghĩa là phải chứng minh $(k+1)!\geq 2^k$.

Bước 3 : Ta có $(k+1)!=(k+1).k!\geq 2.2^{k-1}=2^k$. Vậy $n!\geq 2^{n-1}$ với mọi số nguyên dương n.

Chứng minh trên đúng hay sai, nếu sai thì sai từ bước nào ?

A. Đúng. **B.** Sai từ bước 2. **C.** Sai từ bước 1. **D.** Sai từ bước 3.

Câu 14. Biết rằng $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{an^2+bn}{cn^2+dn+16}$, trong đó a,b,c,d và n là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T=(a+c)(b+d)$.

là :

A. $T=75$. **B.** $T=364$. **C.** $T=300$. **D.** $T=256$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. **Đáp án** B.

Cách 1: Từ tổng các góc trong tam giác bằng $180°$ và tổng các góc trong từ giác bằng $360°$, chúng ta dự đoán được $S=(n-2).180°$.

Cách 2: Thử với những trường hợp đã biết để kiểm nghiệm tính đúng –sai từ các công thức. Cụ thể là với $n=3$ thì $S=180°$ (loại luôn được các phương án A, C và D); với $n=4$ thì $S=360°$ (kiểm nghiệm phương án B lần nữa).

Câu 2. **Đáp án** A.

Để chọn được S đúng, chúng ta có thể dựa vào một trong ba cách sau đây:

Cách 1: Kiểm tra tính đúng –sai của từng phương án với những giá trị của n.

Với $n=1$ thì $S=1.4=4$ (loại ngay được phương án B và C); với $n=2$ thì $S=1.4+2.7=18$ (loại được phương án D).

Cách 2: Bằng cách tính S trong các trường hợp $n=1, S=4$; $n=2, S=18$; $n=3, S=48$ ta dự đoán được công thức $S=n(n+1)^2$.

Cách 3: Ta tính S dựa vào các tổng đã biết kết quả như $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ và $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Ta có: $S=3(1^2+2^2+...+n^2)+(1+2+...+n)=n(n+1)^2$.

Câu 3. **Đáp án B.**

Chúng ta có thể chọn phương án đúng dựa vào một trong hai cách sau đây:

Cách 1: Kiểm nghiệm từng phương án đúng đối với những giá trị cụ thể của n.

Với $n=1$ thì $S_1=1.1!=1$ (Loại ngay được các phương án A, C, D).

Cách 2: Rút gọn S_n dựa vào việc phân tích phần tử đại diện

$k.k!=(k+1-1).k!=(k+1).k!-k!=(k+1)!-k!$. Suy ra:

$S_n=(2!-1!)+(3!-2!)+...+((n+1)!-n!)=(n+1)!-1$.

Câu 4. **Đáp án A.**

Chúng ta có thể chọn phương án đúng dựa vào một trong hai cách sau đây:

Cách 1: Kiểm nghiệm từng phương án đúng đối với những giá trị cụ thể của n.

Với $n=1$ thì $T_1=1^2+2^2=5; M_1=2^2=4$ nên $\frac{T_1}{M_1}=\frac{5}{4}$ (loại ngay được các phương án B, C, D).

Cách 2: Chúng ta tính T_n, M_n dựa vào những tổng đã biết kết quả. Cụ thể dựa vào ví dụ 1:

$T_n=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}; M_n=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$. Suy ra $\frac{T_n}{M_n}=\frac{4n+1}{2n+2}$.

Câu 5. **Đáp án B.**

Dễ thấy $p=2$ thì bất đẳng thức $2^p>2p+1$ là sai nên loại ngay phương án D.

Xét với $p=3$ ta thấy $2^p>2p+1$ là bất đửng thức đúng. Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được rằng $2^n>2n+1$ với mọi $n\geq 3$. Vậy $p=3$ là số nguyên dương nhỏ nhất cần tìm.

Câu 6. **Đáp án D.**

Kiểm tra với $n=1$ ta thấy bất đẳng thức đúng nên loại ngay phương án A và C.

Kiểm tra với $n=1$ ta thấy bất đẳng thức đúng. Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được rằng $2^n>n^2, \forall n\geq 5$.

Câu 7. **Đáp án B.**

Cách 1: Với chú ý $\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$, chúng ta có:

$$\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+...+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}.\frac{3n}{2(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}.$$

Đối chiếu với đẳng thức đã cho, ta có: $a=1,b=0,c=6$.

Suy ra $T=ab^2+bc^2+ca^2=6$.

Cách 2: Cho $n=1,n=2,n=3$ ta được: $\frac{a+b}{c=4}=\frac{1}{10};\frac{2a+b}{2c+4}=\frac{1}{8};\frac{3x+b}{3c+4}=\frac{3}{22}$.

Giải hệ phương trình trên ta được $a=1,b=0,c=6$. Suy ra $T=ab^2+bc^2+ca^2=6$

Câu 8. **Đáp án C.**

Cách 1: Bằng cách phân tích số hạng đại diện, ta có: $1-\frac{1}{k^2}=\frac{k-1}{k}.\frac{k+1}{k}$. Suy ra

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}...\frac{n-1}{n}.\frac{n+1}{2n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{2n+2}{4n}.$$

Đối chiếu với đẳng thức đã cho ta có: $a=2,b=4$. Suy ra $P=a^2+b^2=20$.

Cách 2: Cho $n=2,n=3$ ta được $\frac{a+1}{b}=\frac{3}{4};\frac{3a+2}{3b}=\frac{2}{3}$. Giải hệ phương trình trren ta được $a=2;b=4$. Suy ra $P=a^2+b^2=20$.

Câu 9. **Đáp án B.**

Cách 1: Sử dụng kết quả đã biết: $1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$. So sánh cách hệ số, ta được $a=\frac{1}{4};b=\frac{1}{2};c=\frac{1}{4};d=e=0$.

Cách 2: Cho $n=1,n=2,n=3,n=4,n=5$, ta được hệ 5 phương trình 5 ẩn a,b,c,d,e. Giải hệ phương trình đó, ta tìm được $a=\frac{1}{4};b=\frac{1}{2};c=\frac{1}{4};d=e=0$. Suy ra $M=a+b+c+d+e=1$.

Câu 10. **Đáp án C.**

Cách 1: Sử dụng các tổng lũy thừa bậc 1 và bậc 2 ta có:

+) $1.2+2.3+...+n(n+1)=(1^2+2^2+...+n^2)+(1+2+...+n)=\frac{1}{3}n^3+n^2+\frac{2}{3}n$.

Suy ra $a_1=\frac{1}{3};b_1=1;c_1=\frac{2}{3};d_1=0$.

+) $1.2+2.5+3.8+...+n(3n-1)=3(1^2+2^2+...+n^2)-(1+2+...+n)=n^3+n^2$.

Suy ra $a_2=b_2=1;c_2=d_2=0$.

Do đó $T=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2=\frac{4}{3}$.

Cách 2: Cho $n=1,n=2,n=3,n=4$ và sử dụng phương pháp hệ số bất đinh ta cũng tìm được

$a_1=\frac{1}{3};b_1=1;c_1=\frac{2}{3};d_1=0$; $a_2=b_2=1;c_2=d_2=0$.

Do đó $T=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2=\frac{4}{3}$.

Câu 11. **Đáp án D.**

Bằng các kết quả đã biết ở ví dụ 1, chúng ta thấy ngay được chỉ có $S_3 = \dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$ là sai.

Câu 12. **Đáp án A.**

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng $7^n + 5$ chia hết cho 6.

Thật vậy: Với $n = 1$ thì $7^1 + 5 = 12 \vdots 6$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là $7^k + 5$ chia hết ccho 6.

Ta chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$, nghĩa là phỉa chứng minh $7^{k+1} + 5$ chia hết cho 6.

Ta có: $7^{k+1} + 5 = 7(7^k + 5) - 30$.

Theo giả thiết quy nạp thì $7^k + 5$ chia hết cho 6 nên $7^{k+1} + 5 = 7(7^k + 5) - 30$ cũng chia hết cho 6.

Vậy $7^n + 5$ chia hết cho 6 với mọi $n \geq 1$. Do đó các mệnh đề P và Q cũng đúng.

Câu 13. **Đáp án A.**

Câu 14. **Đáp án C.**

Phân tích phần tử đại diện, ta có: $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$.

Suy ra: $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - .\frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{n^2+3n}{4n^2+12n+8} = \frac{2n^2+6n}{8n^2+24n+16}.$$

Đối chiếu với hệ số, ta được: $a = 2; b = 6; c = 8; d = 24$.

Suy ra: $T = (a+c)(b+d) = 300$.