PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

a) $\sin f(x)=\sin g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x)+k2\pi \\ f(x)=\pi-g(x)+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

b) $\cos f(x)=\cos g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x)+k2\pi \\ f(x)=-g(x)+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

c) $\tan f(x)=\tan g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

d) $\cot f(x)=\cot g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Không được dùng đồng thời 2 đơn vị độ và radian cho một công thức về nghiệm phương trình lượng giác.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào nhận $x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}$ $(k\in\mathbb{Z})$ làm nghiệm

A. $\sin 3x=\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$.

B. $\cos x=\sin 2x$.

C. $\cos 4x=-\cos 6x$.

D. $\tan 2x=-\tan\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn B

A. $\sin 3x=\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=\frac{\pi}{4}-2x+k2\pi \\ 3x=\pi-(\frac{\pi}{4}-2x)+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{20}+k\frac{2\pi}{5} \\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right.$

B. $\cos x=\sin 2x \Leftrightarrow \cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}-2x+k2\pi \\ x=-\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{2}-k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

STUDY TIP

$(-\sin f(x))=\sin(-f(x))$ $\quad$ $(-\tan f(x))=\tan(-f(x))$

$(-\cos f(x))=\cos(\pi-f(x))$ $\quad$ $(-\cot f(x))=\cot(-f(x))$

C. $\cos 4x = -\cos 6x \Leftrightarrow \cos 4x = \cos(\pi - 6x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \pi - 6x + k2\pi \\ 4x = -(\pi - 6x) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{10} + k\dfrac{\pi}{5} \\ x = \dfrac{\pi}{2} - k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

D. $\tan 2x = -\tan\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \tan 2x = \tan(-\dfrac{\pi}{4}) \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

So sánh ta được đáp án là B.

LƯU Ý: Bạn có thể biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác rồi dùng máy tính để thử nghiệm và kết luận . Phần này sẽ được trình bày kỹ hơn trong cuốn công phá kỹ thuật giải toán CASIO.

Ví dụ 2. Phương trình $\sin 2x = -\sin\dfrac{\pi}{3}$ có nghiệm dạng $x = \alpha + k\pi$ và $x = \beta + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}), \left(-\dfrac{\pi}{4} \le \alpha; \beta \le \dfrac{3\pi}{4}\right)$. Khi đó tích $\alpha.\beta$ bằng :

A. $-\dfrac{\pi^2}{9}$. **B.** $-\dfrac{\pi}{9}$. **C.** $-\dfrac{4\pi^2}{9}$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sin 2x = -\sin\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin(-\dfrac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \pi - (-\dfrac{\pi}{3}) + k2\pi \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \Rightarrow \alpha.\beta = -\dfrac{\pi^2}{9}.$$

II. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Dạng $\sin x = m$, $\cos x = m$, $\tan x = m$, $\cot x = m$, ($m \in \mathbb{R}$)

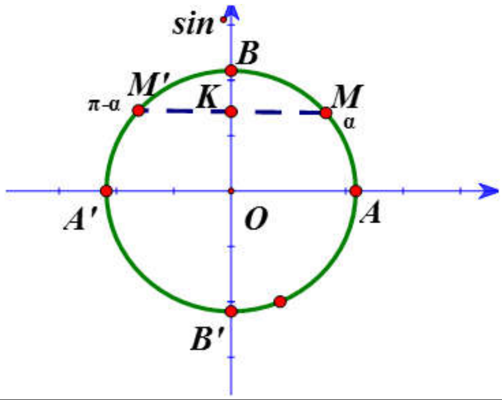
1. Phương trình $\sin x = m$ (1)

- Nếu $|m| > 1 \Rightarrow$ Phương trình (1) vô nghiệm do $|\sin x| \le 1\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $|m| \le 1$:

+ Xác định α sao cho $m = \sin\alpha$.

Vậy phương trình $\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

+ Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2} \\ \sin\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arcsin m$ (đọc là ac-sin-m). Khi đó $\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right).$



STUDY TIP

+) $\sin x = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow \left|m \le 1\right|$

+) arc sin *m* là cung thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ mà có sin bằng *m.*

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau đây,phương trình nào có tập nghiệm là

$x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ và $x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$

A. $\sin x = \frac{2}{\sqrt{2}}$ **B.** $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Lời giải

Chọn A

Cách 1

A. $\sin x = \frac{2}{\sqrt{2}}$ vô nghiệm do $\frac{2}{\sqrt{2}} > 1$.

B. $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4}$ (vì $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\Leftrightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{3})$ (vì $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{3})$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

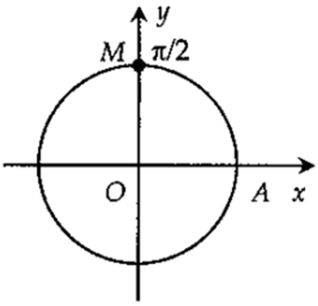
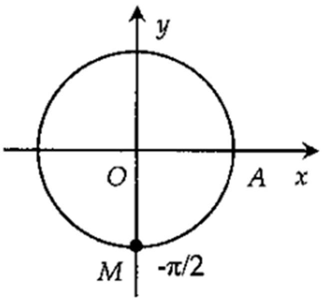
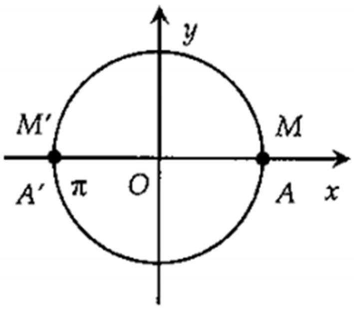
D. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy phương án đúng là C.

Cách 2 : Sử dụng máy tính cầm tay (MTCT).

Ta có $\sin\left(-\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\sin\left(\frac{4\pi}{3}+k2\pi\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Đặc biệt

Phương trình	Biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác
+ $\sin x = 1$ $\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.	 sđ $\overset{\frown}{AM}=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
+ $\sin x = 1$ $\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.	 sđ $\overset{\frown}{AM}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
+ $\sin x = 0$ $\Leftrightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$.	sđ $\overset{\frown}{AM}=k2\pi; k\in\mathbb{Z}$ sđ $\overset{\frown}{AM}=(2k+1)\pi; k\in\mathbb{Z}$ Để ý: $\left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=(2k+1)\pi \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow x=k\pi; k\in\mathbb{Z}$ 

2. Phương trình $\cos x = m \quad (2)$

- Nếu $|m|>1 \Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm (do $|\cos x|\le 1, \forall x\in\mathbb{R}$).

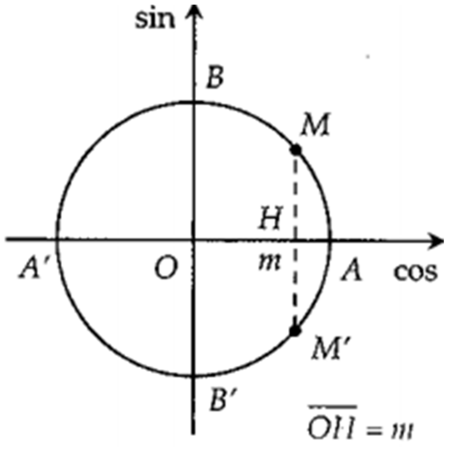
- Nếu $|m|\le 1$:

+ Xác định α sao cho $\cos\alpha = m$.

Vậy phương trình $\cos x = m \Leftrightarrow \cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k2\pi \\ x=-\alpha+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

+ Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} 0\le\alpha\le\pi \\ \cos\alpha=m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha=\arccos m$ (đọc là ac-cos- m).

Khi đó $\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos m + k2\pi \\ x = -\arccos m + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.



sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha + k2\pi$; sđ $\overset{\frown}{AM} = -\alpha + k2\pi$

STUDY TIP

+ $\arccos m$ là cung thuộc $\left[0;\pi\right]$ mà có cos bằng m .

+ Phương trình $\cos x = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow \left|m\right| \le 1$.

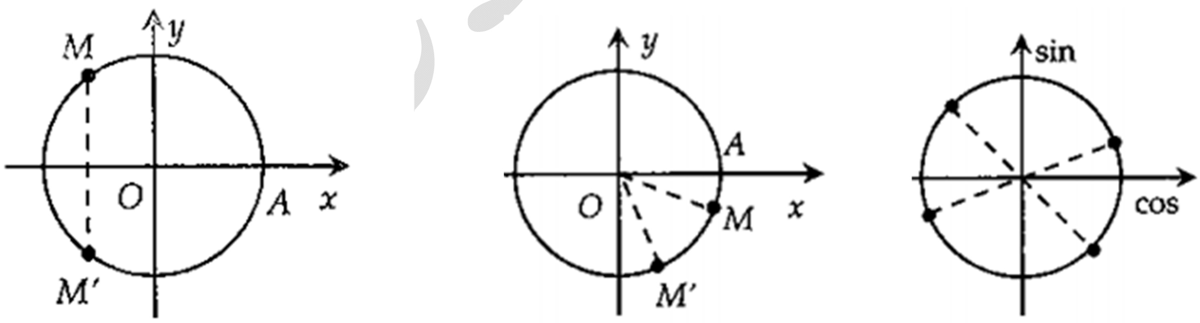
Ví dụ 1. Phương trình nào trong các phuương trình sau có 2 nghiệm thuộc $\left(0°;180°\right)$?

A. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\cos\left(x + 50°\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos\left(x + 30°\right) = \frac{1}{2}$. **D.** $\cos x = -\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C



A. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos 135° \Leftrightarrow x = \pm 135° + k360°$ chỉ có một nghiệm thuộc $\left(0°;180°\right)$.

B. $\cos\left(x + 50°\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + 50°\right) = \cos 30° \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -20° + k360° \\ x = -80° + k360° \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình không có nghiệm nào thuộc $\left(0°;180°\right)$'

C. $\cos\left(x+30^\circ\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\left(x+30^\circ\right)=\cos 60^\circ$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+30^\circ=60^\circ+k360^\circ\\ 2x+30^\circ=-60^\circ+k360^\circ\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=15^\circ+k180^\circ\\ x=-45^\circ+k180^\circ\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm thuộc $\left(0^\circ;180^\circ\right)$.

D. $\cos x=-\frac{4}{3}$ vô nghiệm do $-\frac{4}{3}<-1$.

Ví dụ 2. Chọn đáp án **sai**: Nghiệm của phương trình $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ là:

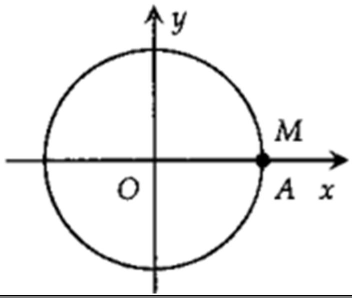
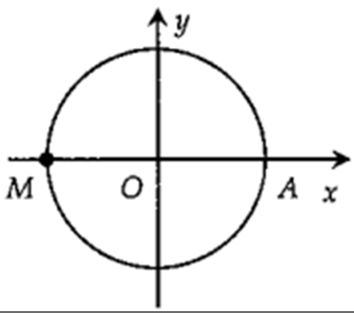
A. $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.
B. $x=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.
C. $x=\pm\frac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.
D. $x=\pm150^\circ+k360^\circ,k\in\mathbb{Z}$.

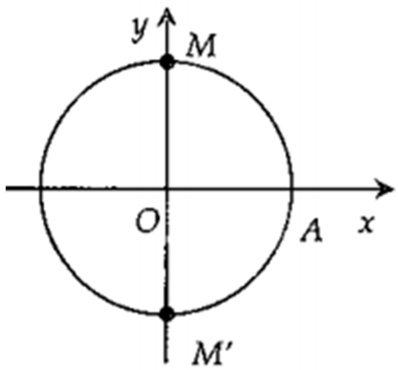
Lời giải

Chọn A

Dễ dàng kiểm tra trên đường tròn lượng giác $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Đặc biệt

Phương trình	Biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác
+ $\cos x=1$ $\Leftrightarrow x=k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.	$M\equiv A$ $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AM}=0+k2\pi=k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. 
+ $\cos x=-1$ $\Leftrightarrow x=\left(2k+1\right)\pi,k\in\mathbb{Z}$.	sđ $\overset{\frown}{AM}=\pi+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. $=\left(2k+1\right)\pi;k\in\mathbb{Z}$. 

+ $\cos x = 0$ $\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ..	sđ $\overset{\frown}{AM} = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$ sđ $\overset{\frown}{AM'} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$ Để ý: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$ 

3. Phương trình $\tan x = m, \cot x = m$

a) Phương trình $\tan x = m$

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

- Ta xác định α sao cho $m = \tan\alpha$.

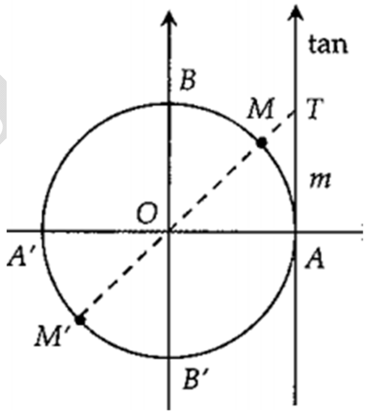
Khi đó phương trình

$\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

+ Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \tan\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết

$\alpha = \arctan m$ (đọc là ac - tan - m).

Khi đó phương trình $\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$ ..



$\overline{AT} = m$

b) Phương trình $\cot x = m$

Điều kiện: $x \neq k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

- Ta xác định α sao cho $m = \cot\alpha$.

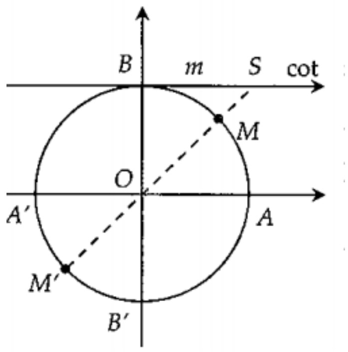
Khi đó phương trình

$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

+ Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} 0 < \alpha < \pi \\ \cot\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết

$\alpha = \text{arc}\cot m$ (đọc là ac - cotang - m).

Khi đó phương trình $\cot x = m \Leftrightarrow x = \text{arc}\cot m + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.



$\overline{AS} = m$

STUYDY TIP

Phương trình $\tan x = m, \cot x = m$ luôn có nghiệm với $\forall m \in \mathbb{R}$

Ví dụ 1. Trong các nghiệm dương bé nhất của các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm dương nhỏ nhất?

A. $\tan 2x = 1$. **B.** $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$. **C.** $\cot x = 0$. **D.** $\cot x = -\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

A. $\tan 2x = 1 \Leftrightarrow \tan 2x = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

(Với $k = 0$ nên nghiệm dương bé nhất là $x = \frac{\pi}{8}$)

B. $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

$\Rightarrow$ Nghiệm dương bé nhất là $x = \frac{7\pi}{12}$.

C. $\cot x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right) \Rightarrow$ Nghiệm dương bé nhất là $x = \frac{\pi}{2}$.

D. $\cot x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Chọn $k = 1 \Rightarrow$ Nghiệm dương bé nhất là $x = \frac{5\pi}{6}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất là $x = \frac{\pi}{8}$ nên ta chọn đáp án A.

Ví dụ 2. Phương trình $\tan\left(3x - 15°\right) = \sqrt{3}$ có các nghiệm là:

A. $x = 60° + k180°$. **B.** $x = 75° + k180°$. **C.** $x = 75° + k60°$. **D.** $x = 25° + k60°$.

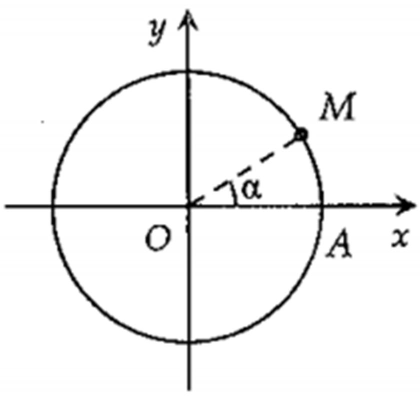
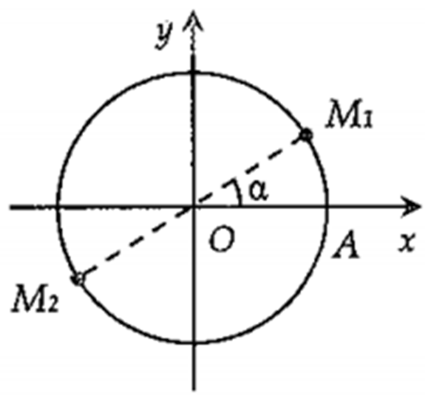
Lời giải

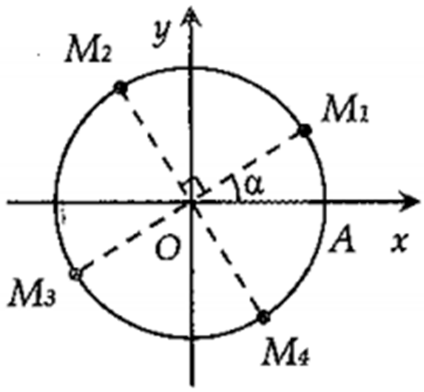
Chọn D

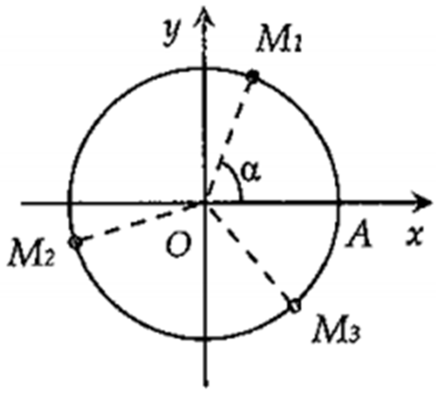
Ta có: $\tan\left(3x - 15°\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(3x - 15°\right) = \tan 60° \Leftrightarrow 3x - 15° = 60° + k180°$

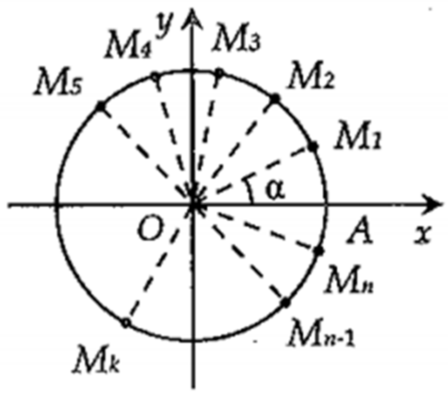
$\Leftrightarrow x = 25° + k60°\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

**** Kĩ năng biểu diễn và tổng hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác***

 1 điểm trên đường tròn lượng giác	 2 điểm đối xứng qua gốc O

<table>
<tr><td>$x=\alpha+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$</td><td>$x=\alpha+k\pi;k\in\mathbb{Z}$</td></tr>
<tr><td>

4 điểm cách đều: $x=\alpha+k\dfrac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$</td><td>

3 điểm cách đều: $x=\alpha+k\dfrac{2\pi}{3};k\in\mathbb{Z}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">

n điểm cách đều: $x=\alpha+k\dfrac{2\pi}{n};k\in\mathbb{Z}$</td></tr>
</table>

III. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP.

DẠNG 1: PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Có dạng $at+b=0$ với $a,b\in\mathbb{R},a\neq 0$, t là một hàm số lượng giác

Phương pháp giải

$at+b=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{b}{a}$ (đây là phương trình lượng giác cơ bản đã học)

STUDY TIP

1. $a\sin f(x)+b=0$. 2. $a\cos f(x)+b=0$ 3. $a\tan f(x)+b=0$. 4. $a\cot f(x)+b=0$.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào có 2 nghiệm thuộc $(0;\pi)$?

A. $\sqrt{3}\sin x-2=0$.
B. $2\cos x+1=0$.
C. $\sqrt{3}\tan x+1=0$.
D. $\sqrt{2}\sin x-1=0$.

Lời giải

Chọn D

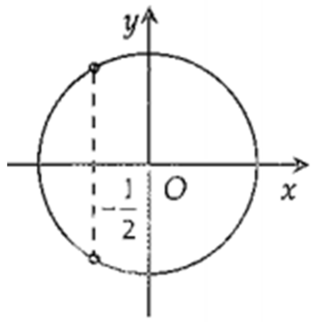
A. $\sqrt{3}\sin x-2=0\Leftrightarrow \sin x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ vô nghiệm (loại phương án A).

B. $2\cos x+1=0\Leftrightarrow \cos x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)\Rightarrow$ Có 1 nghiệm thuộc $\left(0;\pi\right)$.

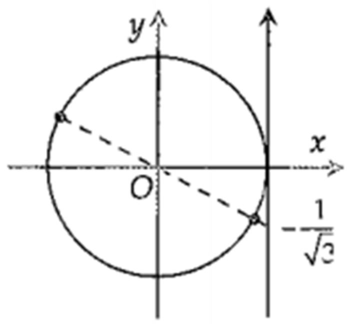
C. $\sqrt{3}\tan x+1=0\Leftrightarrow \tan x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)\Rightarrow$ Có 1 nghiệm thuộc $\left(0;\pi\right)$.

D. $\sqrt{2}\sin x-1=0\Leftrightarrow \sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)\Rightarrow$ Có hai nghiệm thuộc $\left(0;\pi\right)$.

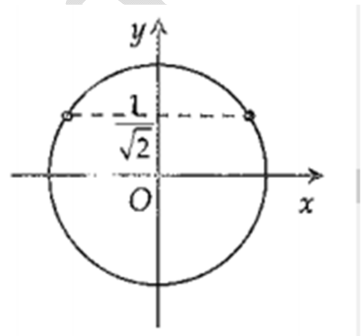
LƯU Ý: Để giải nhanh các bạn có thể biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác rồi so sánh để đưa ra đáp án một cách dễ dàng.



B. $\cos x=-\dfrac{1}{2}$



C. $\tan x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



D. $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

STUDY TIP
Một số phương trình phải qua một vài bước biến đổi đưa về phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác.

Ví dụ 2. Tổng hai nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất của phương trình $\sin^6 x+\cos^6 x=\dfrac{7}{16}$ là:

A. $\dfrac{5\pi}{6}$, **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{7\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)$$

$$=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\ =1-\frac{3}{4}.\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{5+3\cos 4x}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{5+3\cos 4x}{8}=\frac{7}{16}\Leftrightarrow \cos 4x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos 4x=\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 4x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Suy ra phương trình có 2 nghiệm dương nhỏ nhất là $x_1 = \frac{\pi}{6}$ và $x_2 = \frac{\pi}{3}$

Vậy $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{2}$

DẠNG 2.PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI (HOẶC PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2) ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Có dạng: $at^2 + bt + c = 0$ với $a,b,c \in \mathbb{R}; a \neq 0, t$ là một hàm số lượng giác.

Phương pháp giải:

- Bước 1: Đặt ẩn phụ, tìm điều kiện của ẩn phụ.
- Bước 2: Giải phương trình ẩn phụ.
- Bước 3: Từ nghiệm tìm được đưa về phương trình lượng giác cơ bản.

Ví dụ 1. Các điểm A, A', B, B' được biểu diễn trên đường tròn lượng giác thì các nghiệm của phương trình $\sin^2 x + 4\sin x + 3 = 0$ là:

A. sđ $\overset{\frown}{AB}$. **B.** sđ $\overset{\frown}{AA'}$. **C.** sđ $\overset{\frown}{AB'}$. **D.** sđ $\overset{\frown}{AB}$ và sđ $\overset{\frown}{AB'}$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $\sin = t \Rightarrow t = [-1;1] \forall x \in \mathbb{R}$

Phương trình $\sin^2 x + 4\sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -3(l) \end{array}\right.$

Với $t = -1 \Rightarrow \mathrm{sinx} = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình là sđ $\overset{\frown}{AB'}$

Ví dụ 2. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} = 3\cot x + \sqrt{3}$ là:

A. $-\frac{\pi}{2}$. **B.** $-\frac{5\pi}{6}$. **C.** $-\frac{\pi}{6}$. **D.** $-\frac{2\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Điều kiện: $\mathrm{sinx} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(1 + \cot^2 x\right) = 3\cot x + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}\cot^2 x - 3\cot x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot x = 0 \\ \cot x = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Vậy nghiệm âm lớn nhất là $-\dfrac{\pi}{2}$

Ví dụ 3. Tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0;2018)$ của phương trình $\sin^4\dfrac{x}{2}+\cos^4\dfrac{x}{2}=1-2\sin x$ là:

A. 207046π . **B.** 206403π . **C.** 205761π . **D.** 204603π .

Lời giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow\left(\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}\right)^2-2\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}=1-2\sin x$

$\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2}\sin^2 x=1-2\sin x\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\sin^2 x-2\sin x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=4(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$0<x<2018\Leftrightarrow 0<kx<2018\Leftrightarrow 0<k<\dfrac{2018}{\pi}\Rightarrow k\in\{1,2,3,...,642\}$

Vậy tổng các nghiệm cần tìm là:

$S=\pi+2\pi+3\pi+...+642\pi=\pi\left(1+2+3+...+642\right)=\dfrac{642\left(642+1\right)}{2}\pi=206403\pi$

DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI SINX, COSX:

Có dạng $a\sin x+b\cos x=c(1)$ trong đó $\begin{cases}a,b,c\in\mathbb{R}\\ a^2+b^2\neq 0\end{cases}$

Phương pháp giải:

Chia 2 vế cho $\sqrt{a^2+b^2}$ ta được:

$(1)\Leftrightarrow\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Đặt $\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha\\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha\end{cases}\Rightarrow(1)\Rightarrow\sin x.\cos\alpha+\cos x.\sin\alpha=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow\sin\left(x+\alpha\right)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}(2)$. Đây là phương trình lượng giác cơ bản.

+ Phương trình $\sin\left(x+\alpha\right)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ có nghiệm khi:

$$\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1\Leftrightarrow\dfrac{c^2}{a^2+b^2}\leq 1\Leftrightarrow a^2+b^2\geq c^2$$

+ Bạn có thể đặt: $\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha\\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha\end{cases}$

$$\Rightarrow (1) \Rightarrow \cos x.\cos\alpha + \sin x.\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Việc đặt thế nào thì tùy từng bài để được lời giải hợp lý nhất.

Ví dụ 1. Phương trình $m\sin x - \cos x = 1$ với m là tham số vô nghiệm khi:

A. $m \in (0;+\infty)$. **B.** $m \in \mathbb{R}\setminus(0)$. **C.** $m \in \varnothing$. **D.** $m = 0$.

Lời giải:

Chọn C.

+ Ta đi tìm m để phương trình $m\sin x - \cos x = 1$ có nghiệm rồi lấy phần bù

+ Ta có: Phương trình $m\sin x - \cos x = 1(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + (-1)^2 \ge 1^2 \Leftrightarrow m^2 \ge 0 \forall m \in \mathbb{R}$

Vậy phương trình $(*)$ có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$ suy ra phương trình $m\sin x - \cos x = 1$ vô nghiệm khi $m \in \varnothing$

Ví dụ 2. Nghiệm của phương trình $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.(k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right.(k \in \mathbb{Z})$.

D. $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}$ (chia 2 vế cho $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+3} = 2$)

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.(k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 3. Gọi a,b lần lượt là nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\frac{\cos x - \sin 2x}{2\cos^2 x - \sin x - 1} = \sqrt{3}$, ta có:

A. $ab = 0$. **B.** $ab = \frac{11\pi^2}{6}$. **C.** $ab = -\frac{11\pi^2}{6}$. **D.** $ab = -\frac{\pi^2}{36}$.

Lời giải:

Chọn C.

+ Điều kiện: $2\cos^2 x - \sin x - 1 \ne 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 \ne 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq -1 \\ \sin x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x \neq \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

+ Phương trình $\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\left(2\cos^2 x - 1 - \sin x\right) \Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\left(\cos 2x - \sin x\right)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x + \cos x = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \cos\frac{\pi}{3}\sin 2x + \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{6} = 2x + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{6} = \pi - 2x - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} - k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + (2k+2)\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp điều kiện suy ra phương trình có các nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{6} - k2\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Chọn $k = 1 \Rightarrow a = \dfrac{11\pi}{6}; k = 0 \Rightarrow b = -\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow a.b = -\dfrac{11\pi^2}{36}$

Ví dụ 4. Phương trình $3\sin 3x + \sqrt{3}\cos 9x = 2\cos x + 4\sin^3 3x$ có số nghiệm trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải:

Chọn D.

Phương trình $\Leftrightarrow 3\sin 3x - 4\sin^3 3x + \sqrt{3}\cos 9x = 2\cos x$

$$\Leftrightarrow \sin 9x + \sqrt{3}\cos 9x = 2\cos x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 9x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{6}\sin 9x + \cos\frac{\pi}{6}\cos 9x = \cos x \Leftrightarrow \cos\left(9x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x - \dfrac{\pi}{6} = x + k2\pi \\ 9x - \dfrac{\pi}{6} = -x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{48} + k\dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{\pi}{60} + k\dfrac{\pi}{5} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

- **TH1:** $x = \dfrac{\pi}{48} + k\dfrac{\pi}{4}$. Chọn $k = \{0;1\} \Rightarrow x = \left\{\dfrac{\pi}{48}; \dfrac{13\pi}{48}\right\} \subset \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

- **TH2:** $x = \dfrac{\pi}{60} + k\dfrac{\pi}{5}$. Chọn $k = \{0;1;2\} \Rightarrow x = \left\{\dfrac{\pi}{60}; \dfrac{13\pi}{60}; \dfrac{5\pi}{12}\right\} \subset \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Vậy phương trình có 5 nghiệm thuộc $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

DẠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP

Là phương trình dạng $f\left(\sin x;\cos x\right)=0$ trong đó lũy thừa của $\sin x$ và $\cos x$ cùng bậc chẵn hoặc lẻ.

Phương pháp giải:

- Bước 1: Xét $\cos x=0\Rightarrow$ Kết luận nghiệm
- Bước 2: Xét $\cos x\neq 0$, ta chia 2 vế của phương trình cho $\cos^n x$ (n là bậc cao nhất) đưa về phương trình bậc cao của tanx.

Ví dụ 1. Nghiệm của phương trình $2\sin^2 x-5\sin x\cos x-\cos^2 x=2\left(1\right)$ là:

A. $x=\arctan\left(-\dfrac{3}{5}\right)+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

B. $x=\arctan\left(-\dfrac{3}{5}\right)+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

C. $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\arctan\left(-\dfrac{3}{5}\right)+k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

D. $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\arctan\left(-\dfrac{3}{5}\right)+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Lời giải:

Chọn C.

+ Với $\cos x=0\Rightarrow\sin^2 x=1$. Thay vào phương trình $\left(1\right)\Leftrightarrow 2=2$ luôn đúng

$\Rightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ là nghiệm của $\left(1\right)$

+ Với $\cos x\neq 0$, chia 2 vế cho $\cos^2 x$ ta được:

$$\left(1\right)\Leftrightarrow 2\tan^2 x-5\tan x-1=2.\frac{1}{\cos^2 x}\Leftrightarrow 2\tan^2 x-5\tan x-1=2\left(1+\tan^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow\tan x=-\frac{3}{5}\Leftrightarrow x=\arctan x\left(-\frac{3}{5}\right)+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Kết luận: Nghiệm của phương trình $\left(1\right)$ là $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\arctan\left(-\dfrac{3}{5}\right)+k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

LƯU Ý:

- Khi nhìn các phương án trả lời của bài này bạn phải chia 2 vế cho $\cos^2 x\neq 0$ để đưa về phương trình bậc 2 theo tan x.
- Tuy nhiên đối với các phương án trả lời có nghiệm biểu diễn dạng khác. Bạn đọc có thể giải theo các cách sau:

  + Xét $\sin x=0$ không thỏa mãn phương trình $\left(1\right)$

  + Với $\sin x\neq 0$, chia 2 vế cho $\sin^2 x$ đưa về phương trình bậc 2 theo $\cot x$.

Hoặc dùng công thức hạ bậc để đưa về phương trình bậc nhất với sin và cos:

$(1) \Leftrightarrow 2\dfrac{1-\cos 2x}{2} - 5.\dfrac{1}{2}\sin 2x - \dfrac{1+\cos 2x}{2} = 2$

$\Leftrightarrow 5\sin 2x + 3\cos 2x = -3$ (đây là phương trình bậc nhất đối với $\sin 2x$,$\cos 2x$ đã học trong phần trước)

Hoặc $(1) \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - \cos^2 x = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$

$\Leftrightarrow 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$ (đây là phương trình đẳng cấp bậc 2)

Ví dụ 2. Tổng 2 nghiệm âm liên tiếp lớn nhất của phương trình $4\sin^3 x - \sin x - \cos x = 0$ bằng:

A. $\dfrac{5\pi}{2}$. **B.** $-\dfrac{5\pi}{2}$. **C.** $-\dfrac{5\pi}{4}$. **D.** $-\pi$.

Lời giải

Chọn B.

Trường hợp 1: $\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 1\\ \sin x = -1\end{array}\right.$

Với $\sin x = 1 \Rightarrow$ phương trình $\Leftrightarrow 3 = 0$ (vô nghiệm).

Với $\sin x = -1 \Rightarrow$ phương trình $\Leftrightarrow 5 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy $\cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình.

Trường hợp 2: $\cos x \neq 0$, chia 2 vế cho $\cos^2 x$ ta được:

Phương trình $\Leftrightarrow 4.\dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x} - \dfrac{\sin x}{\cos x}.\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x} = 0$

$\Leftrightarrow 4\tan^3 x - \tan x\left(1+\tan^2 x\right) - \left(1+\tan^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x - \tan^2 x - \tan x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ 3\tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0 (VN)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

Với $k = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{3\pi}{4}$. Với $k = -2 \Rightarrow x = -\dfrac{7\pi}{4}$.

Vậy tổng 2 nghiệm âm lớn nhất là $-\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{7\pi}{4} = -\dfrac{5\pi}{2}$.

Nhận xét: Đây là phương trình cùng bậc lẻ do đó có biến đổi sau:

$4\sin^3 x - \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow 4\sin^3 x - \sin x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) - \cos x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3\sin^3 x - \sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0$ là phương trình đẳng cấp bậc 3 đối với $\sin x$, $\cos x$.

STUDY TIP

Có thể sử dụng đường tròn lượng giác để xác định nghiệm âm lớn nhất.
Cách biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác:

Đuôi $k2\pi$ có 1 điểm. Đuôi $\frac{k2\pi}{2}=k\pi$ có 2 điểm. Đuôi $\frac{k2\pi}{3}$ có 3 điểm.

Đuôi $\frac{k2\pi}{4}=\frac{k\pi}{2}$ có 4 điểm. Đuôi $\frac{k2\pi}{n}$ có n điểm.

Ví dụ 3. Phương trình $1+3\tan x-2\sin 2x$ có số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Phương trình $\Leftrightarrow 1+3\frac{\sin x}{\cos x}=4\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x+3\sin x=4\sin x\cos^2 x$ (*)

Đến đây ta thấy phương trình (*) có cùng bậc lẻ cao nhất là 3, ta chia 2 vế cho $\cos^3 x\neq 0$ (do điều kiện)

$(*)\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x}+3\tan x.\frac{1}{\cos^2 x}=4\tan x$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x+\tan^2 x-\tan x+1=0$

$\Leftrightarrow \left(\tan x+1\right)\left(3\tan^2 x-2\tan x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ (TMĐK)

$\Rightarrow$ Số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là 2.

STUDY TIP

Ở đây ta có thể từ phương trình đầu chia ngay cho $\cos^2 x$ sẽ nhanh hơn. Tuy nhiên nó sẽ không tự nhiên bởi bạn chưa nhận ra dạng quen thuộc của bài toán.

Ví dụ 4. Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $8\sin x=\frac{\sqrt{3}}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$ ở cung phần tư thứ I và thứ III của đường tròn lượng giác là:

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Phương trình $\Leftrightarrow 8\sin^2 x\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ (cùng bậc lẻ)

Chia 2 vế cho $\cos^3 x \neq 0$ (do điều kiện)

Phương trình $\Leftrightarrow 8\tan^2 x = \sqrt{3}\tan x.\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow 8\tan^2 x = \sqrt{3}\tan x\left(1+\tan^2 x\right) + \left(1+\tan^2 x\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\tan^3 x - 7\tan^2 x + \sqrt{3}\tan x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\tan x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}\tan^2 x - 6\tan x - \sqrt{3}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \tan x = \sqrt{3}+2 \\ \tan x = \sqrt{3}-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \arctan\left(\sqrt{3}+2\right) + k\pi \\ x = \arctan\left(\sqrt{3}-2\right) + k\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Dựa vào việc biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta thấy số điểm biểu diễn nghiệm cần tìm là $4 \Rightarrow$ Đáp án B.

Ví dụ 4. Các nghiệm của phương trình $\tan x + \cot x = 2\sin 2x + \cos 2x$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{1}{2}arc\cot\dfrac{1}{2} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

B. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{1}{2}arc\cot\dfrac{1}{2} + k\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

C. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{1}{2} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

D. $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \arctan\dfrac{1}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = 2\sin 2x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 2\sin x\cos x\sin 2x + \sin x\cos x\cos 2x$

$\Leftrightarrow 1 = \sin^2 2x + \dfrac{1}{2}\sin 2x\cos 2x$ (*)(đây là phương trình bậc 2)

Chia 2 vế cho $\sin^2 2x \neq 0$ (do điều kiện) ta được:

Phương trình (*) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sin^2 2x} = 1 + \dfrac{1}{2}\cot 2x$

$$\Leftrightarrow 1+\cot^2 2x = 1+\frac{1}{2}\cot 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot 2x = 0\\ \cot 2x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \frac{\pi}{2}+k\pi\\ 2x = arc\cot\frac{1}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\\ x = \frac{1}{2}arc\cot\frac{1}{2}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right) \text{ (TMĐK)}$$

STUDY TIP (nếu có)

Với $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases}$, ta chia luôn 2 vế cho $\sin^2 2x$ để khỏi phải chia 2 trường hợp, bài giải sẽ ngắn gọn hơn.

Khi giải mà kết quả nghiệm có $arc\cot\alpha$ thì chia 2 vế cho $\sin^2 x$ và nếu kết quả nghiệm có $\arctan\alpha$ thì chia 2 vế cho $\cos^2\alpha$.

DẠNG 5. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG VỚI $SINX$ VÀ $COSX$.

Dạng: $a\left(\sin x+\cos x\right)+b\sin x\cos x = c\,(1)$ trong đó $\begin{cases}a,b,c\in\mathbb{R}\\ a.b\neq 0\end{cases}$.

Phương pháp chung:

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ (vì $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-1;1\right]\forall x\in\mathbb{R}$).

$t^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x = 1+2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow at+b\frac{t^2-1}{2}=c$ (là phương trình bậc 2 theo t)

Ví dụ 1. Phương trình $\sin x+\cos x-1=2\sin x\cos x$ có bao nhiêu nghiệm trên $\left[0;2\pi\right]$?

A. 2 . **B.** 3 . **C.** 4 . **D.** 6 .

Lời giải

Chọn C.

$\sin x+\cos x-1=2\sin x\cos x$ (1)

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$t^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x = 1+2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow t-1=2\frac{t^2-1}{2} \Leftrightarrow t^2-t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\\ t=1\end{array}\right.$ (TMĐK)

Với $t=0 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Với $t=1 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Kết luận: phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Rightarrow$ có 4 nghiệm trên $[0;2\pi]$.

STUDY TIP

Có bao nhiêu điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác các nghiệm của phương trình thì phương trình đó có bấy nhiêu nghiệm trên $[0;2\pi]$.

Chú ý: Với phương trình: $a(\sin x-\cos x)+b\sin x\cos x=c\,(2)$.

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ (vì $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in[-1;1]\forall x\in\mathbb{R}$).

$t^2=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=1-2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow at+b\frac{1-t^2}{2}=c$ (là phương trình bậc 2 theo t)

Một số sách gọi phương trình này là phản đối xứng với $\sin x$, $\cos x$.

Ví dụ 2. Phương trình $1+\sin x-\cos x-\sin 2x=0$ có bao nhiêu nghiệm trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$?

A. 1 . **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 4 .

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện: $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$t^2=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=1-\sin 2x \Rightarrow \sin 2x=1-t^2$.

Phương trình $\Leftrightarrow 1+t-\left(1-t^2\right)=0 \Leftrightarrow t^2+t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1 \end{array}\right.$ (TMĐK)

Với $t=0 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Với $t=-1 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$\Rightarrow$ có 2 nghiệm thuộc $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ là $x=0$ và $x=\frac{\pi}{4}$.

STUDY TIP

Dạng: $a\left(\sin x-\cos x\right)+b\sin x\cos x+c=0$.

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.$\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Cách 2: Nhận thấy phương trình có $\sin x-\cos x$ và $1-\sin 2x$ có nhân tử chung là $\sin x-\cos x$ nên ta có:

$$1+\sin x-\cos x-\sin 2x=0 \Leftrightarrow \sin x-\cos x+\left(\sin x-\cos x\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x-\cos x\right)\left(1+\sin x-\cos x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x-\cos x=0 \\ 1+\sin x-\cos x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ 1+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \quad \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

STUDY TIP

$1-\sin 2x=\left(\sin x-\cos x\right)^2$. $\qquad 1+\sin 2x=\left(\sin x+\cos x\right)^2$.

Ví dụ 3. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x\cos x+\left|\cos x+\sin x\right|=1$ trên $\left(0;2\pi\right)$ là:

A. π . **B.** 2π . **C.** 3π . **D.** 4π .

Lời giải

Chọn C.

$\sin x\cos x+\left|\cos x+\sin x\right|=1$ (3)

Đặt $t=\left|\sin x+\cos x\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| \Rightarrow t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

$$t^2=1+2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2} \Rightarrow (3) \Rightarrow \frac{t^2-1}{2}+t=1 \Leftrightarrow t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3\,(l) \end{array}\right.$$

Với $t=1:\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.$$

Suy ra phương trình có 3 nghiệm trên $(0;2\pi)$ là $x=\frac{\pi}{2};x=\pi;x=\frac{3\pi}{2}$

Vậy tổng 3 nghiệm là $\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{3\pi}{2}=3\pi.$

Ví dụ 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình: $\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-m=0$ có nghiệm.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B.

$\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-m=0 \Leftrightarrow \sin 2x+\sin x-cosx-m=0$

Đặt $t=\sin x-cosx=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right],\forall x\in\mathbb{R}$

$t^2=1-2\sin xcosx \Rightarrow \sin 2x=1-t^2$

Ta đi tìm m để phương trình $1-t^2+t-m=0$ có nghiệm $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$\Leftrightarrow 1-t^2+t=m$ có nghiệm $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Xét $f(t)=1-t^2+t$ trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

t	$-\sqrt{2}$		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{2}$
$f(t)$			$\frac{5}{4}$		
	$-1-\sqrt{2}$	$\nearrow$		$\searrow$	$-1+\sqrt{2}$

Suy ra $-1-\sqrt{2}\le f\left(t\right)\le \dfrac{5}{4},\forall t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m=f\left(t\right)$ có nghiệm trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$\Leftrightarrow m\in\left[-1-\sqrt{2};\dfrac{5}{4}\right]$ mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{-2;-1;0;1\right\}$

Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn.

STUDY TIP

Bảng biến thiên

+) $a<0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	$-\infty$ ↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘ $-\infty$

+) $a>0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	$+\infty$ ↘	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$

Ví dụ 5. Phương trình $cos^3x+\sin^3x=cos2x$ có tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất là:

A. $\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{5\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{7\pi}{2}$. **D.** $-\dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

$\cos^3x+\sin^3x=\cos 2x\Leftrightarrow\left(\cos x+\sin x\right)\left(\cos^2x-\cos x\sin x+\sin^2x\right)=\cos^2x-\sin^2x$

$\Leftrightarrow\left(\cos x+\sin x\right)\left(1-\cos x\sin x\right)=\left(\cos x+\sin x\right)\left(\cos x-\sin x\right)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\cos x+\sin x=0 & (1)\\ 1-\cos x\sin x=\cos x-\sin x & \left(2\right)\end{array}\right.$$

Giải $\left(1\right)\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Giải $(2): 1-\cos x\sin x+\sin x+\cos x=0$

Đặt $t=\sin x-cosx=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right],\forall x\in\mathbb{R}$

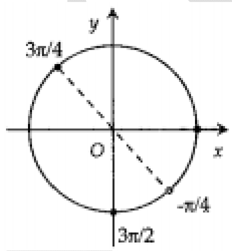
$t^2=1-2\sin xcosx\Rightarrow \sin 2x=1-t^2$

$(2)\Rightarrow 1-\frac{1-t^2}{2}+t=0\Leftrightarrow t^2+2t+1=0\Leftrightarrow t=-1$

$$\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

Biểu diễn nghiệm này trên vòng tròn lượng giác



ta suy ra nghiệm lớn nhất là $x_1=-\frac{\pi}{4}$ và nghiệm bé nhất là $x_2=\frac{3\pi}{4}$

Vậy $x_1+x_2=\frac{\pi}{2}$.

STUDY TIP

$+)\cos^3 x+\sin^3 x=(\cos x+\sin x)(1-\cos x\sin x)$

$+)\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$

$+)1+\sin 2x=(\cos x+\sin x)^2$

Ba biểu thức trên cùng có nhân tử chung là $\cos x+\sin x$.

DẠNG IV. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MỰC

Ví dụ 1. **Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích**

Phương trình $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$ có số điểm biểu diễn trên vòng tròn lượng giác là:

A. 2 . **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

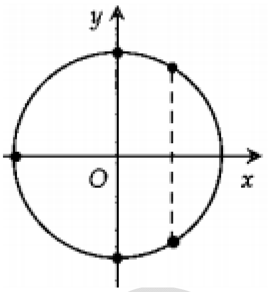
Chọn D.

Phương trình $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0\Leftrightarrow(\cos 3x+\cos x)+(1+\cos 2x)=0$

$$\Leftrightarrow 2cos2x\cos x+2cos^2x=0 \Leftrightarrow 2cosx\left(cos2x+cosx\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4cosxcos\frac{3x}{2}cos\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} cosx=0 \\ cos\frac{3x}{2}=0 \\ cos\frac{x}{2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ \frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Dựa vào điểm biểu diễn trên vòng tròn lượng giác



Vậy ta có 5 điểm.

Ví dụ 2. **Sử dụng công thức hạ bậc**

Phương trình $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$ không phải là phương trình hệ quả của phương trình nào sau đây ?

A. $\sin x=0$. **B.** $\cos x=0$. **C.** $\sin 9x=0$. **D.** $\cos 2x=0$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình

$$\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x \Leftrightarrow \frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{1-\cos 10x}{2}-\frac{1-\cos 12x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos 12x+\cos 10x\right)-\left(\cos 8x+\cos 6x\right)=0 \Leftrightarrow 2\cos 11x\cos x-\cos 7x\cos x=0$$ hông phải

$$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\cos 11x-\cos 7x\right)=0 \Leftrightarrow -4\cos x\sin 9x\sin 2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \sin 9x=0 \Rightarrow \cos 2x=0 \\ \sin 2x=0 \end{array}\right.$$

là phương trình hệ quả của phương trình đã cho.

Chú ý: Bạn đọc có thể giải các phương trình đơn giản ở các phương án rồi thay vào phương trình ban đầu để kiểm tra.

STUDY TIP

+) Phương trình (1) được gọi là phương trình hệ quả của phương trình (2) nếu tập nghiệm của phương trình (1) chứa tập nghiệm của phương trình (2).

+) $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$; $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$; $\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a$.

Ví dụ 3. **Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng**

Cho phương trình $\cos x\cos 5x=\cos 2x\cos 4x$ số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là:

A. 3 . **B.** 4 . **C.** 6 . **D.** 8 .

Lời giải

Chọn C.

Phương trình $\cos x\cos 5x=\cos 2x\cos 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\cos 6x+\cos 4x\right]=\frac{1}{2}\left[\cos 6x+\cos 2x\right]$

$$\Leftrightarrow \cos 4x=\cos 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=2x+k2\pi\\4x=-2x+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=k\dfrac{\pi}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{3}=\frac{k2\pi}{6}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy số điểm biểu diễn nghiệm là 6.

STUDY TIP

$$+)\ \cos a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos\left(a-b\right)+\cos\left(a+b\right)\right]$$

$$+)\ \sin a.\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos\left(a-b\right)-\cos\left(a+b\right)\right]$$

$$+)\ \sin a.\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin\left(a+b\right)+\sin\left(a-b\right)\right]$$

Ví dụ 4. **Sử dụng công thức nhân ba**

Cho phương trình $\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0$ có bao nhiêu nghiệm trên $\left[0;14\right]$?

A. 3 . **B.** 4 . **C.** 5 . **D.** 6 .

Lời giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow 4\cos^3 x-3\cos x-4\left(2\cos^2 x-1\right)+3\cos x-4=0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x-8\cos^2 x=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Mà $x\in\left[0;14\right]\Rightarrow 0\le\frac{\pi}{2}+k\pi\le 14 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le k\le\frac{14}{\pi}-\frac{1}{2}\Rightarrow k\in\left\{0;1;2;3\right\}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm thuộc $\left[0;14\right]$.

STUDY TIP

$$+)\ \cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$$

$$+)\ \sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$$

Ví dụ 5. **Sử dụng công thức các cung có liên quan đặc biệt**

Phương trình $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=1+2\sin x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)$?

A. 4 . **B.** 5. **C.** 6 . **D.** 7 .

Lời giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow \sin\left[\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+2\pi\right]-3\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-4\pi\right]=1+2\sin x$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-3cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=1+2\sin x \Leftrightarrow cos2x+3\sin x=1+2\sin x$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+3\sin x=1+2\sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$$

Mà $x\in\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)$ nên $x\in\left\{\pi;2\pi;\frac{13\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{17\pi}{6}\right\}$

Vậy phương trình có 5 nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)$.

Ví dụ 6. **Sử dụng công thức hạ bậc cao**

Cho các phương trình sau:

$$(1)\ \sin^8 x+cos^8 x=\frac{17}{16}cos^2 2x$$

$$(2)\ \sin^8 x+cos^8 x=\frac{17}{32}$$

$$(3)\ \sin^8 x+cos^8 x=\frac{97}{128}$$

$$(4)\ \sin^8 2x+cos^8 2x=\frac{1}{8}$$

Phương trình không tương đương với một trong các phương trình còn lại là:

A. (1) . **B.** (2). **C.** (3). **D.** (4).

Lời giải

Chọn C.

Ta có

$$\sin^8 x+cos^8 x=\left(\sin^2 x\right)^4+\left(cos^2 x\right)^4=\left(\frac{1-cos2x}{2}\right)^4+\left(\frac{1+cos2x}{2}\right)^4=\frac{1}{8}\left(cos^4 2x+6cos^2 2x+1\right)$$

Giải (1): $\frac{1}{8}\left(cos^4 2x+6cos^2 2x+1\right)=\frac{17}{16}cos^2 2x \Leftrightarrow 2cos^4 2x-5cos^2 2x+2=0 \Leftrightarrow cos^2 2x=\frac{1}{2}$

Giải (2): $\frac{1}{8}\left(cos^4 2x+6cos^2 2x+1\right)=\frac{17}{32} \Leftrightarrow 4cos^4 2x+24cos^2 2x-13=0 \Leftrightarrow cos^2 2x=\frac{1}{2}$

Giải (3): $\frac{1}{8}\left(cos^4 2x+6cos^2 2x+1\right)=\frac{97}{128}\Leftrightarrow 2cos^4 2x-12cos^2 2x-\frac{81}{8}=0\Leftrightarrow cos^2 2x=\frac{3}{4}$

Giải (4): $\frac{1}{8}\left(cos^4 4x+6cos^2 4x+1\right)=\frac{1}{8}\Leftrightarrow 2cos^4 4x+12cos^2 4x=0\Leftrightarrow cos^2 4x=0$

$\Leftrightarrow\left(2\cos^2 2x-1\right)^2=0\Leftrightarrow\cos^2 2x=\frac{1}{2}.$

Vậy phương trình (3) không tương đương với các phương trình còn lại.

STUDY TIP

$+)\ \sin^8 x+cos^8 x=\frac{1}{8}\left(cos^4 2x+6cos^2 2x+1\right)$

$+)\ (t+1)^4+(t-1)^4=2t^4+12t^2+2$

Ví dụ 7. ***Biểu diễn tổng của các đại lượng không âm***

Phương trình $\cos 2x-\cos 6x+4\left(3\sin x-4\sin^3 x+1\right)=0$ có phương trình tương đương là:

A. $\cos x=0$. **B.** $\sin 3x+1=0$.

C. $\cos x(\sin 3x+1)=0$. **D.** $\sin x-1=0$.

Lời giải

Chọn D.

$\Rightarrow$ Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1-\left(1-2\sin^2 3x\right)+4\left(\sin 3x+1\right)=0.$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+2\sin^2 3x+4\sin 3x+2=0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x+2\left(\sin 3x+1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=0\\ \sin 3x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-1\end{array}\right.\\ -4\sin^3 x+\sin 3x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\sin x=1\Leftrightarrow\sin x-1=0.$

__Lưu ý:__ Có thể thử các nghiệm trong các đáp án vào phương trình đã cho nếu thỏa mãn thì 2 phương trình tương đương.

STUDY TIP

$\begin{cases}A\ge 0\\ B\ge 0\end{cases}\Rightarrow A+B=0\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\ B=0\end{cases}$

Ví dụ 8. ***Đặt ẩn phụ - công thức nhân ba***

Phương trình $\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)$ có tổng các nghiệm trên $\left[0;2\pi\right]$ là:

A. $\frac{9\pi}{5}$. **B.** $\frac{9\pi}{15}$. **C.** $\frac{10\pi}{3}$. **D.** $\frac{10\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $t=\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{3\pi}{10}-t\Rightarrow\frac{3x}{2}=\frac{9\pi}{10}-3t$

$\Rightarrow$ Phương trình $\Leftrightarrow \sin t=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{9\pi}{10}-3t\right)\Leftrightarrow \sin t=\frac{1}{2}\sin(\pi-3t)\Leftrightarrow \sin t=\frac{1}{2}\sin(3t)$

$\Leftrightarrow 2\sin t=3\sin t-4\sin^3 t\Leftrightarrow \sin t\left(1-4\sin^2 t\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin t=0\\ \sin^2 t=\frac{1}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=k\pi (k\in\mathbb{Z})\\ \cos 2t=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=k\pi\\ t=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{5}-k2\pi\Rightarrow x=\frac{3\pi}{5}\in[0;2\pi]\\ x=\frac{14\pi}{15}-k2\pi\Rightarrow x=\frac{14\pi}{15}\in[0;2\pi]\\ x=\frac{4\pi}{15}-k2\pi\Rightarrow x=\frac{4\pi}{15}\in[0;2\pi]\end{array}\right.$$

Vậy tổng các nghiệm trên $[0;2\pi]$ của phương trình là: $\frac{3\pi}{5}+\frac{14\pi}{15}+\frac{14\pi}{15}=\frac{9\pi}{5}$.

Ví dụ 9. ***Đặt ẩn phụ không hoàn toàn***

Phương trình $\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\frac{x}{2}(\sin x+3)+\sin x+2=0$ có các nghiệm là:

A. $x=k2\pi;k\in\mathbb{Z}.$. **B.** $x=k\pi;k\in\mathbb{Z}.$. **C.** $x=(2k+1)\pi;k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}.$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t=\sin^2\frac{x}{2}\Rightarrow t\in[0;1],\forall x\in\mathbb{R}$.

Phương trình tương đương $t^2-(\sin x+3)t+\sin x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=1 & (1)\\ t=\sin x+2 & (2)\end{array}\right.$

+ Với $t=1\Leftrightarrow\sin^2\frac{x}{2}=1\Leftrightarrow\frac{1-\cos x}{2}=1\Leftrightarrow\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\Leftrightarrow x=(2k+1)\pi,(k\in\mathbb{Z})$

+ Với $t=\sin x+2\Leftrightarrow\sin^2\frac{x}{2}=\sin x+2$

$$\begin{cases}\sin^2\dfrac{x}{2}\le 1\\ \sin x+2\ge 1\end{cases}\Rightarrow \sin^2\dfrac{x}{2}=\sin x+2\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2\dfrac{x}{2}=1\\ \sin x+2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=-1\\ \sin x=-1\end{cases}\text{ (vô nghiệm)}$$

Kết luận: Vậy nghiệm của phương trình là $x=(2k+1)\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Nhận xét:

+ Với phương trình này hoàn toàn có thể giải bằng phương pháp đưa về dạng tích $A.B=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=0\\ B=0\end{array}\right.$.

+ Với phương trình $\sin^2\dfrac{x}{2}=\sin x+2$ (2) có thể giải cách khác như sau:

(2) $\Leftrightarrow\dfrac{1-\cos x}{2}=\sin x+2\Leftrightarrow 2\sin x+\cos x=-3$, phương trình này vô nghiệm do $2^2+1^2<(-3)^2$.

> **STUDY TIP**
> $a\sin x+b\cos x=c$ có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+b^2\ge c^2$.

Ví dụ 10. ***Phương pháp đánh giá***

Với phương trình $3\cos 4x+(\cos 2x-\sin x)^2=7$ (*) thì:

A. trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 1 nghiệm.

B. trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 2 nghiệm

C. trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 3 nghiệm.

D. trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 4nghiệm.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $3\cos 4x\le 3$

$(\cos 2x-\sin x)^2=|\cos 2x-\sin x|^2\le(|\cos 2x|+|\sin x|)^2\le 2^2$

$\Rightarrow(\cos 2x-\sin x)^2\le 4\Rightarrow 3\cos 4x+(\cos 2x-\sin x)^2\le 7$

Phương trình (*) xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}3\cos 4x=3\\ (\cos 2x-\sin x)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 4x=1\\ \cos 2x-\sin x=2(1)\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 4x=1\\ \cos 2x-\sin x=-2(2)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 4x=1\\ \cos 2x=1\\ \sin x=-1\end{cases}\text{(I)}\\ \begin{cases}\cos 4x=1\\ \cos 2x=-1\\ \sin x=1\end{cases}\text{(II)}\end{array}\right.$

+ Giải (I): $\begin{cases} 2\cos^2 2x - 1 = 1 \\ \cos 2x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 2x = 1 \\ \cos 2x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2\sin^2 x = 1 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases}$

(vô nghiệm)

+ Giải (II): $\begin{cases} \cos^2 2x = 1 \\ \cos 2x = -1 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2\sin^2 x = -1 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Vậy phương trình ban đầu có 1 nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$.

Chú ý: Có thể giải phương trình này bằng cách đưa về phương trình bậc 4 với $\sin x$ sẽ tự nhiên hơn. Tuy nhiên với ví dụ này tôi muốn minh họa thêm cho các bạn một phương pháp giải khác để linh hoạt khi làm bài.

STUDY TIP

(1) $\cos 2x - \sin x = 2 \Leftrightarrow \cos 2x = \sin x + 2$. Mà $\begin{cases} \cos 2x \le 1 \\ \sin x + 2 \ge 1 \end{cases}$

+ suy ra (1) xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \sin x + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases}$

+ suy ra (1) xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \sin x + 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \sin x = 1 \end{cases}$

Lưu ý: Đối với phương trình (1) và (2) ta có thể đưa ngay cách giải ngay bằng cách đưa về phương trình bậc 2 đối với $\sin x$ bằng cách sử dụng công thức $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Tuy nhiên một số phương trình không đưa về được như vậy. Ví dụ $\sin x + \sin 5x = 2$ (bạn đọc tự giải)

Ví dụ 11. ***Phương pháp hàm số***

Phương trình $\sqrt{\sin^2 x + 1} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{\cos^2 x + 1}$ (*) có tổng các nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. 0 .　　**B.** $\frac{\pi}{2}$.　　**C.** $\frac{\pi}{4}$　　**D.** $\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 x + 1} = -\text{sinx} + \cos x + \sqrt{\cos^2 x + 1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 x + 1} + \text{sinx} = \cos x + \sqrt{\cos^2 x + 1}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+1}+t$ trên $(0;1)$.

Với $\forall t_1,t_2\in(0;1)$ va $t_1\neq t_2$ ta xét biểu thức

$$\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}=\frac{\sqrt{t_1^2+1}+t_1-\sqrt{t_2^2+1}-t_2}{t_1-t_2}=\frac{t_1^2-t_2^2}{\left(\sqrt{t_1^2+1}+\sqrt{t_2^2+1}\right)(t_1-t_2)}+\frac{t_1-t_2}{t_1-t_2}=$$

$$=\frac{t_1^2-t_2^2}{\left(\sqrt{t_1^2+1}+\sqrt{t_2^2+1}\right)(t_1-t_2)}+1>0.$$

Suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $(0;1)$, Suy ra phương trình (1) tuuongw đương

$$f(\text{sinx})=f(\cos x)\Leftrightarrow \text{sinx}=\cos x\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$$

Vậy phương trình (*) có 1 nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là $\frac{\pi}{4}$.

Lưu ý: Đối với việc chứng minh hàm số đồng biến trên $(a;b)$ của hàm số

$$y=f(x),\begin{cases}\forall x_1,x_2\in(a;b)\\ x_1\neq x_2\end{cases}$$, xét tỉ số $\frac{f(\text{x}_1)-f(\text{x}_2)}{x_1-x_2}=m$

+ Nếu $m>0\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(a;b)$.

+ Nếu $m<0\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $(a;b)$.

+ Nếu $=0\Rightarrow$ Hàm số không đổi trên $(a;b)$.

STUDY TIP

+ Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì $\forall x_1,x_2\in(a;b)$:

$f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow x_1<x_2$

$f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow x_1<x_2$

$\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2$.

V. Một số phương trình lượng giác đưa về dạng tích

Ví dụ 1. Phương trình $\sin x+4\cos x=2+\sin 2x$ có số nghiệm trên $(0;2\pi)$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

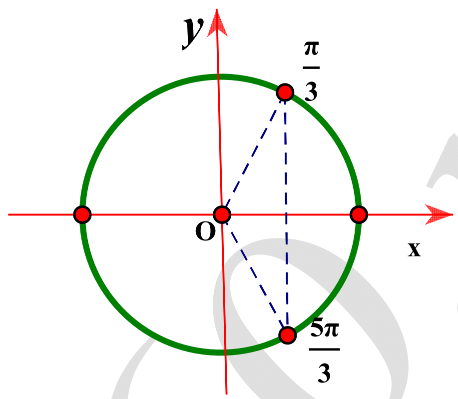
Phương trình $\Leftrightarrow \sin x+4\cos x=2+2\sin x\cos x$

$$\Leftrightarrow \sin x(1-2\cos x)-2(1-2\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x-2)(1-2\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x-2=0 \\ 1-2\cos x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=2(VN) \\ \cos x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm trên $(0;2\pi)$ là $x=\dfrac{\pi}{3}$ và $x=\dfrac{5\pi}{3}$.



Ví dụ 2. Phương trình $1+\cos x+\sin x+\cos 2x+\sin 2x=0$ có các nghiệm dạng $x_1=a+k2\pi, x_2=b+k2\pi, x_3=c+k2\pi, x_4=d+k2\pi$. Với $0<a,b,c,d<2\pi$ thì $a+b+c+d$ là:

A. 0. **B.** $\dfrac{7\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{5\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{9\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình $\Leftrightarrow 1+\sin 2x+\cos x+\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x=0$

$$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)^2+(\cos x+\sin x)+(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(\cos x+\sin x+1+\cos x-\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x+\sin x=0 \\ 2\cos x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0 \\ \cos x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Nghiệm trên biểu diễn trên đường tròn lượng giác ta viết lại các nghiệm phương trình là:

$$x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \vee x=\frac{7\pi}{4}+k2\pi \vee x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \vee x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi \Rightarrow a+b+c+d=\frac{3\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}=\frac{9\pi}{2}.$$

Ví dụ 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để phương trình $\cos^3 2x-\cos^2 2x-a\sin^2 x=0$ có nghiệm $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2 **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow \cos^3 2x-\cos^2 2x-a\dfrac{1-\cos 2x}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^3 2x-2\cos^2 2x+a\cos 2x-a=0 \Leftrightarrow (\cos 2x-1)\left(2\cos^2 2x-a\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=1(1)\\ \cos^2 2x=-\dfrac{a}{2}(2)\end{array}\right.$

-Giải (1) $\Rightarrow 2x=k2\pi \Leftrightarrow x=k\pi(k\in\mathbb{Z})$, các nghiệm này không thuộc $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$.

-Giải (2) có $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)\Rightarrow 2x\in\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)\Rightarrow \dfrac{1}{2}<\cos 2x<1\Rightarrow \dfrac{1}{4}<\cos^2 2x<1$

Suy ra phương trình (2) có nghiệm thuộc $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}<\dfrac{-a}{2}<1\Leftrightarrow -2<a<-\dfrac{1}{2}$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của a là -1.

Ví dụ 4. Phương trình $(2\sin x+1)(4\cos 4x+2\sin x)+4\cos^3 x=3$ nhận các giá trị $x=\arccos m+k\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ làm nghiệm thì giá trị m là:

A. $m=\dfrac{1}{4}$. **B.** $-\dfrac{1}{4}$. **C.** $m=\dfrac{1}{16}$ **D.** $m=-\dfrac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow (2\sin x+1)(4\cos 4x+2\sin x)+4\left(1-\sin^2 x\right)-3=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(4\cos 4x+2\sin x)+(1-2\sin x)(1+2\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(4\cos 4x+1)=0.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-\dfrac{1}{2}\\ \cos 4x=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{1}{4}\arccos(-\dfrac{1}{4})+k\dfrac{\pi}{2}\\ x=-\dfrac{1}{4}\arccos(-\dfrac{1}{4})+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy $m=\dfrac{1}{4}$

STUDY TIP

$$\cos^2 x = (1-\sin x)(1+\sin x)$$
$$\sin^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x)$$

Ví dụ 5. Phương trình $\sin 2x + 2\cos x = \cos 2x - \sin x$ là phương trình hệ quả của phương trình:

A. $\sin(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ **B.** $\sin 2x = 0$ **C.** $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ **D.** $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Lời giải

Chọn C

pt $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 2\cos x = -2\sin x^2 - \sin x + 1$

$$\Leftrightarrow (\sin x+1)(2\cos x + 2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \cos x + \sin x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Lưu ý: *Phương trình bậc hai* $at^2 + bt + c = 0 (a \neq 0)$ *có hai nghiệm* t_1, t_2 *thì* $at^2 + bt + c = a(t-t_1)(t-t_2)$

VI. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA ĐIỀU KIỆN

Ví dụ 1. Phương trình $\frac{\sin 5x}{5\sin x} = 1$ có số nghiệm là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** vô số

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \pm 1$

$Pt \Leftrightarrow \sin 5x - 5\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin 5x - \sin x - 4\sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 3x.\sin 2x - 4\sin x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 3x.2\sin x\cos x - 4\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow 4\sin x(\cos 3x\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0 (l)\\ \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) - 1 = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x + \cos 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1\\ \cos 2x = -\frac{3}{2} (VN)\end{array}\right.$$

Với $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0$ (loại vì không TMĐK)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

Ví dụ 2. Phương trình $3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = (2+3\sqrt{2})\cos x$ có các nghiệm dạng $x = \alpha + k2\pi; x = \beta + k2\pi, k \in Z, 0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ thì $\alpha.\beta$ bằng:

A. $\frac{\pi^2}{12}$ **B.** - $\frac{\pi^2}{12}$ **C.** $\frac{7\pi}{12}$ **D.** $\frac{\pi^2}{12^2}$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \pm 1$

$Pt \Leftrightarrow 3\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin^4 x = 2\cos x.\sin^2 x + 3\sqrt{2}\cos x.\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 3\cos x(\cos x - \sqrt{2}\sin^2 x) - 2\sin^2 x(\cos x - \sqrt{2}\sin^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sqrt{2}\sin^2 x)(3\cos x - 2\sin^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0(1)\\ 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0(2)\end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos x = -\sqrt{2}(VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi(k \in \mathbb{Z})$

$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2}\\ \cos x = -2(VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi(k \in \mathbb{Z})$

Vậy $\alpha = \dfrac{\pi}{4}; \beta = \dfrac{\pi}{3}; \alpha.\beta = \dfrac{\pi^2}{12}$

Ví dụ 3. Phương trình $\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin 2x} = \dfrac{1}{\sin 4x}$ có tổng các nghiệm trên $(0;\pi)$ là:

A. $\dfrac{\pi}{6}$ **B.** $\dfrac{\pi}{6}$ **C.** $\dfrac{2\pi}{3}$ **D.** π

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin 2x \neq 0\\ \sin 4x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\\ \cos 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\\ \sin x \neq \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x \neq \pm 1\\ \sin x \neq 0\\ \sin x \neq \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

$Pt \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{2\sin x\cos x} = \dfrac{1}{4\sin x\cos x\cos 2x}$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x + \cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(1 - 2\sin^2 x) + 1 - 2\sin^2 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(1 - 2\sin^2 x - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0(l)\\ 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1(l)\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. k \in \mathbb{Z}$

=>có 2 nghiệm trên $(0;\pi)$ là x=$\dfrac{\pi}{6}$ và x=$\dfrac{5\pi}{6}$

Vậy tổng các nghiệm trên $(0;\pi)$ là: $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{5\pi}{6} = \pi$

Ví dụ 4. Phương trình $\dfrac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0;3\pi)$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}\cos x\neq 0\\ \tan x\neq -\sqrt{3}\end{array}\right.(*)$

$Pt\Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x-\sin x-1=0\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\sin x+2\cos x-1=0$

$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(\sin x+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. k\in\mathbb{Z}$

Kết hợp điều kiện (*)=>Nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$

Vậy có hai nghiệm thuộc $(0;3\pi)$ là $x=\dfrac{\pi}{3}$ và $x=\dfrac{7\pi}{3}$

Ví dụ 5. Phương trình $\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin(x+\dfrac{\pi}{4})}{1+\tan x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ có các nghiệm dạng $x=\alpha+k2\pi; x=\beta+k2\pi,\alpha\neq\beta; k\in Z,-\pi<\alpha,\beta<\pi$ thì $\alpha^2+\beta^2$ là:

A. $\dfrac{\pi^2}{36}$ **B.** $\dfrac{35\pi^2}{36}$ **C.** $\dfrac{13\pi^2}{18}$ **D.** $\dfrac{15\pi^2}{18}$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}\cos x\neq 0\\ \tan x\neq -1\end{array}\right.(*)$

$$Pt\Leftrightarrow \frac{(1+\sin x+\cos 2x)\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}=\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+\sin x+1-2\sin^2 x)\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}=1$$

$$\Rightarrow 2+\sin x-2\sin^2 x=1\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện(*) ta có nghiệm của pt là $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2=\dfrac{\pi^2}{36}+\dfrac{25\pi^2}{36}=\dfrac{26\pi^2}{36}=\dfrac{13\pi^2}{18}$

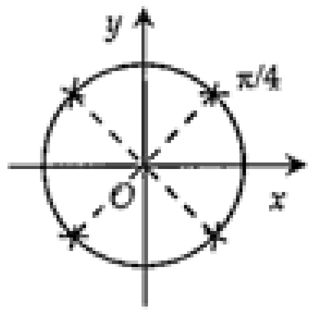
Ví dụ 6. Phương trình $\dfrac{\sin^4 2x+\cos^4 2x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}=\cos^4 x\,(1)$ có số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là:

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} \sin(x+\dfrac{\pi}{4})\neq 0 \\ \sin(\dfrac{\pi}{4}-x)\neq 0 \\ \cos(x+\dfrac{\pi}{4})\neq 0 \\ \cos(\dfrac{\pi}{4}-x)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x\neq \dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x\neq \dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x\neq -\dfrac{\pi}{4}+k\pi \end{cases}$



Ta có: $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\dfrac{\pi}{4}\tan x}.\dfrac{4}{1-\tan\dfrac{\pi}{4}\tan x}=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}.\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}=1$

$(*)\Leftrightarrow \sin^4 2x+\cos^4 2x=\cos^4 4x\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2}\sin^2 4x=1-\sin^2 4x\Leftrightarrow \sin^2 4x=0$.

$\Leftrightarrow \sin 4x=0\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos x=0\,(L)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=k\dfrac{\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z})$.

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow$ nghiệm của phương trình (1) là $x=k\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$

Vậy số điểm biểu diễn cần tìm là 4.

Lưu ý: Ở bài nầy điều kiện bài toán có thể gộp thành $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$

Bài tập rèn luyện kỹ năng
Phương trình lượng giác cơ bản

Câu 1. Phương trình $\sin(x+10^0)=\dfrac{1}{2}\ (0^0<x<180^0)$ có nghiệm là:

A. $x=30^0$ và $x=150^0$ **B.** $x=20^0$ và $x=140^0$

C. $x=40^0$ và $x=160^0$ **D.** $x=30^0$ và $x=140^0$

Câu 2. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})=1$ với $0\le x\le 2\pi$ là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 3. Phương trình $\sin(5x+\frac{\pi}{2})=m-2$ có nghiệm khi:

A. $m\in[1;3]$ **B.** $m\in[-1;1]$ **C.** $m\in R$ **D.** $m\in(1;3)$

Câu 4. Phương trình $\tan(3x+60^0)=m^2$ có nghiệm khi:

A. $m\in[-1;1]$ **B.** $m\in[0;1]$ **C.** $m\in R$ **D.** $m\in\varnothing$

Câu 5. Phương trình có nghiệm $\tan(x\text{-}1)=2$ là:

A. $x=-1+\arctan(2)+k\pi(k\in Z)$ **B.** $x=1+\arctan(2)+k\pi(k\in Z)$

C. $x=\arctan(2)+k2\pi(k\in Z)$ **D.** $x=1+\arctan(2)+k\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

Câu 6. Tổng các nghiệm của phương trình $\tan x=1$ trên khoảng $(0;10)$ là:

A. $\frac{15\pi}{4}$ **B.** $\frac{3\pi}{2}$ **C.** $\frac{7\pi}{2}$ **D.** 8π

Câu 7. Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình $\cos x=0$?

A. $\sin x=1$ **B.** $\sin x=-1$ **C.** $\tan x=0$ **D.** $\cot x=0$

Câu 8. Phương trình $\cos(x+\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{6}$ Có các nghiệm dạng $x=\alpha+k2\pi$ và $x=-\beta+k2\pi$ $(0\le\alpha;\beta\le\pi)$ Khi đó $\alpha+\beta$ bằng

A. 0 **B.** $-\frac{\pi}{6}$ **C.** $\frac{2\pi}{3}$ **D.** $-\frac{2\pi}{3}$

Câu 9. Phương trình $\cos 2x=-\cos(x+\frac{\pi}{2})$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $(0;10\pi)$

A. 14 **B.** 15 **C.** 16 **D.** 17

Câu 10. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cot x=\tan(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})$

A. $-\frac{2\pi}{3}$ **B.** $-\frac{\pi}{3}$ **C.** $-\frac{4\pi}{3}$ **D.** 0

Câu 11. Trong các phương trình sau, phương trình nào vô nghiệm?

A. $\tan x=99$ **B.** $\cot 2018x=2017$

C. $\sin 2x=-\frac{3}{4}$ **D.** $\cos(2x-\frac{\pi}{2})=\frac{2\pi}{3}$

Một số phương trình lượng giác thường gặp

Câu 12. Số nghiệm của phương trình $2\sin x-\sqrt{3}=0$ Trên đoạn $[0;2\pi]$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 13. Phương trình $m\tan x-\sqrt{3}=0$ Có nghiệm khi

A. $m \neq 0$. $m \in R$ **C.** $-1 \leq \frac{\sqrt{3}}{m} \leq 1$ **D.** $-1 < \frac{\sqrt{3}}{m} < 1$

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2\cos^2 x + m - 1 = 0$ Có nghiệm?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** Vô số

Câu 15. Tổng các nghiệm của phương trình $2\sin(x+20^0) - 1 = 0$ trên khoảng $(0^0, 180^0)$

A. 210^0 **B.** 200^0 **C.** 170^0 **D.** 140^0

Câu 16. Phương trình $\sin x - 3\cos x = 0$ có nghiệm dạng $x = \operatorname{arc}\cot m + k\pi, k \in Z$ thì giá trị m là:

A. $m = \frac{1}{3}$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = -3$ **D.** $m = -\frac{1}{3}$

Câu 17. Tổng 2 nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất của phương trình: $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0$ là:

A. $x = \frac{\pi}{6}$ **B.** $\frac{4\pi}{3}$ **C.** $\frac{\pi}{6}$ **D.** $\frac{5\pi}{6}$

Câu 18. Nghiệm của phương trình $\frac{\tan x - \sqrt{3}}{2\cos x + 1} = 0$ là:

A. $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z\right\}$ **B.** $S = \left\{\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi, k \in Z\right\}$

C. $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in Z\right\}$ **D.** $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$

Câu 19. Nghiệm của phương trình $2\tan^2 x + \frac{3}{\cos x} = -3$ là:

A. $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = k3\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 20: Phương trình $\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{13}{8}\cos^2 2x$ có bao nhiêu điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác?

A. 3. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\sin^2 x + (m^2 - 3)\sin x + m^2 - 4$ có hai nghiệm thuộc $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** Không có m.

Câu 22: Giá trị của m để phương trình $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$ có nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ là $m \in [a; b)$ thì $a + b$ là:

A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 23: Phương trình $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$ có tổng 2 nghiệm âm lớn nhất liên tiếp là:

A. $-\frac{3\pi}{2}$. **B.** $-\pi$. **C.** $-\frac{\pi}{2}$. **D.** $-\frac{5\pi}{2}$.

Câu 24: Phương trình $\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin x\cos x-m+2=0$ có nghiệm khi $m\in[a;b]$ thì tích $a.b$ bằng:

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{75}{16}$. **D.** $\frac{15}{4}$.

Câu 25: Phương trình $\tan x+2\cot x-3=0$ có các nghiệm dạng $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$ và $x=\arctan m+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ thì:

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=-2$.

Câu 26: Cho các phương trình sau:.

(1) $2\sin x-\sqrt{5}=0$.

(2) $\sin^2 2x+5\cos 2x-7=0$.

(3) $\sin^8 3x+\cos^8 3x=\frac{5}{4}$.

Trong các phương trình trên, phương trình nào vô nghiệm

A. Chỉ phương trình (1) vô nghiệm. **B.** Chỉ phương trình (2) vô nghiệm.

C. Chỉ phương trình (3) vô nghiệm. **D.** Cả 3 phương trình vô nghiệm.

Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$, $\cos x$.

Câu 27: Phương trình $\sin x+m\cos x=\sqrt{10}$ có nghiệm khi:

A. $\left[\begin{array}{l}m\ge 3\\ m\le -3\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m>3\\ m<-3\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m\ge 3\\ m<-3\end{array}\right.$. **D.** $-3\le m\le 3$.

Câu 28: Phương trình $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ có các nghiệm dạng $x=\alpha+k2\pi$ và $x=\beta+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ với $-\pi<\alpha,\ \beta<\pi$ thì $\alpha.\beta$ là:

A. $-\frac{\pi^2}{6}$. **B.** $-\frac{\pi^2}{2}$. **C.** $-\frac{\pi^2}{12}$. **D.** $\frac{\pi^2}{12}$.

Câu 29: Phương trình $\cos 2x+\sin x=\sqrt{3}(\cos x-\sin 2x)$ có các nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\\ x=-\frac{3\pi}{2}-k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$. **B.** $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$. **D.** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 30: Phương trình $\sin x+\cos x.\sin x+\sqrt{3}\cos 3x=2(\cos 4x+\sin^3 x)$ có tổng hai nghiệm dương nhỏ nhất liên tiếp là:

A. $\dfrac{\pi}{42}$. **B.** $\dfrac{13\pi}{42}$. **C.** $\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 31: Phương trình $\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$ có nghiệm dương nhỏ nhất là a và nghiệm âm lớn nhất là b thì $a+b$ là:

A. π. **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $-\dfrac{\pi}{3}$.

Phương trình đẳng cấp bậc hai.

Câu 32: Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin^2 x$ trên đường tròn lượng giác là:

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 33: Cho phương trình $2\cos^2 x+5\sin x\cos x+6\sin^2 x-m-1=0$ (1) số giá trị $m\in\mathbb{Z}$ để phương trình (1) có nghiệm là:

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 34: Phương trình $\sin x+\cos x-4\sin^3 x=0$ tương đương với phương trình:

A. $\tan x=-1$. **B.** $\sin x-\cos x=0$. **C.** $2\cos^2 x-1=0$. **D.** $\sqrt{2}\sin x-1=0$.

Câu 35: Phương trình $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\cos x}$ có bào nhiêu nghiệm trên $(0;2\pi)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 36: Số giá trị nguyên của m để phương trình $2\sin^2 x-\sin x\cos x-m\cos^2 x=1$ có nghiệm trên $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Phương trình đối xứng và các phương trình lượng giác không mẫu mực.

Câu 37: Phương trình $\sin x+\cos x+\sqrt{2}\sin 2x=0$ có số điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-m-1$ có nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 39: Cho phương trình $\cot x-\tan x=\sin x+\cos x$. Khi đặt $t=\sin x-\cos x$ thì:

A. $t=1-\sqrt{2}$. **B.** $t=\sqrt{2}-1$. **C.** $t=0$. **D.** $t=-1-\sqrt{2}$.

Câu 40: Phương trình $\tan x+\cot x=t$ có nghiệm khi:

A. $\left[\begin{array}{l} t\ge 2\\ t\le -2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} t> 2\\ t< -2\end{array}\right.$. **C.** $\forall t\in\mathbb{R}$. **D.** $t\in[-2;2]$.

Câu 41: Cho phương trình $3\tan^2 x+4\tan x+4\cot x+3\cot^2 x+2=0$ (1). Đặt $\tan x+\cot x=t$ với $t\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ thì phương trình (1) tương đương với phương trình:

A. $3t^2+4t+2=0$. **B.** $-3t^2+4t-4=0$. **C.** $3t^2+4t-4=0$. **D.** $3t^2-4t-4=0$.

Một số phương trình lượng giác khác.

Câu 42: Phương trình $\cos x+\cos 3x+2\cos 5x=0$ có các nghiệm là $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ và $x=\pm\frac{1}{2}\arccos m+k\pi$. Giá trị của m là:

A. $m=\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}$. **B.** $m=\frac{1\pm\sqrt{17}}{16}$. **C.** $m=\frac{\pm1+\sqrt{17}}{8}$. **D.** $m=\frac{\pm1+\sqrt{17}}{16}$.

Câu 43: Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $\sin 3x-\sin x+\sin 2x=0$ trên đường tròn lượng giác là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 44: Phương trình $\sin^4 x+\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$ có bao nghiêu nghiệm trên $(2\pi;3\pi)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 45: Phương trình $\cos^3 x.\cos 3x+\sin^3 x.\cos 3x=\sin^3 4x$ có bao nhiêu nghiệm trên $[0;2\pi]$?

A. 1. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 2.

Câu 46: Phương trình $\cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{3x}{2}-\sin x.\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{2}$ có tích các nghiệm trên $(-\pi;0)$ là:

A. $-\frac{\pi^2}{8}$. **B.** $\frac{\pi^2}{8}$. **C.** $\frac{5\pi^2}{72}$. **D.** $-\frac{\pi^2}{32}$.

Câu 47: Phương trình $\sin 5x.\cos 3x=\sin 7x.\cos 5x$ có tập nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{20}+k\frac{\pi}{10} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\frac{\pi}{20}+k\frac{\pi}{10} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{10} \\ x=\frac{\pi}{20}+k\frac{\pi}{10} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x=k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{20}+k\frac{\pi}{5} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 48: Phương trình $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)$ có tổng 3 nghiệm âm liên tiếp lớn nhất là:

A. $-\frac{\pi}{2}$. **B.** $-\frac{5\pi}{8}$. **C.** $-\frac{3\pi}{8}$. **D.** $-\frac{3\pi}{4}$.

Câu 49: Số nghiệm của phương trình $\sin^8 x-\cos^8 x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ trên $[0;2\pi]$ là:

A. 0. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 50: Phương trình $\tan^2 x+2\sin^2 x-2\tan x-2\sqrt{2}\sin x+2=0$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0;2\pi)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 51: Phương trình $\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0;2\pi)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 52: Phương trình $\sqrt{2}\left(\sin x-2\cos x\right)=2-\sin 2x$ có tập nghiệm là:

A. $S=\left\{\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $S=\left\{\pm\frac{3\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $S=\left\{\pm\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $S=\left\{\frac{5\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 53: Phương trình $\cot x-1=\frac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x$ có các nghiệm là:

A. $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. **B.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$. **D.** $x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu 54: Phương trình $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0;2\pi)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 55: Phương trình $2\sin^2 2x+\sin 7x-1=\sin x$ đưa về phương trình tích được phương trình tương đương là:

A. $\cos 4x\left(1-\sin 3x\right)=0$. **B.** $2\cos 4x\left(1-\sin 3x\right)=0$.

C. $\cos 4x\left(1+\sin 3x\right)=0$. **D.** $\cos 2x\left(1+\sin 3x\right)=0$.

Câu 56: Phương trình $2\sin x\left(1+\cos 2x\right)+\sin 2x=1+2\cos x$ là phương trình hệ quả của phương trình:

A. $\cos 2x=0$. **B.** $2\cos x-1=0$. **C.** $\sin 2x+1=0$. **D.** $\sin 2x-1=0$.

Câu 57: Phương trình $6\sin x-2\cos^3 x=\frac{5\sin x.\cos x}{2\cos 2x}$ có số nghiệm trên $(0;2\pi)$ là:

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 58: Phương trình $\sin 4x=\tan x$ có nghiệm dạng $x=k\pi$ và $x=\pm m\arccos n+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$ thì $m+n$ bằng:

A. $m+n=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m+n=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m+n=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. **D.** $m+n=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 59: Phương trình $\cos 2x-\tan^2 x=\frac{\cos^2 x-\cos^3 x-1}{\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm trên $[1;70]$?

A. 32. **B.** 33. **C.** 34. **D.** 35.

Phương trình lượng giác chứa tham số.

Câu 60: Phương trình $\left(2\sin x+1\right)\left(\sin x-m\right)=0$ (m là tham số) có nghiệm trên $(0;\pi)$ khi:

A. $\forall m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $m\in(0;1]$. **D.** $m\in(0;1)$.

Câu 61: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm lớn hơn -10 của m để phương trình $\left(2\cos x-1\right)\left(2\cos 2x+2\cos x-m\right)=3-4\sin^2 x$ có hai nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 62: Các giá trị của $m\in[a;b]$ để phương trình $\cos 2x+\sin^2 x+3\cos x-m=5$ có nghiệm thì:

A. $a+b=2$. **B.** $a+b=12$. **C.** $a.b=-8$. **D.** $a.b=8$.

Câu 63: Cho phương trình $m\sin x+(m+1)\cos x=\dfrac{m}{\cos x}$. Số các giá trị nguyên dương của m nhỏ hơn 10 để phương trình có nghiệm là:

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 7.

Câu 64: Phương trình $\cos 2x+(2m+1)\sin x-m-1=0$ có nghiệm trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ khi tất cả các giá trị thỏa mãn:

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m\in[-1;1]$. **D.** $m\in(-1;1)$.

Câu 65: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m nhỏ hơn 2018 để phương trình $\dfrac{3}{\sin^2 x}+3\tan^2 x+\tan x+\cot x=m$ có nghiệm ?

A. 2000. **B.** 2001. **C.** 2010. **D.** 2011.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Phương trình lượng giác cơ bản

Câu 1: **Đáp án B.**

$$\sin\left(x+10^o\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin\left(x+10^o\right)=\sin 30^o$$

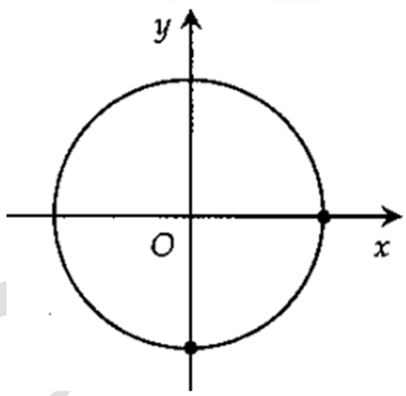
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+10^o=30^o+k360^o\\ x+10^o=180^o-30^o+k360^o\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=20^o+k360^o\\ x=140^o+k360^o\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Mà $x\in\left(0^o;180^o\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=20^o\\ x=140^o\end{array}\right.$.

Câu 2: **Đáp án C.**

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Biểu diễn trên đường trong lượng giác:



Vậy có 2 họ nghiệm thuộc $\left[0;2\pi\right]$.

Câu 3: **Đáp án A.**

Phương trình $\sin\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)=m-2$ có nghiệm khi $\left|m-2\right|\le 1\Leftrightarrow -1\le m-2\le 1\Leftrightarrow 1\le m\le 3$.

Câu 4: **Đáp án C.**

Phương trình $\tan\left(x+60^o\right)=m^2$ có nghiệm khi $m\in\mathbb{R}$.

Câu 5: **Đáp án B.**

Phương trình $\tan\left(x-1\right)=2\Leftrightarrow x-1=\mathrm{rac}\tan 2+k\pi\Leftrightarrow x=1+\mathrm{rac}\tan 2+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Câu 6: **Đáp án A.**

$$\tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Mà $x\in\left(0;10\right)\Leftrightarrow 0<\frac{\pi}{4}+k\pi<10\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<k<\frac{10}{\pi}-\frac{1}{4}$

Do $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0;1;2\} \Leftrightarrow 3$ nghiệm $\in (0;10)$ là $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi$, $x_3 = \frac{\pi}{4} + 2\pi$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = \frac{15\pi}{4}$.

Câu 7: **Đáp án D.**

Ta có $\cot x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$

Câu 8: **Đáp án D.**

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x+\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

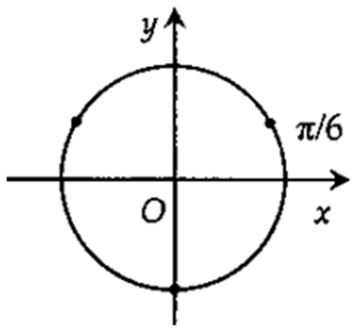
Vậy $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -\frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{2\pi}{3}$.

Câu 9: **Đáp án B.**

$$\cos 2x = -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left[\pi - \left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right] \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$$

(Chú ý gộp nghiệm trên đường tròn lượng giác)



Ta có: $0 < x < 10\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} < 10\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{59}{4}$

Mà $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0;1;2;3;...;14\}$

Vậy có 15 giá trị $k \Rightarrow$ có 15 nghiệm $\in (0;10\pi)$.

Câu 10: **Đáp án A.**

$\cot x = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \cot x = \cot\left(\pi - \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow x = \pi - \frac{x}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = (k+1)\frac{2\pi}{3}$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm âm lớn nhất là $x = -\frac{2\pi}{3}$.

Câu 11: **Đáp án D.**

Vì $\frac{2\pi}{3} > 1$.

Một số phương trình lượng giác thường gặp

Câu 12: **Đáp án B.**

$$2\sin x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm thuộc $[0;2\pi]$ là $x=\frac{\pi}{3}$ và $x=\frac{2\pi}{3}$.

Câu 13: **Đáp án A.**

+ Với $m=0$: Phương trình $\Leftrightarrow -\sqrt{3}=0$ (vô nghiệm) $\Rightarrow m=0$ không thỏa mãn.

+ Với $m\neq 0$: Phương trình $\Leftrightarrow \tan x=\frac{\sqrt{3}}{m}$ xác định với mọi giá trị $\frac{\sqrt{3}}{m}\in\mathbb{R}$.

Câu 14: **Đáp án C.**

$2\cos^2 x+m-1=0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{1-m}{2}$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow 0\le \frac{1-m}{2}\le 1\Leftrightarrow 0\le 1-m\le 2\Leftrightarrow -1\le m\le 1$$

Vậy có 3 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 15: **Đáp án D.**

$$2\sin\left(x+20^o\right)-1=0\Leftrightarrow \sin\left(x+20^o\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin\left(x+20^o\right)=\sin 30^0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+20^o=30^o+k360^0 \\ x+20^o=180^o-30^o+k360^0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10^o+k360^0 \\ x=130^o+k360^0 \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Vậy tổng các nghiệm trên $\left(0^o;180^o\right)$ là: $10^o+130^o=140^o$.

Câu 16: **Đáp án B.**

$\sin x-3\cos x=0\Leftrightarrow 3\cos x=\sin x\Leftrightarrow \cot x=3\Leftrightarrow x=\operatorname{arccot}3+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Vậy $m=3$.

Câu 17: **Đáp án A.**

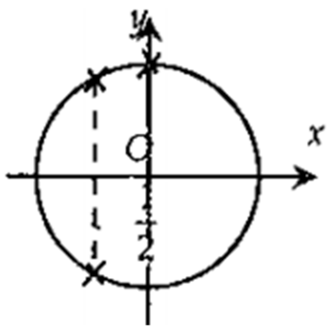
$$2\sin^2 x+7\sin x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=\frac{1}{2} \\ \sin x=-4\,(VN) \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy tổng 2 nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất là: $\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}=\pi$.

Câu 18: **Đáp án C**

$$\frac{\tan x-\sqrt{3}}{2\cos x+1}=0$$

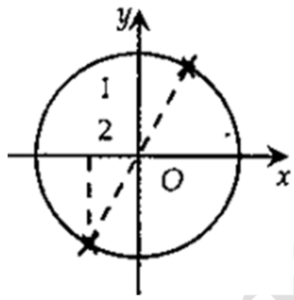
Điều kiện: $\begin{cases} \cos x\neq -\frac{1}{2} \\ \cos x\neq 0 \end{cases}$



Phương trình $\Leftrightarrow \tan x=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Kết hợp điều kiện suy ra nghiệm của phương trình là

$x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$



Câu 19: **Đáp án B.**

Điều kiện: $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Ta có: $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow \tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$

Phương trình $\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)+\dfrac{3}{\cos^2 x}=-3 \Leftrightarrow 2.\dfrac{1}{\cos^2 x}+3.\dfrac{1}{\cos x}+1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{\cos x}=-1\\ \dfrac{1}{\cos x}=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\ (TM)\\ \cos x=-2\ (l)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

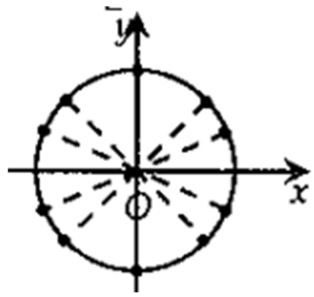
Câu 20: **Đáp án C.**

$\cos^6 x-\sin^6 x=\dfrac{13}{8}\cos^2 2x \Leftrightarrow \left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^4 x+\sin^2 x.\cos^2 x+\cos^4 x\right)=\dfrac{13}{8}\cos^2 2x$

$\cos 2x\left[\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)-\sin^2 x.\cos^2 x\right]=\dfrac{13}{8}\cos^2 2x \Leftrightarrow \cos 2x\left(1-\dfrac{1}{4}\sin^2 2x\right)-\dfrac{13}{8}\cos^2 2x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ 1-\dfrac{1}{4}\left(1-\cos^2 2x\right)-\dfrac{13}{8}\cos 2x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ 2\cos^2 2x-13\cos 2x+6=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos 2x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

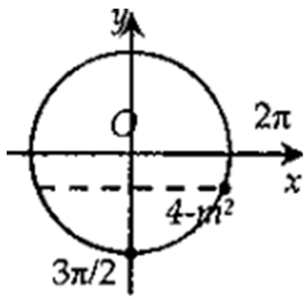


$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$$

Câu 21: **Đáp án D.**

$\sin^2 x+\left(m^2-3\right)\sin x+m^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=4-m^2\end{array}\right.$

+ Với $\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$



có 1 nghiệm $x=\dfrac{3\pi}{2}\in\left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$

+ Phương trình có 2 nghiệm $\in\left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)\Leftrightarrow \sin x=m^2-4$ có 1 nghiệm $\in\left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$ khác $\dfrac{3\pi}{2}$.

Câu 22. **Đáp án B.**

$\cos 2x-(2m+1)\cos x+m+1=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=m\end{array}\right.$

$x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow \cos x\in[-1;0)\Rightarrow \cos x=\dfrac{1}{2}$ không có nghiệm thỏa mãn $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Phương trình có nghiệm trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)\Leftrightarrow -1\le m<0\Rightarrow a+b=1$.

Câu 23. **Đáp án D.**

$\cos^4 x+\sin^4 x+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right).\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x.\cos^2 x+\dfrac{1}{2}\left[\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin 2x\right]-\dfrac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2-\sin^2 2x-\cos 4x+\sin 2x-3=0$

$\Leftrightarrow 2-\sin^2 2x-\left(1-2\sin^2 2x\right)+\sin 2x-3=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x+\sin 2x-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=-2\,(vn)\\ \sin 2x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy tổng hai nghiệm âm lớn nhất là $-\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{7\pi}{4}=-\dfrac{5\pi}{2}$.

Câu 24. Đáp án C.

$\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin x.\cos x-m+2=0$

$\Leftrightarrow 1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x+\dfrac{3}{2}\sin 2x-m+2=0$ (*)

$\Leftrightarrow 4m=-3\sin^2 2x+6\sin 2x+12$

Đặt $t=\sin 2x, t\in[-1;1]$. Xét $f(t)=-3t^2+6t+12$ trên $[-1;1]$.

t	-1		1
$f(t)$		$\nearrow$	15
	3		

Suy ra (*) có nghiệm $\Leftrightarrow 3\le 4m\le 15\Leftrightarrow \dfrac{3}{4}\le m\le\dfrac{15}{4}$.

Vậy $ab=\dfrac{75}{16}$.

Câu 25. **Đáp án B.**

Điều kiện $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \tan x + \dfrac{2}{\tan x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \arctan 2 + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy $m = 2$.

Câu 26. **Đáp án D.**

Phương trình bậc nhất đối với $\sin x, \cos x$

Câu 27. **Đáp án A.**

Phương trình có nghiệm $1^2 + m^2 \geq 10 \Leftrightarrow m^2 \geq 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m \geq 3\\ m \leq -3\end{array}\right.$.

Câu 28. **Đáp án C.**

$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

$\Rightarrow \alpha.\beta = -\dfrac{\pi}{6}.\dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi^2}{12}$.

Câu 29. **Đáp án A.**

$\cos 2x + \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 2x)$

$\Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3}\cos x = -(\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = -\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{2}\cos 2x\right)$

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{3}\sin x - \sin\dfrac{\pi}{3}\cos x = -\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\sin 2x + \sin\dfrac{\pi}{6}\cos 2x\right)$

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x - \dfrac{\pi}{3} = -2x - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x - \dfrac{\pi}{3} = \pi + 2x + \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}\\ x = -\dfrac{3\pi}{2} - k2\pi\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 30. **Đáp án C.**

$\sin x + \cos x.\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$

$\Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 x)\sin x + \cos x.\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$.

$\Leftrightarrow \sin x.\cos 2x+\cos x.\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x$

$\Leftrightarrow \sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin 3x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x=\cos 4x$

$\Leftrightarrow \sin\dfrac{\pi}{6}\sin 3x+\cos\dfrac{\pi}{6}\cos 3x=\cos 4x$

$\Leftrightarrow \cos\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos 4x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=3x-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ 4x=-3x+\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{42}+k\dfrac{2\pi}{7} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Hai nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất là $x_1=\dfrac{\pi}{42},x_2=\dfrac{13\pi}{42}\Rightarrow x_1+x_2=\dfrac{\pi}{3}$.

Câu 31. **Đáp án C.**

$\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$

$\Leftrightarrow 1+2\sin\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{x}{2}+\sqrt{3}\cos x=2$

$\Leftrightarrow \sin x+\sqrt{3}\cos x=1\Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Nghiệm dương nhỏ nhất là $\dfrac{\pi}{2}$, nghiệm âm lớn nhất là $-\dfrac{\pi}{6}$.

Vậy $a+b=\dfrac{\pi}{3}$.

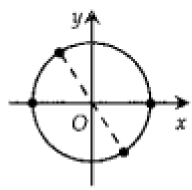
Phương trình đẳng cấp bậc 2.

Câu 32. **Đáp án D.**

$\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin^2 x(1)\ \Leftrightarrow \sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x.\cos x-\cos^2 x=-1$

- Với $\cos x=0\Rightarrow \sin^2 x=1\Rightarrow(1)\Leftrightarrow 1=-1$ vô lí.
- Với $\cos x\neq 0$ chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ ta được:

$(1)\Leftrightarrow \tan^2 x+2\sqrt{3}\tan x-1=-\left(1+\tan^2 x\right)\ \Leftrightarrow 2\tan^2 x+2\sqrt{3}\,\mathrm{t}=0$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=0 \\ \tan x=-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Vậy số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là 4.

Câu 33. **Đáp án C.**

$2\cos^2 x + 5\sin x.\cos x + \cos^2 x - m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 5\sin x.\cos x + 6\dfrac{1-\cos 2x}{2} = m$

$\Leftrightarrow \cos 2x + \dfrac{5}{2}\sin 2x + 3 - 3\cos 2x = m \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}\sin 2x - 2\cos 2x = m - 3$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + (-2)^2 \geq (m-3)^2$

$\Leftrightarrow (m-3)^2 \leq \dfrac{41}{4} \Leftrightarrow |m-3| \leq \dfrac{\sqrt{41}}{2}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{41}}{2} \leq m - 3 \leq \dfrac{\sqrt{41}}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{41}}{2} + 3 \leq m \leq \dfrac{\sqrt{41}}{2} + 3$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$.

Vậy có 7 giá trị m thỏa mãn.

Câu 34. Đáp án B.

Phương trình $\sin x + \cos x - 4\sin^3 x = 0 (*)$

-Với $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \pm 1$ không thỏa mãn phương trình.

-Với $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ ta được

$(*) \Leftrightarrow \tan x(1+\tan^2 x) + 1 + \tan^2 x - 4\tan^3 x = 0$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x - \tan^2 x - \tan x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0$

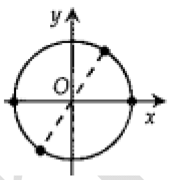
Câu 35. Chọn đáp án B.

Điều kiện $\cos x \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3}\tan x + 1 = 1 + \tan^2 x \Leftrightarrow \tan^2 x - \sqrt{3}\tan x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 0 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Vây só nghiệm trên $(0;2\pi)$ là 3.



Câu 36. Đáp án C.

$2\sin^2 x - \sin x.\cos x - m\cos^2 x = 1 (1)$

Trên $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \cos x \neq 0$

$(1) \Leftrightarrow 2\tan^2 x - \tan x - m = \tan^2 x + 1 \Leftrightarrow m = \tan^2 x - \tan x - 1$

Đặt $\tan x = t \Rightarrow t \in [-1;1] \forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$

Yêu cầu bài toán tìm m để phương trình $m = f(t) = t^2 - t - 1$ có nghiệm trên $[-1;1]$

t	-1	$\frac{1}{2}$	1
$f(t)$	1 ↘	$-\frac{5}{4}$	↗ -1

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m \in \left[-\frac{5}{4};1\right]$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Phương trình đối xứng và các phương trình lượng giác không mẫu mực.

Câu 37. **Đáp án C.**

$\sin x + \cos x + \sqrt{2}\sin 2x = 0 (1)$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sqrt{2}\sin x.\cos x = 0$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$t^2 = 1 + 2\sin x.\cos x \Rightarrow 2\sin x.\cos x = t^2 - 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow t + \sqrt{2}\left(t^2 - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ t = -\sqrt{2} \end{array}\right.$

+ Với $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

+ Với $t = -\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy có 3 điểm biểu diễn các nghiệm.

Câu 38. **Đáp án D.**

$\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - m - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin x.\cos x + \sin x - \cos x - m - 1 = 0$

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$2\sin x.\cos x = -t^2 + 1$

Phương trình $\Leftrightarrow m = -t^2 + t (*)$ có nghiệm trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + t$ trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

t	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
$-t^2+t$	$-\sqrt{2}-2$ ↗	$\frac{1}{4}$	↘ $\sqrt{2}-2$

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow m\in\left[-\sqrt{2}-2;\frac{1}{4}\right]$

Vậy các giá trị $m\in\{-3;-2;-1;0\}$ thỏa mãn.

Câu 39. **Đáp án A.**

Điều kiện $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$.

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x=\sin x.\cos x(\sin x+\cos x)$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(\sin x.\cos x+\sin x-\cos x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0(1)\\ \sin x.\cos x+\sin x-\cos x=0(2)\end{array}\right.$

Giải (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$

Giải (2). Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$, $\sin x.\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

$(2)\Leftrightarrow \frac{1-t^2}{2}+t=0\Leftrightarrow t^2-2t-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1-\sqrt{2}(tm)\\ t=1+\sqrt{2}(l)\end{array}\right.$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$. Vậy $t=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Câu 40. **Chọn đáp án B.**

Cách 1: Điều kiện để phương tình $\tan x+\cot x=t$ có nghiệm:

$|t|=|\tan x+\cot x|=|\tan x|+|\cot x|\geq 2\sqrt{|\tan x.\cot x|}=2 \Rightarrow t\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

Cách 2: Phương trình $\tan x+\frac{1}{\tan x}=t(\tan x\neq 0)$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \tan^2 x-t.\tan x+1=0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\geq 0\\ 0^2-t.0+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow t^2-4\geq 0\Leftrightarrow |t|\geq 2$.

Câu 41. **Đáp án C.**

$3\tan^2 x+4\tan x+4\cot x+3\cot^2 x+2=0$

$\Leftrightarrow 4(\tan x+\cot x)+3(\tan^2 x+\cot^2 x)+2=0$

$\Leftrightarrow 4t+3(t^2-2)+2=0\Leftrightarrow 3t^2+4t-4=0$.

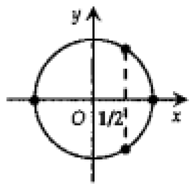
Câu 42. **Đáp án A.**

$$\cos x+\cos 3x+2\cos 5x=0$$
$$\Leftrightarrow (\cos 5x+\cos x)+(\cos 5x+\cos 3x)=0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 3x.\cos 2x+2\cos 4x.\cos x=0$$
$$\Leftrightarrow (4\cos^3 x-3\cos x)\cos 2x+\cos 4x.\cos x=0$$
$$\Leftrightarrow \cos x\left[(4\cos^2 x-3\cos x)\cos 2x+\cos 4x\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \cos x\left[(2\cos 2x-1)\cos 2x+2\cos^2 2x-1\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \cos x(4\cos^2 2x-\cos 2x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos 2x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{8}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{8}+k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy $m=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{8}$.

Câu 43. **Đáp án C.**

$$\sin 3x-\sin x+\sin 2x=0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 2x.\sin x+2\sin x.\cos x=0$$
$$\Leftrightarrow \sin x(2\cos^2 x+\cos x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=-1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\pi+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$



Vậy có 4 điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 44. **Đáp án A.**

$$\sin^4 x+\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow (1-\cos 2x)^2+\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-(-2x)\right)\right]^2=1$$
$$\Leftrightarrow (1-\cos 2x)^2+(1-\sin 2x)^2=1$$
$$\Leftrightarrow 1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1-2\sin 2x+\sin^2 2x=1$$
$$\Leftrightarrow 3-2\cos 2x-2\sin 2x=1$$
$$\Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm thuộc $(2\pi;3\pi)$.

Câu 45. **Đáp án B.**

$$\cos^3 x.\sin 3x + \sin^3 x.\cos 3x = \sin^3 4x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}.\sin 3x + \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}.\cos 3x = \sin^3 4x$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}(\sin 3x.\cos x + \sin x.\cos 3x) = \sin^3 4x$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\sin 4x = \sin^3 4x \Leftrightarrow \sin 12x = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{12}(k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 24 nghiệm trên $[0;2\pi]$.

Câu 46. **Đáp án B.**

$$\cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{3x}{2} - \sin x.\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x.\frac{1}{2}(\cos 2x + \cos x) - \sin x.\frac{1}{2}(\cos x - \cos 2x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos 2x + \cos x) + 1 - \sin^2 x - \sin x.\cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x + \cos x) - \sin x(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - 2\sin^2 x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Suy ra có hai nghiệm thuộc $(-\pi;0)$ là $-\frac{\pi}{4}$ và $-\frac{\pi}{2}$.

Vậy tích hai nghiệm là $\frac{\pi^2}{8}$.

Câu 47. **Đáp án A.**

$$\sin 5x.\cos 3x = \sin 7x.\cos 5x \Leftrightarrow \sin 8x + \sin 2x = \sin 12x + \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 8x = \sin 12x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 12x = 8x + k2\pi \\ 12x = \pi - 8x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{10} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 48. **Đáp án D.**

Điều kiện $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \sin\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq k\pi\\ x\neq\dfrac{3\pi}{2}+k\pi\end{cases}(k\in\mathbb{Z})$.

Ta có

$$\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(x-\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}-x\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x).$$

Phương trình $\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}=-2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$

$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)\left(\frac{1}{\sin x.\cos x}+2\sqrt{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ \sin x.\cos x=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\\ \sin 2x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{8}+k\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{8}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy tổng các nghiệm âm liên tiếp lớn nhất là $-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{3\pi}{8}=-\dfrac{3\pi}{4}$.

Câu 49. **Đáp án A.**

Ta có $\begin{cases}\sin^8 x\leq 1\\ -\cos^8 x\leq 0\end{cases}\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\sin^8 x-\cos^8 x\leq 1$, mà $\dfrac{2}{\sqrt{3}}>1$.

Vậy phương tình đã cho vô nghiệm.

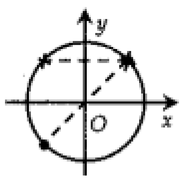
Câu 50. **Đáp án A.**

$$\tan^2 x+2\sin^2 x-2\tan x-2\sqrt{2}\sin x+2=0$$

$$\Leftrightarrow(\tan^2 x-2\tan x+1)+(2\sin^2 x-2\sqrt{2}\sin x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow(\tan x-1)^2+(\sqrt{2}\sin x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\tan x=1\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$$



Vậy phương trình có 1 nghiệm trên $(0;2\pi)$.

Câu 51. **Đáp án C.**

Đặt $t=\dfrac{3\pi}{10}-\dfrac{x}{2}\Rightarrow\dfrac{x}{2}=\dfrac{3\pi}{10}-t\Leftrightarrow\dfrac{3x}{2}=\dfrac{9\pi}{10}-3t$

Phương trình $\Leftrightarrow\sin t=\dfrac{1}{2}\sin(\pi-3t)\Leftrightarrow 2\sin t=\sin 3t$

$$\Leftrightarrow 2\sin t=3\sin t-4\sin^3 t\Leftrightarrow\sin t(2\cos 2t-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t = 0 \\ \cos 2t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = k\pi \\ t = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{5} - k2\pi \\ x = \dfrac{14\pi}{5} + k2\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right) \\ x = \dfrac{4\pi}{5} + k2\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm thuộc $\left(0;2\pi\right)$.

Câu 52. **Đáp án B.**

$$\sqrt{2}\left(\sin x - 2\cos x\right) = 2 - \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x - 2\sqrt{2}\cos x = 2 - 2\sin x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\sin x - 2\right)\left(\sqrt{2}\cos x + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \sqrt{2}\left(vn\right) \\ \cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Câu 53. **Đáp án B.**

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x}} + \sin x\left(\sin x - \cos x\right)$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = \sin x.\cos x\left(\cos x - \sin x\right) + \sin x\left(\cos x - \sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x - \sin x\right)\left(1 - \sin x\cos x + \sin^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1 - \cos 2x}{2} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1\left(tm\right) \\ \sin x + \cos x = 3\left(vn\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Câu 54. **Đáp án B.**

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq \pm 1$.

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{\cos x} + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x + 4\sin^2 2x = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1\left(l\right) \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm trên $\left(0;2\pi\right)$

Câu 55. **Đáp án** C.

$2\sin^2 2x+\sin 7x-1=\sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x-1+\sin 7x-\sin x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x+2\cos 4x.\sin\ 3x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x\left(1+\sin 3x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x=0\\ 1+\sin 3x=0\end{array}\right.$

Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 56. **Đáp án D.**

$2\sin x\left(1+\cos 2x\right)+\sin 2x=1+2\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(1+\cos^2 x-1\right)+\sin 2x=1+2\cos x$

$\Leftrightarrow 4\sin x.\cos^2 x+\sin 2x=1+2\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos x+\sin 2x=1+2\cos x$

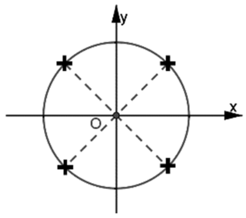
$\Leftrightarrow \left(2\cos x+1\right)\left(\sin 2x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\cos x+1=0\\ \sin 2x-1=0\end{array}\right.$

Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 57. **Đáp án A.**

Điều kiện: $\cos 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$



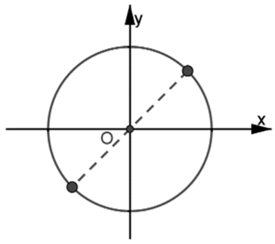
Phương trình $\Leftrightarrow 6\sin x-2\cos^3 x=5\sin 2x.\cos x$

$\Leftrightarrow 3\sin x-\cos^3 x-5\sin x.\cos^3 x=0\left(*\right)$

- Với $\cos x=0$: Không thỏa mãn phương trình $\left(*\right)$

- Với $\cos x\neq 0$: Chia hai vế cho $\cos^3 x$ ta được:

$\left(*\right)\Leftrightarrow 3\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-1-5\tan x=0$



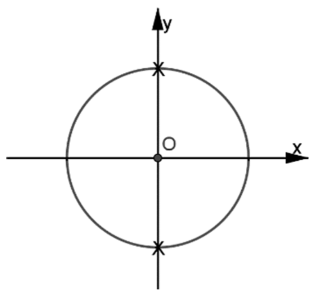
$\Leftrightarrow 3\tan^3 x-2\tan x-1=0$

$\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm

Câu 58. **Đáp án A.**

Điều kiện: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$



Phương trình $\Leftrightarrow \sin 4x.\cos x=\sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x.\cos x-\sin x=0$

$\Leftrightarrow 4\sin x.\cos^2 x.\cos 2x-\sin x=0$

$\Leftrightarrow \left(4\cos^2 x.\cos 2x-1\right)\sin x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 2\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos 2x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \cos 2x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} (VN) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow m + n = \frac{1}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Câu 59. **Đáp án B.**

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

PT: $\Leftrightarrow \cos 2x - \tan^2 x = 1 - \cos x - (1 + \tan^2 x)$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$$

Mà $x \in [1; 70] \Leftrightarrow 1 \leq \dfrac{\pi}{3} + k\dfrac{2\pi}{3} \leq 70$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2\pi} - \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{105}{\pi} - \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow k \in \{0; 1; 2; ...; 32\}$

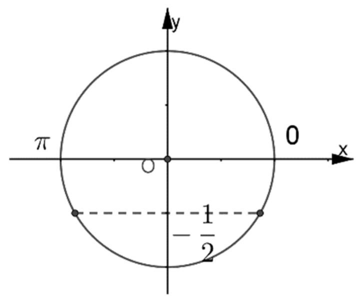
Vậy PT có 33 nghiệm trên $[1; 70]$

Phương trình lượng giác chứa tham số

Câu 60. **Đáp án C.**

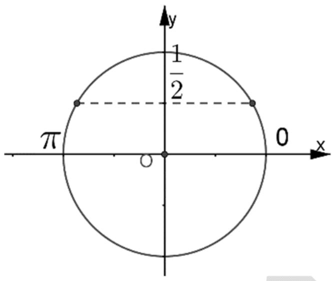
$(2\sin x + 1)(\sin x - m) = 0 (*)$ có nghiệm thuộc $(0; \pi)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -\dfrac{1}{2} (1) \\ \sin x = m (2) \end{array}\right.$$



Giải $(1) \Rightarrow \sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$



$\Rightarrow$ PT (1) không có nghiệm nào thuộc $\left(0;\pi\right)$

$\Rightarrow$(*) có nghiệm $\in\left(0;\pi\right)$

$\Leftrightarrow \sin x=m$ có nghiệm $\in\left(0;\pi\right)\Leftrightarrow m\in\left(0;1\right]$.

Chú ý: Độc giả có thể giải cách khác như sau:

Có $\sin x\in\left(0;1\right]\forall x\in\left(0;\pi\right)$

$\Rightarrow \sin x=m$

$\Leftrightarrow m\in\left(0;1\right]$

Câu 61. **Đáp án A.**

PT $\left(2\cos x-1\right)\left(2\cos 2x+2\cos x-m\right)=3-4\sin^2 x$ có đúng hai nghiệm $\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

$$\Leftrightarrow\left(2\cos x-1\right)\left(4\cos^2 x-2+2\cos x-m\right)$$

$$=\left(2\cos x-1\right)\left(2\cos x+1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(2\cos x-1\right)\left(4\cos^2 x-3-m\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2\cos x-1=0 \\ 4\cos^2 x--3-m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=\dfrac{1}{2}\,(1) \\ \cos^2 x=\dfrac{m+3}{4}(2) \end{array}\right.$$

Giải (1): $\cos x=\dfrac{1}{2}$ có hai nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

=> Phương trình có hai nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm hoặc (2) $\Leftrightarrow \cos x=\pm\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -\dfrac{m+3}{4}>1 \\ \dfrac{m+3}{4}<0 \\ \dfrac{m+3}{4}=\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-3 \\ m=2 \end{array}\right.$$

Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn.

Chú ý: $\cos^2 x\in\left[0;1\right]\forall x\in R$

Câu 62. **Đáp án C**

$\cos 2x + \sin^2 x + 3\cos x - m = 5(*)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 1 - \cos^2 x + 3\cos x - m - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x + 3\cos x = m + 5$

Đặt $\cos x = t \in [-1;1]$, phương trình $\Leftrightarrow t^2 + 3t = m + 5$

Bảng biến thiên:

t	-1		1
t^2+3t		$\nearrow$	4
	-2		

=> Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow -2 \le m + 5 \le 4$

$\Leftrightarrow -7 \le m \le -1$. Vậy a + b = -8

Câu 63. **Đáp án B**

$m\sin x + (m+1)\cos x = \dfrac{m}{\cos x}(*)$

Điều kiện: $\cos x \ne 0$

$(*) \Leftrightarrow m\sin x\cos x + (m+1)\cos^2 x = m$

$\Leftrightarrow \dfrac{m}{2}\sin 2x + \dfrac{m+1}{2}(1+\cos 2x) = m$

$\Leftrightarrow m\sin 2x + (m+1)\cos 2x = m - 1(1)$

+ Từ m = 0 $(*) \Leftrightarrow \cos x = 0$ loại do điều kiện $\Rightarrow m = 0$ phương trình (*) vô nghiệm.

+ Với $m \ne 0$

=> (*) có nghiệm khi (1)

$\Leftrightarrow m^2 + (m+1)^2 \ge (m-1)^2$

$\Leftrightarrow m^2 + 4m \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -4 \\ m \ge 0 \end{array}\right.$

Vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 64. **Đáp án B**

$\cos 2x + (2m+1)\sin - m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 2m\sin x + \sin x - m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(m - \sin x) - (m - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - m)(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2}(1) \\ \sin x = m(2) \end{array}\right.$

Giải (1): $\sin x = \dfrac{1}{2}$ luôn có 2 nghiệm $\in \left(-\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

$\Rightarrow \forall m$ phương trình có nghiệm.

Câu 65. **Đáp án D**

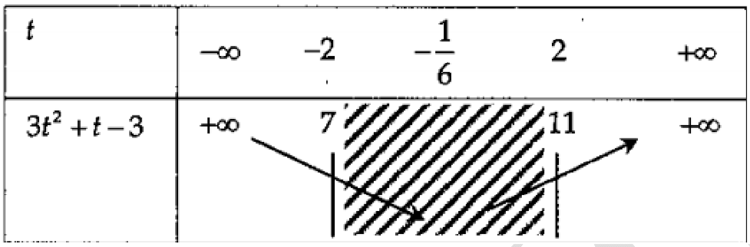
$\frac{3}{\sin^2 x}+3\tan^2 x+tanx+\cot x=m$

$\Leftrightarrow 3\left(1+\cot^2 x\right)+3\tan^2 x+\tan x+\cot x+3-m=0$ Đặt $t=\tan x+\cot x \Rightarrow t^2-2=\tan^2 x+\cot^2 x$

$\Leftrightarrow 3\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)+\tan x+\cot x+3-m=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t\ge 2 \\ t\le -2 \end{array}\right.$ => Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình $3\left(t^2-2\right)+t+3-m=0$ có nghiệm $t\in\left(-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right) \Leftrightarrow m=3t^2+t-3$ có nghiệm $t\in\left(-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right)$

Bảng biến thiên:



=> Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge 7$

Vậy có 2011 giá trị của m nhỏ hơn 2018

\+ Với $\cos x=0 \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x=2\sin x\cos x=0 \\ \cos 2x=2\cos^2 x-1=-1 \end{cases}$ thì $(1)\Rightarrow -m-1=m-1 \Leftrightarrow m=0$