NHỊ THỨC NEWTON

A. LÝ THUYẾT

1. Công thức nhị thức Newton

Khai triển $(a+b)$ được cho bởi công thức sau:

Định lý 1

Với a, b là các số thực và n là số nguyên dương, ta có

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+...+C_n^ka^{n-k}b^k+...+C_n^nb^n.(1)$$

Quy ước $a^0=b^0=1$

Công thức trên được gọi là công thức nhị thức Newton (viết tắt là Nhị thức Newton).

STUDY TIP

Trong biểu thức ở VP của công thức (1)

a) Số các hạng tử là $n+1$.

b) Số các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đén 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n, nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n.

c) Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.

Hệ quả

Với $a=b=1$, thì ta có $2^n=C_n^0+C_n^1+...+C_n^n$.

Với $a=1; b=-1$, ta có $0=C_n^0-C_n^1+...+(-1)^kC_n^k+...+(-1)^nC_n^n$

Các dạng khai triển cơ bản nhị thức Newton

$$(x+1)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+...+C_n^kx^{n-k}+...+C_n^{n-1}x+C_n^n$$

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^kx^k+...+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$$

$$(x-1)^n=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-...+(-1)^kC_n^kx^k+...+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}x^{n-1}+(-1)^nC_n^nx^n$$

$$C_n^k=C_n^{n-k}$$

$$C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1},(n\ge 1)$$

$$k.C_n^k=\frac{k.n!}{(n-k)!k!}=\frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}=nC_{n-1}^{k-1}$$

$$\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{k.n!}{(k+1)(n-k)!k!}=\frac{n(n-1)!}{(n+1)(n-k)!(k+1)!}=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$$

2. Tam giác Pascal.

n = 0			1		
n = 1		1		1	
n = 2	1		2		1

n = 3 1 3 3 1
n = 4 1 4 6 4 1
n = 5 1 5 10 10 5 1

Tam giác Pascal được thiết lập theo quy luật sau

- Đỉnh được ghi số 1. Tiếp theo là hàng thứ nhất ghi hai số 1.
- Nếu biết hàng thứ n $(n \ge 1)$ thì hàng thứ n+1tiếp theo được thiết lập bằng cách cộng hai số liên tiếp của hàng thứ n rồi viết kết quả xuống hàng dưới ở vị trí giữa hai số này. Sau đó viết số 1 ở đầu và cuối hàng.

Nhận xét: Xét hàng thứ nhất, ta có:

$1 = C_1^0,\ 1 = C_1^1.$

Ở hàng thứ 2, ta có

$1 = C_3^0,\ 2 = C_2^1,\ 1 = C_2^2.$

Ở hàng thứ 3, ta có

$1 = C_3^0,\ 3 = C_3^1, 3 = C_3^2,\ 1 = C_3^3.$

STUDY TIP

Các số ở hàng thứ n trong tam giác Pascal là dãy gồm $(n+1)$ số $C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2, ..., \ C_n^{n-1},\ C_n^n.$

B. Các dạng toán sử dụng công thức tổ hợp và nhị thức Newton

DẠNG 1. Xác định điều kiện của số hạng thỏa mãn yêu cầu cho trước

Phương pháp chung:

- Xác định số hạng tổng quát của khai triển $T^{k+1} C_n^k a^{n-k} b^k$ (số hạng thứ $k+1$).
- Từ T^{k+1} kết hợp với yêu cầu bài toán ta thiết lập một phương trình (thông thường theo biến k).
- Giải phương trình để tìm kết quả.

Ví dụ 1. Trong khai triển $\left(a^2 - \frac{1}{b}\right)$, số hạng thứ 5 là

A. $-35a^6b^{-4}$. **B.** $35a^6b^{-4}$. **C.** $-24a^4b^{-5}$. **D.** $24a^4b^{-5}$

Lời giải

Đáp án B.

Theo công thức tổng quát ở lý thuyết thì ta có số hạng thứ 5 là

$C_7^4\left(a^2\right)^3\left(-\frac{1}{b}\right)^4 = 35a^6b^{-4}$.

Ví dụ 2. Trong khai triển $\left(2\sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right), (x > 0)$ số hạng không chứa x sau khi khai triển là

A. 4354560. **B.** 13440. **C.** 60466176. **D.** 20736.

Lời giải

Đáp án A.

Ta có $\left(2\sqrt[3]{x}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^{10}=\left(2.x^{\frac{1}{3}}-3.x^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$

Từ lý thuyết ở trên ta có số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là

$C_{10}^{k}.2^{10-k}.3^{k}.x^{\frac{10-k}{3}}.x^{-\frac{k}{2}}=C_{10}^{k}.2^{10-k}.3^{k}.x^{\frac{20-5k}{6}}$. Theo yêu cầu đề bài ta có $20-5k=0\Leftrightarrow k=4$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $C_{10}^{4}.2^{6}.3^{4}=210.256.81=435460.$

STUDY TIP

Trong các bài toán tìm số hạng trong khi khai triển các nhị thức, ta chú ý các công thức sau

$$\left(x^{m}\right)^{n}=x^{m.n},\ x^{m}.x^{n}=x^{m+n}$$

$$\frac{x^{m}}{x^{n}}=x^{m-n},\ \sqrt[n]{x^{m}}=x^{\frac{m}{n}}$$

Cho bài toán:

Cho nhị thức $P=\left[a(x)+b(x)\right]^{n}$ tìm số hạng chứa x^{α} (không chứa x khi $\alpha=0$) trong khai triển đa thức P.

- Giải phương trình tổ hợp hoặc sử dụng công thức tính tổng để tìm n (nếu giả thuyết chưa cho n).
- Số hạng tổng quát trong khai triển $T_{k+1}=g(n,k).x^{f(n,k)}$.
- Theo đề thì $f(n,k)=\alpha\Rightarrow k=k_0$. Thay $k=k_0$ vào $g(n,k)$ thì ta có số hạng cần tìm.

Ví dụ 3. Cho n là số dương thỏa mãn $5C_{n}^{n-1}=C_{n}^{3}$. Số hạng chứa x^{5} trong khai triển nhị thức Newton $P=\left(\dfrac{nx^{2}}{14}-\dfrac{1}{x}\right)^{n}$ với $x\neq 0$ là

A. $-\dfrac{35}{16}$. **B.** $-\dfrac{16}{35}$. **C.** $-\dfrac{35}{16}x^{5}$. **D.** $-\dfrac{16}{35}x^{5}$.

Lời giải

Đáp án C.

Điều kiện $n\in\mathbb{N},\ n\geq 3.$

Ta có $5C_{n}^{n-1}=C_{n}^{3}\Leftrightarrow\dfrac{5.n!}{1!.(n-1)!}=\dfrac{n!}{3!.(n-3)!}\Leftrightarrow\dfrac{5}{(n-3)!(n-2)(n-1)}=\dfrac{1}{6.(n-3)!}$

$$\Leftrightarrow n^{2}-3n-28=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=7\ (TM)\\ n=-4\ (L)\end{array}\right.$$

Với $n=7$ ta có $P=\left(\dfrac{x^{2}}{2}-\dfrac{1}{x}\right)^{7}$

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1}=\dfrac{(-1)^{k}}{2^{7-k}}.C_{7}^{k}.x^{14-3k}$

Suy ra $14-3k=5 \Leftrightarrow k=3$

Vậy số hạng chứa x^5 trong khai triển là $T_4=-\frac{35}{16}x^5$.

STUDY TIP

Chú ý phân biệt giữa hệ số và số hạng.

Với $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^{g(k)}$; Số hạng chứa x^α tương ứng với $g(k)=\alpha$; giải phương trình ta tìm được k.

∗ Nếu $k \in \mathbb{N}$; $k \le n$ thì hệ số phải tìm là a_k.

∗ Nếu $k \notin \mathbb{N}$ hoặc $k>n$ thì trong khai triển không có số hạng chứa x^α, hệ số phải tìm bằng 0.

Ví dụ 4. Trong khai triển biểu thức $F=\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^9$ số hạng nguyên có giá trị lớn nhất là

A. 8. **B.** 4536. **C.** 4528. **D.** 4520.

Lời giải

Đáp án B.

Ta có số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_9^k\left(\sqrt{3}\right)^{9-k}\left(\sqrt[3]{2}\right)^k$

Ta thấy bậc hai của căn thức là 2 và 3 là hai số nguyên tố, do đó để T_{k+1} là một số nguyên thì

$$\begin{cases} k\in\mathbb{N} \\ 0\le k\le 9 \\ (9-k)\,\vdots\,2 \\ k\,\vdots\,3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=3 \Rightarrow T_4=C_9^3\left(\sqrt{3}\right)^6\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=4536 \\ k=9 \Rightarrow T_{10}=C_9^9\left(\sqrt{3}\right)^0\left(\sqrt[3]{2}\right)^9=8 \end{array}\right.$$

Vậy trong khai triển có hai số hạng nguyên là $T_4=4536$ và $T_{10}=8$.

Ví dụ 5. Tìm hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển đa thức $P(x)=(2x+1)^{13}=a_0x^{13}+a_1x^{12}+...+a^{13}$.

A. 8. **B.** 4536. **C.** 4528. **D.** 4520.

Lời giải

Đáp án A.

Ta có số hạng tổng quát sau khi khai triển nhị thức $(2x+1)^{13}$ là $a_n=C_{13}^n.2^{13-n}$.

$\Rightarrow a_{n-1}=C_{13}^{n-1}.2^{14-n}$, $(n=1,2,3,...,13)$

Xét bất phương trình với ẩn số n ta có $a_{n-1}\le a_n \Leftrightarrow C_{13}^{n-1}.2^{14-n}\le C_n^{13}.2^{13-n}$

$$\Leftrightarrow \frac{2.13!}{(n-1)!(14-n)!}\le\frac{13!}{n!(13-n)!}\Leftrightarrow\frac{2}{14-n}\le\frac{1}{n}\Leftrightarrow n\le\frac{14}{3}\notin\mathbb{N}.$$

Do đó bất đẳng thức $a_{n-1}\le a_n$ đúng với $n\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ và dấu đẳng thức không không xảy ra.

Ta được $a_0<a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ và $a_4>a_5>a_6>...>a_{13}$

Từ đây ta có hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển nhị thức là

$a_4 = C_{13}^4.2^9 = 366080.$

Phương pháp giải

Giả sử sau khi khai triển ta được đa thức $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

Xét các khả năng sau:

1. Nếu $a_k > 0 \forall k$ (trường hợp $a_k < 0 \forall k$ tương tự)

Ta xét bất phương trình $a_k \le a_{k+1}$, thông thường giải ra được nghiệm $k \le k_0 \in \mathbb{N}$. Do k nguyên nên $k = 0,1,...,k_0$. Từ đó suy ra bất phương trình $a_k > a_{k+1}$ có nghiệm $k > k_0$.

Chú ý rằng trong các bài toán về nhị thứ Newton thì phương trình $a_k = a_{k+1}$ là bậc nhất theo k nên có nhiều nhất một nghiệm và nếu có thì phương trình đó là $k = k_0$. Như vậy có hai khả năng xảy:

Nếu $a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = k_0$ thì ta có: $a_0 < a_1 < ... < a_{k_0-1} < a_{k_0} = a_{k_0+1} > a_{k_0+2} > ... > a_n$

Khi đó ta tìm được hai hệ số lớn nhất là $a_{k_0} = a_{k_0+1}$

Nếu phương trình $a_k = a_{k+1}$ vô nghiệm thì ta có:

$a_0 < a_1 < ... < a_{k_0-1} < a_{k_0} > a_{k_0+1} > a_{k_0+2} > ... > a_n$.

Khi đó ta có a_{k_0} là hệ số lớn nhất trong khai triển của nhị thức.

2. Nếu $a_{2k} > 0 \forall k$ và $a_{2k+1} < 0 \forall k$ (trường hợp $a_{2k} < 0 \forall k$ và $a_{2k+1} > 0 \forall k$ tương tự) thì khi đó bài toán trở thành tìm số lớn nhất trong các số a_{2k}. Ta cũng xét bất phương trình $a_{2k} \le a_{2k+2}$ rồi làm tương tự như phần 1.

STUDY TIP

Phương pháp tìm hệ số lớn nhất trong khai triển

+ Áp dụng khai triển $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

+ Xác định số hạng tổng quát $C_n^k a^{n-k} b^k$ suy ra hệ số tổng quát là một dãy số theo a_k.

+ Xét tính tăng giảm của a_k từ đó tìm được k tương ứng. Suy ra hệ số lớn nhất trong khai triển.

✷Đọc thêm

Một thuật toán khai triển nhanh tam thức Newton

Bài toán: khai triển tam thức Newton sau $(a+b+c)^n$

Lời giải tổng quát

Bước 1: Viết tam giác Pascal đến dòng thứ n, để có được hệ số của nhị thức Newton $(b+c)^n$.

Bước 2: Ở các đầu dòng ta viết các đơn thức là khai triển nhị thức Newton $(a+1)^n$.

Bước 3: Nhân lần lượt các đơn thức ở đầu dòng mỗi cột với các đơn thức còn lại trên mỗi dòng đó rồi cộng các kết quả lại, ta thu được kết quả khai triển.

Cụ thể ta có ở dưới đây

$$\begin{array}{lllllllll}
1.a^n & & & & 1 & & & & \\
C_n^1.a^{n-1} & & & 1b & & 1c & & & \\
C_n^2.a^{n-2} & & 1b^2 & & 2bc & & 1c^2 & & \\
C_n^1.a^{n-3} & 1b^2 & & 3b^2c & & 3bc^2 & & 1c^2 & \\
 & & & & \ldots & & & & \\
1.a^o & 1.b^n & C_n^1.b^{n-1}.c & & \ldots & & C_n^{n-1}.b.c^{n-1} & & 1.c^n
\end{array}$$

Sau khi cộng lại ta được:

$$\left(a+b+c\right)^n=\sum_{p=0}^{n}C_n^p.a^{n-p}.(\sum_{q=0}^{n}C_p^q.b^{n-q}.c^q)=\sum_{0\le q\le p\le n}C_n^p.C_p^q.b^{n-q}.c^q.a^{n-p}$$

STUDY TIP

Sau khi khai triển $\left(a+b+c\right)^n$ với $0\le q\le p\le n$ số hạng thứ $p+1$ trong khai triển là $T_p=C_n^p.C_p^q.b^{n-q}.c^q.a^{n-p}$.

Ví dụ 6. Hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $P(x)=\left(3x^2+x+1\right)^{10}$ là:

A. 1695. **B.** 1485. **C.** 405. **D.** 360.

Đáp án A.

Lời giải

Với $0\le q\le p\le 10$ thì số hạng tổng quát của khai triển $P(x)=\left(3x^2+x+1\right)^{10}$ là:

$$T_p=C_{10}^p.C_p^q.(3x^2)^{10-p}.(x)^{p-q}.1^q=C_{10}^p.C_p^q.3^{10-p}.(x)^{p-q+20-2p}$$

Theo đề bài thì $p-q+20-2p=4\Leftrightarrow p+q=16$

Do $0\le q\le p\le 10$ nên $(p;q)\in\{(8;8);(9;7);(10;6)\}$.

Vậy hệ số của x^4 trong khai triển $P(x)=\left(3x^2+x+1\right)^{10}$ là:

$$C_{10}^8.C_8^8.3^{10-8}+C_{10}^9.C_9^7.3^{10-9}+C_{10}^{10}.C_{10}^6.3^{10-10}=1695.$$

STUDY TIP

Chú ý khi ra nhiều trường hợp của (p,q) thì ta công hệ số các trường hợp với nhau để có kết quả.

Ví dụ 7. Tìm số hạng chứa x^{13} trong khai triển thành các đa thức của $\left(x+x^2+x^3\right)^{10}$ là:

A. 135. **B.** 45. **C.** $135x^{13}$. **D.** $45x^{13}$.

Đáp án C.

Lời giải

Với $0\le q\le p\le 10$ thì số hạng tổng quát của khai triển $\left(x+x^2+x^3\right)^{10}$ là:

$$T_p=C_{10}^p.C_p^q.(x)^{10-p}.(x^2)^{p-q}.(x^3)^q=C_{10}^p.C_p^q.3^{10-p}.(x)^{10+p+q}$$

Theo đề bài thì $10+p+q=13\Leftrightarrow p+q=3$

Do $0\le q\le p\le 10$ nên $(p;q)\in\left\{(2;1);(3;0)\right\}$.

Vậy hệ số của x^{13} trong khai triển là: $C_{10}^2.C_2^1+C_{10}^3.C_3^0=210$.

Dạng 2: Các bài toán về công thức tổ hợp và nhị thức Newton

Các bài toán về công thức tổ hợp và nhị thức Newton

Một số công thức thường dùng trong các bài tập dạng này như sau:

$C_n^k=C_n^{n-k}$ $\quad$ $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1},\ (n>1)$

$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}\quad (*)$ $\quad$ $\dfrac{1}{k+1}C_n^k=\dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

$2^n=C_n^0+C_n^1+...+C_n^n$ $\quad$ $2^{n-1}=C_n^0+C_n^2+C_n^4...+C_n^{2\left[\frac{n}{2}\right]}$

$2^{n-1}=C_n^1+C_n^3+C_n^5...+C_n^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}$

STUDY TIP

Ngoài ra từ công thức $(*)$ ta mở rộng được công thức:

$C_n^k+2C_n^{k+1}+C_n^{k+2}=C_{n+2}^{k+2}$

$C_n^k+3C_n^{k+1}+3C_n^{k+2}+C_n^{k+3}=C_{n+3}^{k+3}$

Ví dụ 1. Cho $n;k\in\mathbb{N}^*,k\le n$ trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào **sai?**

A. $C_n^k=\dfrac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}..$ $\quad$ **B.** $\dfrac{1}{k+1}C_n^k=\dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}..$

C. $C_n^k=C_n^{n-k}..$ $\quad$ **D.** $nC_n^k=kC_{n-1}^{k-1}$.

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: **Giải theo phương pháp tự luận**

Với A: Ta có $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n}{k}\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\dfrac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$

Từ A ta suy ra $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$, từ đây ta có luôn D sai. Ta chọn D.

Đọc thêm: Chứng minh B; C.

Với B: $\dfrac{1}{k+1}C_n^k=\dfrac{n!}{(k+1)(n-k)!k!}=\dfrac{(n+1)!}{(n+1)(n-k)!(k+1)!}=\dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

Với C: Ta có $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\text{k}!} = C_n^{n-k}$

Cách 2: **Sử dụng máy tính để thử**

Với các bài toán xét đẳng thức đúng thi ta có thể sử dụng máy tính để thử. Ta thử với từng trường hợp, thử với cặp số cụ thể.

Ví dụ với A ta thử ngay với $k=3;n=4$ ta thấy đẳng thức này đúng, suy ra A đúng, từ đây suy ra D sai.

Math ▲

$4C3 - \dfrac{4}{3} \times 3C2$

STUDY TIP

Đẳng thức ở phương án A là một đẳng thức quan trọng trong các bài toán về công thức tổ hợp Ta có hai hệ quả quan trọng như sau:

Với mọi $n;k \in \mathbb{N}^*, 2 \le k \le n$

- **Hệ quả 1:** Ta có
  $(k-1)kC_n^k = (n-1)nC_{n-2}^{k-2}$
- **Hệ quả 2:** Ta có
  $k^2C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$

Ví dụ 2. Cho $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $6n - 6 + C_n^3 \ge C_{n+1}^3$, Số các số n thỏa mãn là:.

A. 10 số. **B.** 9 số. **C.** 8 số. **D.** 7 số.

Đáp án A.

Lời giải

Điều kiện $n \ge 3$. Ta có $6n - 6 + C_n^3 \ge C_{n+1}^3 \Leftrightarrow 6n - 6 \ge C_n^2 \left(do\, C_{n+1}^3 = C_n^3 + C_n^{32}\right)$

$$\Leftrightarrow 6n - 6 \ge \frac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow n^2 - 13n + 12 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le n \le 12.$$

Ví dụ 3. Cho $S = C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^{10} + ... + C_{15}^{15}$. Tính S.

A. $S = 2^{15}$. **B.** $S = 2^{14}$. **C.** $S = 2^{13}$. **D.** $S = 2^{12}$.

Đáp án B

Lời giải

Cách 1: Sử dụng đẳng thức $C_n^k = C_n^{n-k}$ ta được:

$S = C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^{10} + ... + C_{15}^{15} = C_{15}^7 + C_{15}^6 + C_{15}^5 + ... + C_{15}^0.$

$$\Rightarrow 2S = (C_{15}^{8} + C_{15}^{9} + C_{15}^{10} + ... + C_{15}^{15}) + (C_{15}^{7} + C_{15}^{6} + C_{15}^{5} + ... + C_{15}^{0}) = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^{k} = 2^{15}$$

$$\Rightarrow S = 2^{14}$$

Vậy $S = (C_{15}^{8} + C_{15}^{9} + C_{15}^{10} + ... + C_{15}^{15}) = 2^{14}$

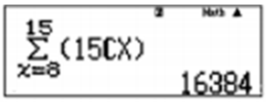
Cách 2: Sử dụng máy tính Casio

Do bài toán này, tổng bé và số các số hạng trong tổng ít nên ta có sử dụng lệnh tổng trong máy tính Caiso bằng cách bấm máy: $SHIFT\ LOG_{\square}\square(\sum_{\square}^{\square}\square)$.

Ta nhập $SHIFT\ LOG_{\square}15\ SHIFT \div alpha\,)\nabla 8 \Delta 15 =$

STUDY TIP

Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.



Với các bài toán tính tổng ở trên ta cần chú ý kỹ thuật sử dụng các đẳng thức cơ bản sau:

$C_n^k = C_n^{n-k}, C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$ và các hệ quả: $\begin{cases} k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} \\ k^2 C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1} \end{cases}$

Đẳng thức Pascal: $C_m^k = C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1}$

$$\begin{cases} C_m^0 - C_m^1 + C_m^2 - ... + (-1)^{m-1} C_m^{m-1} + (-1)^m C_m^m = (-1+1)^m = 0 \\ C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + ... + C_m^{m-1} + C_m^m = (1+1)^m = 2^m \end{cases}$$

Xét $m = 2n$: $\begin{cases} C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - ... + (-1)^{2n-1} C_{2n}^{2n-1} + (-1)^{2n} C_{2n}^{2n} = (-1+1)^m = 0 \\ C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = (1+1)^{2n} = 2^{2n} \end{cases}$

Cộng vế theo vế, trừ vế theo vế, ta được kết quả sau:

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + ... + C_{2n}^{2n-2} + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + ... + C_{2n}^{2n-3} + C_{2n}^{2n-1} = 2^{n-1}$$

Xét *m* = *2n* + *1*, hoàn toàn tương tự, ta được:

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+!}^4 + ... + C_{2n+1}^{2n} = C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n}$$

Ví dụ 4. Trong các đẳng thức sau đẳng thức nào sai?

A. $S_1 = 1C_n^1 + 2C_n^2 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = n2^{n-1}$.

B. $S_2 = 1.2.C_n^1 + 2.3.C_n^2 + ... + (n-1).n.C_n^n = (n-1).n.C_{n-2}^{k-2}$.

C. $S_3 = 1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + ... + (n-1)^2 C_n^{n-1} + n^2 C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$.

D. $S_4 = \frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + ... + \frac{C_n^{n-1}}{n} + \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}(2^n - 1)$.

Đáp án D.

Lời giải

Ta có thể sử dụng máy tính để thử trường hợp riêng của đẳng thức trên, tôi xin phép không đưa cách làm cụ thể vì độc giả có thể dễ dàng giải được.

Tôi xin giới thiệu cách chứng minh cụ thể như sau:

Với A: Ta sẽ dùng đẳng thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

Khi đó ta có:

$$S_1 = 1C_n^1 + 2C_n^2 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} = n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + ... + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) = n(1+1)^{n-1} = n.2^{n-1}$$

Vậy A đúng.

Với B: Ta sẽ dùng đẳng thức $(k-1)kC_n^k = (n-1)nC_{n-1}^{k-1}$.

Khi đó ta có:

$$S_2 = 1.2C_n^1 + 2.3C_n^2 + ... + (n-1).nC_n^{n-1} = \sum_{k=2}^{n}(k-1)kC_n^k = \sum_{k=2}^{n}(n-1)nC_{n-2}^{k-2}$$

$$= (n-1)n(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + ... + C_{n-2}^{n-3} + C_{n-2}^{n-2}) = (n-1)n.2^{n-2}$$

Vậy B đúng.

Với C: Ta có $k^2C_n^k = (n-1)nC_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$.

Khi đó ta có: $S_3 = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 \ldots + (n-1)^2 C_n^{n-1} + n^2C_n^n$.

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2C_n^k = \sum_{k=1}^{n}\left[(n-1)nC_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}\right].$$

$$= (n-1)n\left(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-2}^2 + ... + C_{n-2}^{n-3} + C_{n-2}^{n-2}\right) + n\left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + ... + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}\right).$$

$$= (n-1)n2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}..$$

Vậy C đúng.

Từ đây ta chọn ***D.***

Đọc thêm tính tổng S_4*:* Các số hạng của S_4 có dạng $\frac{C_n^k}{k+1}$ nên ta sẽ dùng đẳng thức $\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$.

Khi đó ta có: $S_4 = \frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + ... + \frac{C_n^{n-1}}{n} + \frac{C_n^n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$.

$$= \frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + ... + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - C_{n+1}^0\right) = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right).$$

STUDY TIP.

* Các số hạng của S_3 có dạng $k^2C_n^k$ nên ta dùng đẳng thức $k^2C_n^k = (n-1)nC_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$.

* Các số hạng của S_4 có dạng $\frac{C_n^k}{k+1}$ nên ta sẽ dùng đẳng thức $\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$.

Ví dụ 5. Một học sinh giải bài toán "Rút gọn biểu thức $S_k=C_n^0-C_n^1+C_n^2+...+(-1)^k C_n^k$ với $k\le n;\ n>1$." Như sau:

Bước 1: Ta áp dụng công thức $C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k+1}=C_n^{k+1}$.

$S_k=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3...+(-1)^k C_n^k$.

$=C_n^0-\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1\right)+\left(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2\right)-\left(C_{n-1}^2+C_{n-1}^3\right)+...+(-1)^k\left(C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k\right)$.

Bước 2: Mở dấu ngoặc ta có:

$S_k=C_n^0-C_{n-1}^0-C_{n-1}^1+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2-C_{n-1}^2-C_{n-1}^3+(-1)^k C_{n-1}^{k-1}+(-1)^k C_{n-1}^k$.

Bước 3: Vậy với mọi k thì $S_k=(-1)^k C_{n-1}^k$.

Kết luận nào sau đây là đúng:

A. Lời giải trên sai từ bước 1.
B. Lời giải trên sai từ bước 2.
C. Lời giải trên sai ở bước 3.
D. Lời giải trên đúng.

Đáp án A.

Lời giải.

Ta thấy lời giải trên sai khi đã không xét hai trường hợp $k<n$; hoặc $k=n$.

Vì nếu $k=n$ thì không tồn tại C_{n-1}^k.

Rất nhiều học sinh mắc sai lầm khi giải như trên, hoặc sai lầm khi giải như sau:

$S_k=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3...+(-1)^k C_n^k=(1-1)^n=0$.

Ta có lời giải đúng như sau:

TH1: Với $k<n$, ta áp dụng công thức $C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k+1}=C_n^{k+1}$, ta có:

$S_k=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3...+(-1)^k C_n^k=(1-1)^n=0$.

$=C_n^0-\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1\right)+\left(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2\right)-\left(C_{n-1}^2+C_{n-1}^3\right)+...+(-1)^k\left(C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k\right)$.

$=C_n^0-C_{n-1}^0-C_{n-1}^1+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2-C_{n-1}^2-C_{n-1}^3+...+(-1)^k C_{n-1}^{k-1}+(-1)^k C_{n-1}^k$.

Vậy $S_k=(-1)^k C_{n-1}^k$ khi $k<n$.

TH2: Với $k=n$, thì $S_k=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3...+(-1)^k C_n^k=(1-1)^n=0$.

STUDY TIP.

Trong các bài toán mà các số k, n tổng quát ta cần lưu ý phân rõ trường hợp $k<n$ và $k=n$.

Ví dụ 6. Tính tổng $S=1.C_{2018}^1+2.C_{2018}^2+3.C_{2018}^3+\ldots+2018.C_{2018}^{2018}$

A. 2018.2^{2017}.
B. 2017.2^{2018}.
C. 2018.2^{2018}.
D. 2017.2^{2017}.

Đáp án A.

Lời giải.

Cách 1: Xét số hạng tổng quát.

$$k.C_{2018}^{k}=k.\frac{2018!}{k!\left(2018-k\right)!}=k.\frac{2018.2017!}{k.\left(k-1\right)!\ \left(2018-k\right)!}=2018.C_{2017}^{k-1}.$$

Cho k chạy từ 1 đến 2018 ta được:

$S=2108.C_{2017}^{0}+C_{2017}^{1}+\ldots+C_{2017}^{2017}=2018.2^{2017}$.

STUDY TIP.

Với các bài toán tính tổng thường sử dụng công thức $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$.

Cách 2: Khi các em học đạo hàm ở cuối chương trình lớp 11 ta sẽ nghiên cứu ở chương đạo hàm. Khi đó ta xét hàm số:.

$f\left(x\right)=\left(1+x\right)^{2018}=C_{2018}^{0}+C_{2018}^{1}x+...+C_{2018}^{2018}x^{2018}$.

$\Rightarrow f'\left(x\right)=2018.\left(1+x\right)^{2017}=C_{2018}^{1}+2C_{2018}^{2}x+...+2018.C_{2018}^{2018}x^{2017}$.

$\Rightarrow f'\left(1\right)=2018.2^{2017}=C_{2018}^{1}+2C_{2018}^{2}+...+2018.C_{2018}^{2018}$.

$\Rightarrow 2018.2^{2017}=S\Rightarrow$ ta chọn **A.**

Ví dụ 7. Tính tổng $S=C_{2017}^{0}+\frac{1}{2}C_{2017}^{1}+\frac{1}{3}C_{2017}^{2}+...+\frac{1}{2018}C_{2017}^{2017}$

A. $\frac{2^{2017}-1}{2017}$. **B.** $\frac{2^{2018}-1}{2018}$. **C.** $\frac{2^{2018}-1}{2017}$. **D.** $\frac{2^{2017}-1}{2018}$.

Đáp án B.

Lời giải.

Cách 1: Xét số hạng tổng quát $\frac{1}{k+1}C_{2017}^{k}$, ta có:.

$$\frac{1}{k+1}C_{2017}^{k}=\frac{1}{1+k}\frac{2017!}{k!\left(2017-k\right)!}=\frac{1}{2018}\frac{2018!}{\left(k+1\right)!\left(2017-k\right)!}=\frac{1}{2018}C_{2018}^{k+1}.$$

Vậy $\frac{1}{k+1}C_{2017}^{k}=\frac{1}{2018}C_{2018}^{k+1}$, cho k chạy từ 0 đến 2017 thì ta được:.

$$S=\frac{1}{2018}\left[C_{2018}^{0}+C_{2018}^{1}+C_{2018}^{2}+...+C_{2018}^{2018}\right]-\frac{C_{2018}^{0}}{2018}=\frac{1}{2018}2^{2018}-\frac{1}{2018}=\frac{2^{2018}-1}{2018}..$$

Cách 2: Sử dụng tích phân (các em sẽ học ở chương trình lớp 12).

Xét $f\left(x\right)=\left(1+x\right)^{2017}=C_{2017}^{0}+C_{2017}^{1}x+C_{2017}^{2}x^2+...+C_{2017}^{2017}x^{2017}$.

$$\Rightarrow\int_0^1\left(1+x\right)^{2017}\mathrm{d}x=\int_0^1\left[C_{2017}^{0}+C_{2017}^{1}x+C_{2017}^{2}x^2+...+C_{2017}^{2017}x^{2017}\right]\mathrm{d}x.$$

$$\Leftrightarrow\left.\frac{\left(1+x\right)^{2018}}{2018}\right|_0^1=\left.\left[C_{2017}^{0}x+\frac{1}{2}C_{2017}^{1}x^2+\frac{1}{3}C_{2017}^{2}x^3+...+\frac{1}{2018}C_{2017}^{2017}x^{2018}\right]\right|_0^1.$$

$\Leftrightarrow\frac{2^{2018}-1}{2018}=S$. Chọn **B.**

Ví dụ 8. ***(đọc thêm)**: Cho hai đẳng thức sau với $n>1;\ n\in\mathbb{N}$.

$$S_1=C_n^0-2C_n^1+3C_n^2-...+(-1)^n(n+1)C_n^n=0,\ (1)$$

$$S_2=C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1},\ (2).$$

Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng.

A. (1) đúng, (2) sai. **B.** (1) sai, (2) đúng.

C. Cả hai đều sai. **D.** Cả hai đều đúng.

Đáp án D.

Lời giải.

Ta có thể sử dụng máy tính để thử trường hợp riêng của các đẳng thức trên, tôi xin phép không đưa ra cách làm cụ thể vì độc giả có thể dễ dàng thử được.

Dưới đây tôi xin giới thiệu hai phương pháp tính tổng sử dụng đạo hàm và tích phân ta học cuối chương trình 11 và đầu chương trình 12.

STUDY TIP.

Có thể tính tổng.

$$S_1=C_n^0+2aC_n^1+...+(n+1)a^nC_n^n$$

$$S_2=C_{2n}^0+3a^2C_{2n}^2+...+(2n+1)a^{2n}C_{2n}^{2n}.$$

$$S_3=2aC_{2n}^1+4a^3C_{2n}^3+6a^4C_{2n}^4+...+2na^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}$$

khi xét đa thức $P(x)=x(1+x)^n$ và chứng tỏ rằng $S_1=P'(a)$.

Xét đa thức $Q(x)=x(1+x)^{2n}$ và chứng tỏ rằng.

$$2S_2=Q'(a)+Q'(-a);$$

$$2S_3=Q'(a)-Q'(-a).$$

Ta có thể giải thích cụ thể như sau:

*** Với S_1:**

Ta khai triển đa thức $P(x)=x(1+x)^n$.

$P(x)=C_n^0x+C_n^1x^2+C_n^2x^3+...+C_n^nx^{n+1}$, nên.

$$P'(x)=C_n^0+2C_n^1x+3C_n^2x^2+...+(n+1)C_n^nx^n;$$

$$P'(-1)=C_n^0-2C_n^1+3C_n^2-...+(-1)^n(n+1)C_n^n=S_1.$$

Mặt khác $P'(x)=(1+x)^n+nx(1+x)^{n-1}\Rightarrow P'(-1)=0.$

Vậy $S_1=0$.

*** Với S_2:**

Xét đa thức $P(x)=(1+x)^n$, ta có: $P(x)=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$.

Suy ra $\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = S_2$.

Do đó $S_2 = \int_0^1 (1+x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

STUDY TIP.

Có thể tính tổng: $S = (b-a)C_n^0 + \frac{b^2-a^2}{2}C_n^1 + \frac{b^3-a^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}C_n^n$ khi xét đa thức: $P(x) = (1+x)^n$ và chứng tỏ rằng $S = \int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x$.

Ta thường gặp bài toán với một trong 2 cận của tích phân là 0 và 1, hoặc -1. Trong một số trường hợp ta phải xét đa thức $P(x) = x^k(1+x)^n$ với $k = 1, 2, \dots$

Dạng 3. Phương trình, bất phương trình chứa công thức tổ hợp.

Ví dụ 1. Cho phương trình $A_x^3 + 2C_{x+1}^{x-1} - 3C_{x-1}^{x-3} = 3x^2 + P_6 + 159$. Giả sử $x = x_0$ là nghiệm của phương trình trên, lúc này ta có

A. $x_0 \in (10;\ 13)$. **B.** $x_0 \in (12;\ 14)$. **C.** $x_0 \in (10;\ 12)$. **D.** $x_0 \in (14;\ 16)$.

Đáp án A.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3, x \in \mathbb{N}$. Phương trình đã cho có dạng:.

$$\frac{x!}{(x-3)!} + \frac{2(x+1)!}{2!(x-1)!} - \frac{3(x-1)!}{2!(x-3)!} = 3x^2 + 6! + 159.$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2) + x(x+1) - \frac{3}{2}(x-1)(x-2) = 3x^2 + 879.$$

$\Leftrightarrow x = 12$ (sử dụng lệnh SHIFT SOLVE trên máy tính).

STUDY TIP.

Khi sử dụng lệnh SHIFT SOLVE ta nên rút gọn phương trình về đa thức, không nên để dạng phân thức vì máy tính ưu tiên sử lý các dạng phương trình không chứa phân thức trước.

Ví dụ 2. Bất phương trình $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}.C_x^3 + 10$ có tập nghiệm là:

A. $S = [3;\ 5]$. **B.** $S = [3;\ 4]$. **C.** $S = \{3;\ 4;\ 5\}$. **D.** $S = \{3;\ 4\}$.

Đáp án D.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3, x \in \mathbb{N}$.

Ta có bất phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{2x!}{(2x-2)!} - \frac{x!}{(x-2)!} \leq \frac{6}{x}\frac{x!}{3!(x-3)!} + 10$.

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - x^2 + x \leq x^2 - 3x + 2 + 10.$$

$\Leftrightarrow 3x \le 12 \Leftrightarrow x \le 4.$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta có $3 \le x \le 4$. Vậy $S = \{3;\ 4\}$ là tập nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 3. Tổng của ba số hạng liên tiếp lập thành cấp số cộng trong dãy số sau $C_{23}^{0}; C_{23}^{1}; \ldots; C_{23}^{13}$ có giá trị là

A. 2451570. **B.** 3848222. **C.** 836418. **D.** 1307527.

Đáp án A.

Lời giải.

Giả sử 3 số $C_{23}^{n}; C_{23}^{n+1}; C_{23}^{n+2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $2C_{23}^{n+1} = C_{23}^{n} + C_{23}^{n+2}$.

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1} = C_{23}^{n} + C_{23}^{n+2}\\ &\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1} = C_{25}^{n+2}\end{aligned}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{4.23!}{(n+1)!(22-n)!} = \frac{25!}{(n+2)!(23-n)!}.$$

$$\Rightarrow (n+2)(23-n) = 150 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 8\ (tm) \\ n = 13\ (l) \end{array}\right..$$

Vậy $C_{23}^{8} + C_{23}^{9} + C_{23}^{10} = 2451570$.

STUDY TIP.

Một số tình huống thường gặp thì lập phương trình tổ hợp là:.

* Ba số a, b, c lập thành cấp số cộng (hoặc cấp số nhân) khi và chỉ khi $2b = a + c$ (hoặc $b^2 = ac$).

* Cho tập hợp A có n phần tử, số tập con của A gồm x phần tử bằng k lần số tập con của A gồm y phần tử, tương ứng với phương trình $C_n^x = kC_n^y$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Trong khai triển nhị thức Newton $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}} + \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$, số hạng có số mũ a và b bằng nhau là

A. C_{21}^{12}. **B.** $C_{21}^{12} a^{\frac{5}{2}} b^{\frac{5}{2}}$. **C.** $C_{21}^{9} a^{\frac{5}{2}} b^{\frac{5}{2}}$. **D.** C_{21}^{9}.

Câu 2. Khi khai triển nhị thức Newton $G(x) = (ax+1)^n$ thì ta thấy trong đó xuất hiện hai số hạng $24x$ và $252x^2$. Lúc này giá trị của a và n là

A. $a = 3; n = 8$. **B.** $a = 4; n = 6$.

C. $a = 2; n = 12$. **D.** $a = 3; n = 7$.

Câu 3. Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $(x+1)^{10}$ là

A. $C_{10}^{5} x^5$. **B.** $C_{10}^{6} x^5$. **C.** 252. **D.** 210.

Câu 4. Hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển $\left(\frac{4}{x}-3x^3\right)^{15}$ là

A. $3^6C_{15}^9x^9$. **B.** $3^62^{18}C_{15}^9x^9$.

C. $3^6C_{15}^9$. **D.** $3^62^{18}C_{15}^9$.

Câu 5. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$ là

A. $2^6C_{20}^6$. **B.** 2^8. **C.** $2^8C_{20}^8$. **D.** 2^6.

Câu 6. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2+\frac{1}{x}-1\right)^{10}$ là

A. 1951. **B.** 1950. **C.** 3150. **D.** -360.

Câu 7. Số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(x^3-x^2-1\right)^8$ là

A. $168x^8$. **B.** 168. **C.** $238x^8$. **D.** 238.

Câu 8. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1+C_n^3=13n.$

A. C_{10}^6. **B.** C_{10}^5. **C.** C_{10}^{10}. **D.** C_{10}^3.

Câu 9. Giả sử có khai triển $(1-2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$. Tìm a_5 biết $a_0+a_1+a_2=71$.

A. $672x^5$. **B.** -672. **C.** $-672x^5$. **D.** 672.

Câu 10. Hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức $(x+2)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn $3^nC_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2-...+(-1)^nC_n^n=2048.$

A. $22x^{10}$. **B.** $123x^{10}$. **C.** 123. **D.** 22.

Câu 11. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^n$ biết $n\geq 2$ là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^2-C_{n+1}^{n-2}=14-14n.$

A. 73789. **B.** 73788. **C.** 72864. **D.** 56232.

Câu 12. Cho khai triển: $\left(1+x+x^2\right)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}, n\geq 2$ với $a_0,a_1,a_2,...,a_{2n}$ là các hệ số. Tính tổng $S=a_0+a_1+a_2+...+a_{2n}$ biết $\frac{a_3}{14}=\frac{a_4}{41}$.

A. $S=3^{10}$. **B.** $S=3^{12}$. **C.** $S=2^{10}$. **D.** $S=2^{12}$.

Câu 13. Số lớn nhất trong các số $C_{16}^0;C_{16}^1;C_{16}^2;...;C_{16}^{15};C_{16}^{16}$ là

A. C_{16}^7. **B.** C_{16}^6. **C.** C_{16}^9. **D.** C_{16}^8.

Câu 14. Hệ số lớn nhất trong khai triển $(x+2)^{10}$ là

A. C_{10}^5. **B.** 128. **C.** 15360. **D.** C_{10}^3.

Câu 15. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^2-3C_n^{n-1}=11n.$

Xét khai triển $P(x)=(x+2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$. Hệ số lớn nhất của $P(x)$ là

A. $C_{15}^5.2^{11}$. **B.** $C_{15}^5.2^{10}$. **C.** 252. **D.** 129024.

Câu 16. Giả sử $P(x)=(2x+1)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ thỏa mãn $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+...+\frac{a_n}{2^n}=2^{12}$. Hệ số lớn nhất trong các hệ số $\{a_0,a_1,a_2,...,a_n\}$ là

A. 126720. **B.** 495. **C.** 256. **D.** 591360.

Câu 17. Cho khai triển $(x+2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$. Tìm tất cả các giá trị của n để $\max\{a_0,a_1,a_2,...,a_n\}=a_{10}$.

A. $\{29;30;31;32\}$. **B.** 12.

C. $\{12;13;14;15\}$. **D.** 16.

Câu 18. Cho n là số nguyên dương. Gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n(x+2)^n$. Tìm n sao cho $a_{3n-3}=26n$.

A. $n=10$. **B.** $n=3$. **C.** $n=4$. **D.** $n=5$.

Câu 19. Khi khai triển nhị thức Newton $G(x)=(ax+1)^n$ thì ta thấy trong đó xuất hiện hai số hạng $24x$ và $252x^2$. Tìm a và n.

A. $a=3;n=8$. **B.** $a=2;n=7$.

C. $a=4;n=9$. **D.** $a=5;n=10$.

Câu 20. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $\frac{C_n^1}{2}-\frac{2C_n^2}{2^2}+\frac{3C_n^3}{2^3}-...+(-1)^{n-2}\frac{(n-1)C_n^{n-1}}{2^{n-1}}+(-1)^{n-1}\frac{nC_n^n}{2^n}=\frac{1}{32}$

A. $n=10$. **B.** $n=9$. **C.** $n=8$. **D.** $n=7$.

Câu 21. Cho $S=1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+n(n+1)(n+2)$. Kết quả biểu diễn S theo n là

A. $S=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. **B.** $S=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

C. $S=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$. **D.** $S=n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Câu 22. Tính tổng $S=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n$ theo n ta được

A. $S=2^{n-1}-1$. **B.** $S=2^n-1$. **C.** $S=2^{n-1}$. **D.** $S=2^n$.

Câu 23. Giá trị của n thỏa mãn $C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+...+2^2C_n^n=243$. là

A. $n=7$. **B.** $n=3$. **C.** $n=5$. **D.** $n=4$.

Câu 24. Tính tổng $S=\frac{1}{2!2017!}+\frac{1}{4!2015!}+\frac{1}{6!2013!}+...+\frac{1}{2016!3!}+\frac{1}{2018!}$ theo n ta được

A. $S=\frac{2^{2018}-1}{2017!}$. **B.** $S=\frac{2^{2018}-1}{2017}$.

C. $S=\frac{2^{2018}}{2017!}$. **D.** $S=\frac{2^{2018}}{2017}$.

Câu 25. Cho số nguyên $n\geq 3$. Giả sử ta có khai triển $(x-1)^{2n}+x(x+1)^{2n-1}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}$. Biết $T=a_0+a_2+...+a_{2n}=768$. Tính a_5.

A. $126x^5$. **B.** $-126x^5$. **C.** 126. **D.** -126.

Câu 26. Tìm n sao cho $C_{2n}^1+C_{2n}^3+...C_{2n}^{2n-1}=2048$. là

A. $n=8$. **B.** $n=6$. **C.** $n=7$. **D.** $n=9$.

Câu 27. Cho khai triển $(1+2x)^{2014}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2014}x^{2014}$. Khi đó tổng $S=a_1+3^2a_3+...+3^{2010}a_{2011}+3^{2012}a_{2013}$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{7^{2014}-5^{2014}}{6}$. **B.** $\dfrac{7^{2014}-5^{2014}}{2}$.

C. $\dfrac{7^{2014}}{6}$. **D.** $\dfrac{5^{2014}}{2}$.

Câu 28. Tính tổng $S=C_{100}^0-5C_{100}^1+5^2C_{100}^2-...+5^{100}C_{100}^{100}$

A. 6^{100}. **B.** 4^{100}. **C.** 2^{300}. **D.** 3^{200}.

Câu 29. Đẳng thức nào sau đây **sai?**

A. $2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n$.

B. $0=C_n^0-C_n^1+C_n^2-...+(-1)^nC_n^n$.

C. $1=C_n^0-2C_n^1+4C_n^2-...+(-2)^nC_n^n$.

D. $3^n=C_n^0+2C_n^1+4C_n^2+...+2^nC_n^n$.

Câu 30. Khai triển $(2x+y)^5$ ta được kết quả là

A. $32x^5+16x^4y+8x^3y^2+4x^2y^3+2xy^4+y^5$.

B. $32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$.

C. $2x^5+10x^4y+20x^3y^2+20x^2y^3+10xy^4+y^5$.

D. $32x^5+10000x^4y+8000x^3y^2+400x^2y^3+10xy^4+y^5$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. **Đáp án B.**

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}=\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{6}}\right)^{21}=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^k\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}\right)^k\left(b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{6}}\right)^{21-k}=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^ka^{\frac{k}{3}-\frac{21-k}{6}}b^{-\frac{k}{6}+\frac{21-k}{2}}$$

Hệ số của số hạng có số mũ a và b bằng nhau ứng với: $\frac{k}{3}-\frac{21-k}{6}=-\frac{k}{6}+\frac{21-k}{2}\Leftrightarrow k=12$

Vậy số hạng cần tìm là $C_{21}^{12}a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}$.

Câu 2. **Đáp án A.**

Ta có $G(x)=(ax+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(ax)^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^kx^k$

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} C_n^1 ax = 24x \\ C_n^2 a^2 x^2 = 252x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} na = 24 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} a^2 = 252 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 a^2 = 576 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} a^2 = 252 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} na = 24 \\ \dfrac{2n^2}{n(n-1)} = \dfrac{16}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} na = 24 \\ 14n = 16(n-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \\ a = 3 \end{cases}$

Vậy $a = 3; n = 8$ là các số cần tìm.

Câu 3. **Đáp án C.**

Số hạng tổng quát sau khi khai triển $T_{k+1} = C_{10}^k x^k$

Số hạng chứa x^5 trong khai triển là $C_{10}^5 x^5$. Đề bài hỏi hệ số nên ta chọn C.

Câu 4. **Đáp án D.**

Ta có $\left(\dfrac{4}{x} - 3x^3\right)^{15} = \sum\limits_{k=0}^{15} C_{15}^k (ax)^k = \sum\limits_{k=0}^{15} C_{15}^k \left(\dfrac{4}{x}\right)^k \left(-3x^3\right)^{15-k} = \sum\limits_{k=0}^{15} (-3)^{15-k} 4^k C_{15}^k x^{45-4k}$

Số hạng chứa x^9 tương ứng với $45 - 4k = 9 \Leftrightarrow k = 9$ nên hệ số của x^9 trong khai triển trên là $(-3)^6 4^9 C_{15}^9 = 3^6 4^9 C_{15}^9$.

Câu 5. **Đáp án C.**

Ta có $\left(2\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20} = \sum\limits_{k=0}^{20} C_{20}^k \left(2\sqrt{x}\right)^k \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20-k} = \sum\limits_{k=0}^{20} 2^k C_{20}^k \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^k \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{20-k} = \sum\limits_{k=0}^{20} 2^k C_{20}^k x^{\frac{5k-40}{6}}$

Số hạng không chứa x tương ứng với $\dfrac{5k-40}{6} = 0 \Leftrightarrow k = 8$. Do vậy số hạng đó là $2^8 C_{20}^8$.

Câu 6. **Đáp án A.**

Từ lý thuyết ta có công thức tổng quát như sau: Với $0 \le q \le p \le n$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $\left(x^2 + \dfrac{1}{x} - 1\right)^{10}$ là $T_p = C_{10}^p C_p^q \left(x^2\right)^{10-p} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{p-q} (-1)^q = C_{10}^p C_p^q (-1)^q x^{20+q-3p}$

Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với $20 + q - 3p = 0 \Leftrightarrow 3p - q = 20$. Mà $0 \le q \le p \le n$ và $q, p, n \in \mathbb{N}$ nên $(p;q) \in \{(7;1),(8;4)(9;7),(10;10)\}$. Lúc này số hạng không chứa x trong khai triển là $(-1)^1 C_{10}^7 C_7^1 + (-1)^4 C_{10}^8 C_8^4 + (-1)^{10} C_{10}^{10} C_{10}^{10} + (-1)^7 C_{10}^9 C_9^7 = 1951$

Câu 7. **Đáp án C.**

Từ lý thuyết ta có công thức tổng quát như sau: Với $0 \le q \le p \le n$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $\left(x^3 - x^2 - 1\right)^8$ là $T_p = C_8^p C_p^q \left(x^3\right)^{8-p} \left(-x^2\right)^{p-q} (-1)^q = C_8^p C_p^q x^{24-3p} x^{2p-2q} (-1)^p$

Ta có: $24 - 3p + 2p - 2q = 8 \Leftrightarrow 24 - p - 2q = 8 \Leftrightarrow p + 2q = 16$. Suy ra $(p;q) \in \{(8;4)(6;5)\}$. Lúc này hệ số của x^8 trong khai triển là $C_8^8 C_8^4 (-1)^8 + C_{10}^6 C_6^5 (-1)^6 = 238$

Câu 8. **Đáp án A.**

Theo giả thiết ta có:

$C_n^1 + C_n^3 = 13n \Leftrightarrow n + \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = 13n \Leftrightarrow n + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = 13n \Leftrightarrow n(n^2 - 3n - 70) = 0 \Leftrightarrow n = 10$

Khi đó ta có $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^3}\right)^n = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^3}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(x^2\right)^k \left(\dfrac{1}{x^3}\right)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{5k-30}$

Số hạng không chứa x tương ứng với $5k - 30 = 0 \Leftrightarrow k = 6$. Vậy số hạng không chứa x trong khai triển đã cho là $C_{10}^6 = 210$.

Câu 9. **Đáp án B.**

Ta cần biết công thức tổng quát của a_k để thay vào điều kiện $a_0 + a_1 + a_2 = 71$, rồi sau đó giải ra để tìm n. Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = (1-2x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-2x)^k = \sum_{k=0}^{n} (-2)^k C_n^k x^k.$

Do đó $a_k = (-2)^k C_n^k, \forall k \in \{0,1,2,...,n\}$.. Khi đó theo giả thiết ta có

$71 = a_0 + a_1 + a_2 = (-2)^0 C_n^0 + (-2)^1 C_n^1 + (-2)^2 C_n^2 = 1 - 2n + 2n(n-1) \Leftrightarrow n^2 - 2n - 35 = 0 \Leftrightarrow n = 7.$

Như vậy $a_5 = (-2)^5 C_7^5 = -672$..

Câu 10. **Đáp án D.**

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 3^{n-k} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k 3^{n-k} = (-1+3)^n = 2^n.$

Do đó $2^n = 2048 = 2^{11} \Leftrightarrow n = 11$. Như vậy ta có $(x+2)^n = (x+2)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k x^k 2^{11-k}$, suy ra hệ số của x^{10} ứng với $k = 10$ và đó là số $C_{11}^{10}.2 = 22$

Câu 11. **Đáp án A.**

Ta có $A_n^2 - C_{n+1}^{n-2} = 14 - 14n \Leftrightarrow n(n-1) - \dfrac{(n-1)n(n+1)}{6} = 14 - 14\text{n}$

$\Leftrightarrow (n-1)\left[n - \dfrac{n(n+1)}{6} + 14\right] = 0 \Leftrightarrow (n-1)(n^2 - 5n - 84) = 0 \Leftrightarrow n = 12$ vì $n \geq 2$.

Lúc này ta có $\left(1 + x + \dfrac{1}{x}\right)^n = \left(1 + x + \dfrac{1}{x}\right)^{12}$

Từ công thức tổng quát tam thức Newton ta có với $0 \leq q \leq p \leq 12$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $\left(1 + x + \dfrac{1}{x}\right)^{12}$ là $T_p = C_{12}^p C_p^q 1^{12-p} (x)^{p-q} \left(\dfrac{1}{x}\right)^q = C_{12}^p C_p^q x^{p-q-q} = C_{12}^p C_p^q x^{p-2q}$

Ta có: $p - 2q = 0 \Leftrightarrow p = 2q$. Kết hợp với điều kiện ở trên ta có:

$(p;q) \in \{(0;0),(2;1)(4;2),(6;3),(8;4),(10;5),(12;6)\}$. Suy ra số hạng không chứa x là

$C_{12}^0 C_0^0 + C_{12}^2 C_2^1 + C_{12}^4 C_4^2 + C_{12}^6 C_6^3 + C_{12}^8 C_8^4 + C_{12}^{10} C_{10}^5 + C_{12}^{12} C_{12}^6 = 73789$

Câu 12. Đáp án A.

Theo giả thiết ta có: $P(x)=\left(1+x+x^2\right)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}$

Thay $x=1$ ta được $S=a_0+a_1+a_2+...+a_{2n}=P(1)=3^n$. Như vậy ta chỉ cần xác định được n

Với $0\le q\le p\le n$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $\left(1+x+x^2\right)^n$ là

$T_p=C_n^pC_p^q1^{n-p}x^{p-q}\left(x^2\right)^q=C_n^pC_p^qx^{p+q}$

Hệ số của x^3 ứng với: $\begin{cases}p+q=3\\0\le q\le p\le n\end{cases}\Rightarrow(p;q)\in\{(3;0),(2;1)\}$.

Suy ra $a_3=C_n^3C_3^0+C_n^2C_2^1=C_n^3+2C_n^2$.

Hệ số của x^4 ứng với: $\begin{cases}p+q=4\\0\le q\le p\le n\end{cases}\Rightarrow(p;q)\in\{(4;0),(3;1),(2;2)\}$.

Suy ra $a_4=C_n^4C_4^0+C_n^3C_3^1+C_n^2C_2^2=C_n^4+3C_n^3+C_n^2$.

$$\frac{a_3}{14}=\frac{a_4}{41}\Leftrightarrow\frac{1}{14}\frac{n(n-1)(n+4)}{6}=\frac{1}{41}\left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{14}\frac{(n+4)}{3}=\frac{1}{41}\left(\frac{n^2-5n+6}{12}+n-1\right)\Leftrightarrow 7n^2-33n-370=0\Leftrightarrow n=10.$$

Vậy $S=a_0+a_1+a_2+...+a_{2n}=3^{10}$

Câu 13. Đáp án D.

Vì $C_n^k=C_n^{n-k}$ nên ta có $\left\{C_{16}^0,C_{16}^1,...,C_{16}^8\right\}=\left\{C_{16}^{16},C_{16}^{15},...,C_{16}^8\right\}$, suy ra ta chỉ cần tìm số lớn nhất trong các số $C_{16}^0,C_{16}^1,...,C_{16}^7,C_{16}^8$. Bằng tính toán trực tiếp, ta có

$C_{16}^0=1,C_{16}^1=16,C_{16}^2=120,C_{16}^3=560,C_{16}^4=1820,C_{16}^5=4368,C_{16}^6=8008,C_{16}^7=11440,C_{16}^8=12870$

Như vậy $C_{16}^0<C_{16}^1<C_{16}^2<...<C_{16}^7<C_{16}^8$

Do đó: $C_{16}^8=\max\left\{C_{16}^0;C_{16}^1;C_{16}^2;...;C_{16}^{15};C_{16}^{16}\right\}$

Câu 14. Đáp án C.

Ta có $a_k=2^{10-k}C_{10}^k$ với $k=0,1,2,...,10$. Bài toán tương đương với tìm $k\in\{0,1,2,...,10\}$ sao cho a_k lớn nhất. Xét bất phương trình sau:

$$a_k\le a_{k+1}\Leftrightarrow 2^{10-k}C_{10}^k\le 2^{9-k}C_{10}^{k+1}\Leftrightarrow 2\frac{10!}{k!(10-k)!}\le\frac{10!}{(k+1)!(9-k)!}$$

$$\Leftrightarrow 2(k+1)\le 10-k\Leftrightarrow k\le\frac{8}{3}\Leftrightarrow k\in\{0,1,2\}$$

Từ đây ta có: $\begin{cases} a_k \le a_{k+1} \forall k \in \{0;1;2\} \\ a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = \dfrac{8}{3}, k \notin N \\ a_k > a_{k+1} \forall k \in \{3;4;....10\} \end{cases}$

Do đó: $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5 > ... > a_{10}$ hay a_3 là hệ số lớn nhất cần tìm.

$a_3 = C_{10}^3.2^7 = 15360.$

Câu 15. Đáp án B.

$A_n^2 - 3.C_n^{n-1} = 11n \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!} - 3n = 11n.$

$\Leftrightarrow n(n-1) - 3n = 11n \Leftrightarrow n = 15.$

$(x+2)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^k.2^{15-k}$

Xét bất phương trình: $a_k \le a_{k+1} \Leftrightarrow C_{15}^k.2^{15-k} \le C_{15}^{k+1}.2^{14-k} \Leftrightarrow$

$2\dfrac{15!}{k!.(15-k)!} \le 2\dfrac{15!}{(k+1)!.(14-k)!} \Leftrightarrow \dfrac{2}{15-k} \le \dfrac{1}{k+1} \Leftrightarrow k \le \dfrac{13}{3}, k \in N \Rightarrow k \in \{0,1,2,3,4\}$

Từ đây ta có: $\begin{cases} a_k \le a_{k+1} \forall k \in \{0,1,2,3,4\} \\ a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = \dfrac{13}{3}, k \notin N \\ a_k > a_{k+1} \forall k \in \{5;6;....15\} \end{cases}$

Do đó: $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 > a_6 > a_7 > ... > a_{15}$

Vậy $a_5 = max\left\{a_i \middle| i = \overline{0,15}\right\} = C_{15}^5.2^{10}$

Câu 16. Đáp án A

$2^{12} = a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{2^2} + ... + \dfrac{a^n}{2^n} = a_0 + a_1\left(\dfrac{1}{2}\right) + a_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + ... + a_n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$= P\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(1 + 2.\dfrac{1}{2}\right)^n = 2^n$

$\Rightarrow n = 12$

$(2x+1)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (2x)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k.x^k 2^k.$

$\Rightarrow a_k = C_{12}^k.2^k \forall k\overline{0,12} \Rightarrow a_k \le a_{k+1} \Leftrightarrow C_{12}^k.2^k \le C_{12}^{k+1}.2^{k+1}$

$$\frac{12!}{k!.(12-k)!} \le \frac{12!}{(k+1)!.(11-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{12-k} \le \frac{2}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow k \le \frac{23}{3}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \{0,1,2,3,...7\}$$

Từ đây ta có: $\begin{cases} a_k \le a_{k+1} \forall k \in \{0,1,2,3,...7\} \\ a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = \dfrac{23}{3}, k \notin N \\ a_k > a_{k+1} \forall k \in \{8;9;....11\} \end{cases}$

Do đó: $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < ..... < a_8 > a_9 > .... > a_{12}$

Vậy $a_5 = max\left\{a_i \middle| i = \overline{0,12}\right\} = C_{12}^8.2^8$

Câu 17. Đáp án A

Giả sử n là số nguyên dương sao cho:

$max\{a_0, a_1, ...a_n\} = a_{10}$

Theo công thức khai triển newton ta có:

$$P(x) = (x+2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k.x^k 2^k.$$

$$\Rightarrow a_k = C_n^k.2^{n-k} \forall k \overline{0,n}$$

Ta có: $a_{10} = max\{a_0, a_1, ...a_n\} \Leftrightarrow \begin{cases} a_9 \le a_{10} \\ a_{10} \ge a_{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_n^9.2^{n-9} \le C_n^{10}.2^{n-10} \\ C_n^{10}.2^{n-10} \ge C_n^{11}.2^{n-11} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{n-9} \le \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{1}{11} \le \dfrac{2}{n-10} \end{cases} \Leftrightarrow 29 \le n \le 32$$

Các phép biến đổi trên là đương tương nên ta không cần phải thử lại các giá trị trên.

Vậy $n \in \{29, 30, 31, 32\}$ là tất cả các giá trị thỏa mãn bài toán (thử lại thấy thỏ mãn).

Câu 18. Đáp án D

Theo công thức khai triển Newton ta có:

$$(x^2+1)^n (x+2)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2k}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i 2^{n-i}\right).$$

Số hạng chứa 3^{3n-3} tương ứng với cặp (k,i) thỏa mãn:

$$\begin{cases} 2k + i = 3n - 3 \\ 0 \le k; i \le n \end{cases} \Rightarrow (k;i) \in \{(n, n-3); (n-1, n-1)\}$$

Do đó hệ số của 3^{3n-3} là: $a_{3n-3}=C_n^n.2^3.C_n^{n-3}+C_n^{n-1}.2^1.C_n^{n-1}=8C_n^3+2n^2=26n$

$$\Leftrightarrow 8\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+2n^2=26n\Rightarrow 2n^2-3n-35=0\Rightarrow n=5$$

Câu 19. Đáp án A.

Ta có: $G(x)=(ax+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k x^k$.

Từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases}C_n^1ax=24\\ C_n^2a^2x^2=252x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}na=24\\ \dfrac{n(n-1)}{2}a^2=252\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n^2a^2=576\\ \dfrac{n(n-1)}{2}a^2=252\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}na=24\\ \dfrac{2n^2}{n(n-1)}=\dfrac{16}{7}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}na=24\\ 14n=16(n-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=8\\ a=3\end{cases}$$

Vậy $a=3, n=8$ là các số cần tìm.

Câu 20. Đáp án C

Các số hạng của tổng vế trái có dạng:

$$(-1)^{k-1}\frac{kC_n^k}{2^k}=(-1)^{k-1}\frac{nC_{n-1}^{k-1}}{2^k}=\frac{n}{2}C_{n-1}^{k-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Do đó ta có:

$$\frac{C_n^1}{2}-\frac{2C_n^2}{2^2}+\frac{3C_n^3}{2^3}-...+(-1)^{n-2}\frac{(n-1)C_n^{n-1}}{2^{n-1}}+(-1)^{n-1}\frac{nC_n^n}{2^n}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{kC_n^k}{2^k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{2}C_{n-1}^{k-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{n}{2}\sum_{k=1}^{n-1}C_{n-1}^{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}=\frac{n}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)^{n-1}=\frac{n}{2^n}.$$

Như vậy ta cần dùng số nguyên dương n thỏa mãn: $\frac{n}{2^n}=\frac{1}{32}\Leftrightarrow 2^{n-5}=n\Leftrightarrow n=8$.

Câu 21. Đáp án A

Cách 1: Ta có

$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$

$C_{n-1}^k=C_{n-2}^k+C_{n-2}^{k-1}$

$C_{n-2}^k=C_{n-3}^k+C_{n-3}^{k-1}$

....

$C_{k+1}^k=C_k^k+C_k^{k-1}$

$C_k^k=C_{k-1}^k+C_{k-1}^{k-1}$

Cộng các dẳng thức trên vế theo vế ta được:

$C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-2}^{k-1}+...+C_k^{k-1}+C_{k-1}^{k-1}\quad(*)$

Ta có: $1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+n(n+1)(n+2)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+2)!}{(k-1)!}=6\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+2)!}{3!(k-1)!}=6\sum_{k=1}^{n}C_{k+2}^{3}=6\left(C_3^3+C_4^3+...+C_{n+1}^3+C_{n+2}^3\right).$

Áp dụng câu $(*)$ với $k=4$, thay n bởi $n+3$ ta được:

$C_3^3+C_4^3+...+C_{n+1}^3+C_{n+2}^3=C_{n+3}^4$

Vậy $1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+n(n+1)(n+2)=6C_{n+3}^4=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Cách 2: Với bài toán này ta có thể dùng máy tính để thử trường hợp riêng.

Câu 22. **Đáp án D**

Xét khai triển:

$(a+b)^n=C_n^0b^n+C_n^1a^1b^{n-1}+...+C_n^{n-2}a^{n-2}b^2+C_n^{n-1}a^{n-1}b^1+C_n^na^n$.

Chọn $a=b=1$ ta được $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n$

Câu 23. **Đáp án C**

Xét khai triển: $(a+b)^n=C_n^0b^n+C_n^1a^1b^{n-1}+...+C_n^{n-2}a^{n-2}b^2+C_n^{n-1}a^{n-1}b^1+C_n^na^n$.

Chọn $a=2,b=1$ ta được:

$3^n=(2+1)^n=C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+...+2^nC_n^n=243\Rightarrow n=5$

Câu 24. **Đáp án A**

Các số hạng của S có dạng:

$\frac{1}{(2k)!(2019-2k)!}=\frac{1}{2019!}\frac{2019!}{(2k)!(2019-2k)!}=\frac{1}{2019!}C_{2019}^{2k}$.

Do đó $\Rightarrow 2019!S=C_{2019}^2+C_{2019}^4+...+C_{2019}^{2016}+C_{2019}^{2018}$.

Nhận thấy C_{2019}^{2k} là hệ số của x^{2k} trong khai triển $(x+1)^{2019}$.

Vì vậy xét $P(x)=(x+1)^{2019}$, theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$P(x)=(x+1)^{2019}=C_{2019}^0+C_{2019}^1x+C_{2019}^2x^2+...+C_{2019}^{2019}x^{2019}$

Từ đó ta có:

$P(1)=C_{2019}^0+C_{2019}^1+C_{2019}^2+...+C_{2019}^{2019}$.

$P(-1)=C_{2019}^0-C_{2019}^1+C_{2019}^2-...+C_{2019}^{2018}-C_{2019}^{2019}$

Suy ra: $2019!S+1=C_{2019}^0+C_{2019}^2+C_{2019}^4+...+C_{2019}^{2018}=\frac{P(1)+P(-1)}{2}=2^{2018}$

$\Leftrightarrow S=\frac{2^{2018}-1}{2019!}$

Câu 25. **Đáp án D**

Theo giả thiết ta có:

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}$.

Khi đó $P(1)=a_0+a_1+a_2+...+a_{2n}$ và $P(-1)=a_0-a_1+a_2-...+a_{2n}$.

Suy ra $T=a_0+a_2+...+a_{2n}=\frac{P(1)+P(-1)}{2}=\frac{2^{2n-1}+2^{2n}}{2}=3.2^{2n-2}$

$\Rightarrow 768 = 3.2^{2n-2} \Leftrightarrow n = 5$

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$P(x) = (x-1)^{2n} + x(x+1)^{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k x^k (-1)^{2n-k} + x\sum_{k=1}^{2n-1} C_{2n-k}^k x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k x^k (-1)^{2n-k} + \sum_{k=1}^{2n} C_{2n-k}^{k-1} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{2n}\left(C_{2n}^k (-1)^k + C_{2n-1}^{k-1}\right)x^k = 1 + \sum_{k=1}^{10}\left(C_{10}^k (-1)^k + C_9^{k-1}\right)x^k.$$

Vậy $a_5 = C_{10}^5 (-1)^5 + C_9^4 = -126.$

Câu 26. Đáp án B.

Xét khai triển $(a+b)^{2n} = C_{2n}^0 b^{2n} + C_{2n}^1 a^1 b^{2n-1} + ... + C_{2n}^{2n-1} a^{2n-2} b^1 + C_{2n}^{2n} a^{2n}$

Chọn $a = b = 1$, ta được:

$2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$

Chọn $a = 1, b = -1$, ta được:

$0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + ... - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$

Trừ hai đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$2^{2n} = 2\left(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1}\right) = 2.2048 = 2^{12} \Leftrightarrow n = 6$

Câu 27. Đáp án A.

Nhận thấy rằng:

$3S = 3a_1 + 3^3 a_3 + ... + 3^{2011} a_{2011} + 3^{2013} a_{2013}$

Lần lượt thay $x = 3, x = -3$ vào khai triển đã cho ta được:

$P(3) = 7^{2014} = a_0 + 3a_1 + 3^2 a_2 + ... + 3^{2013} a_{2013} + 3^{2014} a_{2014}$

$P(-3) = 5^{2014} = a_0 - 3a_1 + 3^2 a_2 - ... - 3^{2013} a_{2013} + 3^{2014} a_{2014}$

Trừ hai đẳng thức này vế theo vế, ta được:

$2\left(3a_1 + 3^3 a_3 ... + 3^{2011} a_{2011} + 3^{2013} a_{2013}\right) = 7^{2014} - 5^{2014}$

$$\Leftrightarrow 3S = \frac{7^{2014} - 5^{2014}}{2} \Leftrightarrow S = \frac{7^{2014} - 5^{2014}}{6}$$

Vậy $S = a_1 + 3^2 a_3 + ... + 3^{2010} a_{2011} + 3^{2012} a_{2013} = \dfrac{7^{2014} - 5^{2014}}{6}$

Câu 28. Đáp án B.

Nhận thấy $(-5)^k C_{100}^k$ là hệ số của x^k trong khai triển $(1-5x)^{100}$

Vì thế xét $P(x) = (1-5x)^{100}$, theo khai triển nhị thức NewTon, ta có:

$P(x) = (1-5x)^{100} = C_{100}^0 - C_{100}^1 5x + C_{100}^2 (5x)^2 - ... + C_{100}^{100} (5x)^{100}$

Thay $x = 1$ vào ta được:

$P(x) = (4)^{100} = C_{100}^0 - C_{100}^1 5 + C_{100}^2 5^2 - ... + C_{100}^{100} 5^{100}$

Chú ý: Ta cũng có thể xét khai triển $(1+5x)^{100}$ rồi sau đó thay $x=-1$ vào.

Câu 29. Đáp án C.

Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$

Cho $x=1$ thì A đúng.

Cho $x=-1$ thì B đúng.

Cho $x=2$ thì D đúng.

Cho $x=-2$ thì $(-1)^n = C_n^0 - 2C_n^1 + C_n^2 2^2 - ... + C_n^n (-2)^n$.

Vậy C sai.

Câu 30. Đáp án B.

$(2x+y)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4 y + 10(2x)^3 y^2 + 10(2x)^2 y^3 + 5(2x)y^4 + y^5$

$= 32x^5 + 80x^4 y + 80x^3 y^2 + 40x^2 y^3 + 10xy^4 + y^5$.