# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

## A. LÝ THUYẾT

### 1. Hàm số $y = sinx$ và hàm số $y = cos x$.

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x$ với $sin$ của góc lượng giác có số đo rađian bằng $x$ được gọi là hàm số $sin$, kí hiệu là $y = sinx$.

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x$ với $cosin$ $(cos)$ của góc lượng giác có số đo rađian bằng $x$ được gọi là hàm số $cos$, kí hiệu là $y = cos x$.

Tập xác định của các hàm số $y = sinx; y = cos x$ là $\mathbb{R}$.

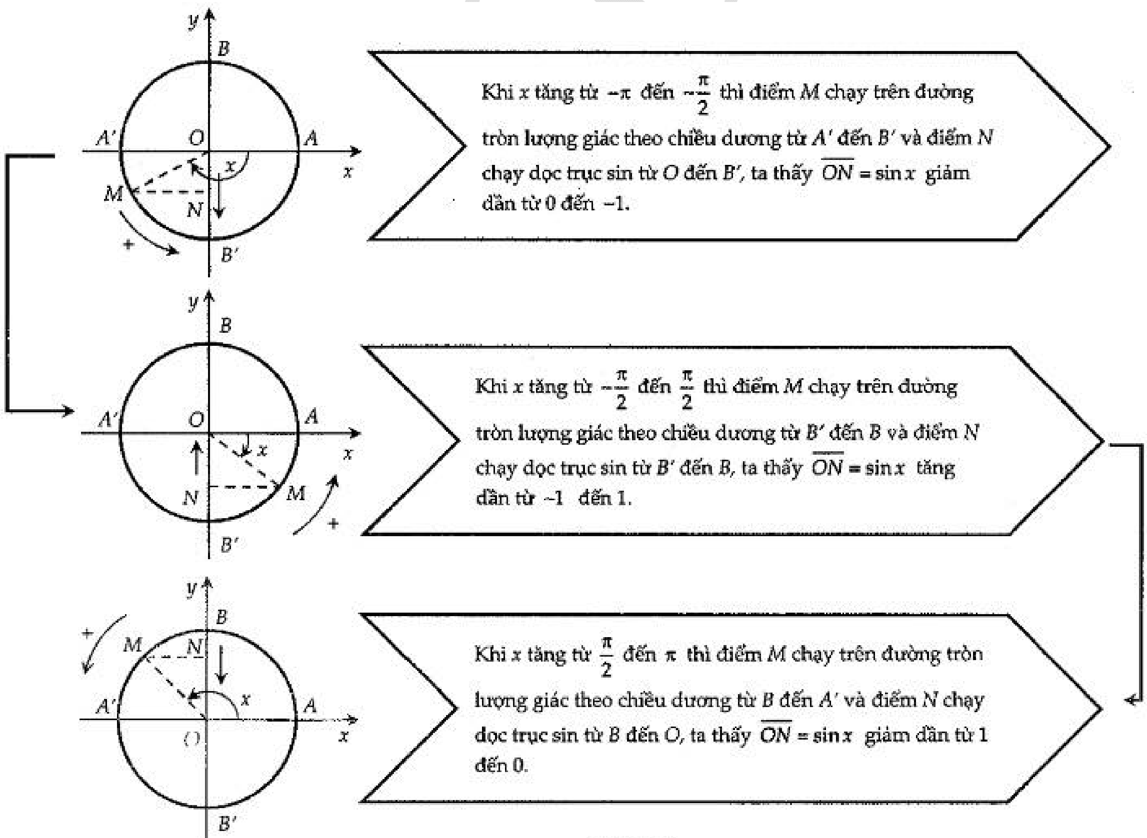
**a) Hàm số** $y = sinx$

**Nhận xét:** Hàm số $y = sinx$ là hàm số lẻ do hà số có tập xác định $D = \mathbb{R}$ là đối xứng và $-sinx = sin(-x)$.

Hàm số $y = sinx$ tuần hoàn với chu kì $2\pi$.

**Sự biến thiên:**

Sự biến thiên của hàm số $y = sinx$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ được biểu thị trong sơ đồ (hình 1.4) phía dưới:




Hình 1.4

Bảng biến thiên:

Từ đây ta có bảng biến thiên của hàm số $y = sinx$ trên đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$ như sau:

| $x$ | $-\pi$ | | $-\frac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = sinx$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

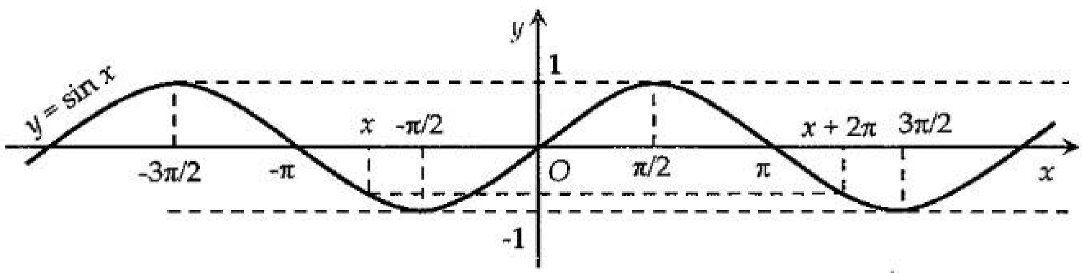
**STUTY TIP**

**Khái niệm:**

Hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $D$ gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x$ thuộc $D$ ta có $\begin{cases} x - T \in D; x + T \in D \\ f(x+T) = f\left(x\right) \end{cases}$.

Số dương $T$ nhỏ nhất (nếu có) thỏa mãn tính chất trên gọi là chu kì của hàm tuần hoàn.

**Đồ thị hàm số:**




**Hình 1.5**

**Nhận xét:** Do hàm số $y = sinx$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kì $2\pi$ nên khi vẽ đồ thị hàm số $y = sinx$ trên $\mathbb{R}$ ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $\left[0;\pi\right]$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc tọa $O$, ta được đồ thị hàm số $y = sinx$ trên đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành ta được các đoạn có độ dài $2\pi; 4\pi, ...$

**STUDY TIP**

Hàm số $y = sinx$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Do tính chất tuần hoàn với chu kì $2\pi$, hàm số $y = sinx$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

Tương tự ta suy ra được hàm số $y = sinx$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

**GHI NHỚ**

**Hàm số** $y = sinx$ :

- Có tập xác định là $\mathbb{R}$ .
- Có tập giá trị là $\left[-1;1\right]$.
- Là hàm số lẻ.
- Đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.
- Có đồ thị là một đường hình sin.
- Tuần hoàn với chu kì $2\pi$ .
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ .
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ .

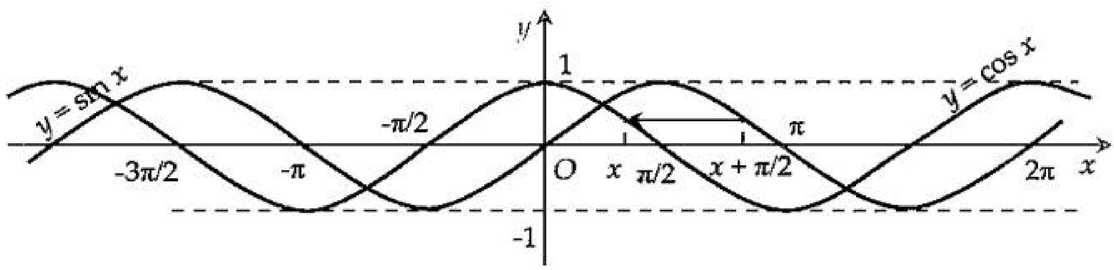
**b) Hàm số** $y = cos x$

Ta thấy $cos x = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = sinx$ sang trái một đoạn có độ dài $\frac{\pi}{2}$ , ta được đồ thị hàm số $y = cos x$ .

Bảng biến thiên của hàm số $y = cos x$ trên $\left[-\pi;\pi\right]$.

| $x$ | $-\pi$ | $0$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $y = cos x$ | $-1$ ↗ | $1$ | ↘ $-1$ |

**Đồ thị hàm số** $y = cos x$ **:**




Hình 1.6

**STUTY TIP**

Hàm số $y = cos\,x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi;0)$. Do tính chất tuần hoàn với chu kì $2\pi$, hàm số $y = cos\,x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.
Tương tự ta suy ra được hàm số $y = cos\,x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

**GHI NHỚ**

**Hàm số $y = cos\,x$:**

- Có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Là hàm số chẵn.
- Là một đường hình sin.
- Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

**Đọc thêm**

Hàm số $y = a.sin(\omega x + b) + c, (a, b, c, \omega \in \mathbb{R}, a\omega \neq 0)$ là một hàm tuần hoàn với chu kì cơ sở $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ vì:

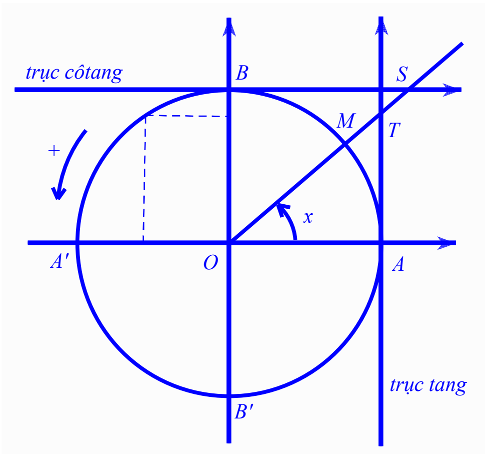
$$a.sin(\omega(x+T)+b)+c = a.sin(\omega x + b) + c, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow a.sin(\omega x + b + \omega T) = a.sin(\omega x + b), \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \omega T = k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow T = k\frac{2\pi}{\omega}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

Tương tự hàm số $y = a.cos(\omega x + b) + c, (a, b, c, \omega \in \mathbb{R}, a\omega \neq 0)$ cũng là một hàm tuần hoàn với chu kì cơ sở $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

**Ứng dụng thực tiễn:** Dao động điều hòa trong môn Vật lý chương trình 12.

2. Hàm số $y = \tan x$ và hàm số $y = \cot x$




Hình 1.7

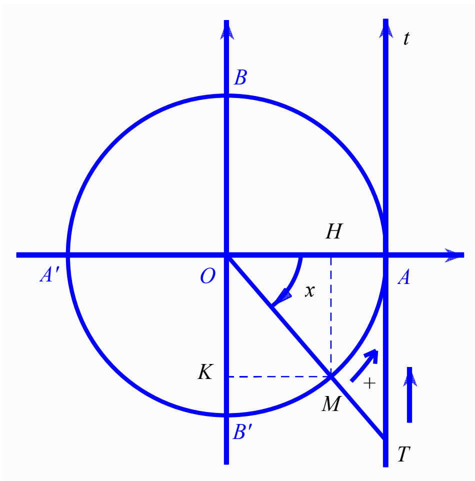
Với $D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$, quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in D_1$ với số thực $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ được gọi là hàm số tang, kí hiệu là $y = \tan x$. Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $D_1$.

Với $D_2 = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$, quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in D_2$ với số thực $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ được gọi là hàm số côtang, kí hiệu là $y = \cot x$. Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $D_2$.

*Nhận xét:* - Hai hàm số $y = \tan x$ và hàm số $y = \cot x$ là hai hàm số lẻ.

- Hai hàm số này là hai hàm số tuần hoàn với chu kì $\pi$.

a) Hàm số $y = \tan x$




Hình 1.8

Sự biến thiên: Khi cho $x = (OA, OM)$ tăng từ $-\frac{\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$ thì điểm $M$ chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ $B'$ đến $B$ (không kể $B'$ và $B$). Khi đó điểm $T$ thuộc trục tang sao cho $\overline{AT} = \tan x$ chạy dọc theo $At$, nên $\tan x$ tăng từ $-\infty$ đến $+\infty$ (qua giá trị $0$ khi $x = 0$).

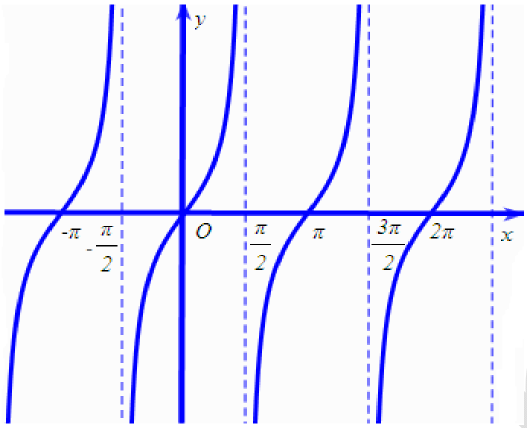
*Giải thích:* $\tan x = \overline{AT}$ vì $\tan x = \frac{\overline{MH}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AT}}{1} = \overline{AT}$

*Nhận xét:* Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left( -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$. Đồ thị hàm số $y = \tan x$ nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận.

Đồ thị hàm số:

*Nhận xét:* Do hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$ và tuần hoàn với chu kì $\pi$ nên khi vẽ đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$ ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên

$\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc tọa độ $O$, ta được đồ thị hàm số $y=\tan x$ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành.




Hình 1.9

**STUDY TIP**

Hàm số $y=\tan x$ nhận mỗi đường thẳng $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ làm một đường tiệm cận

GHI NHỚ

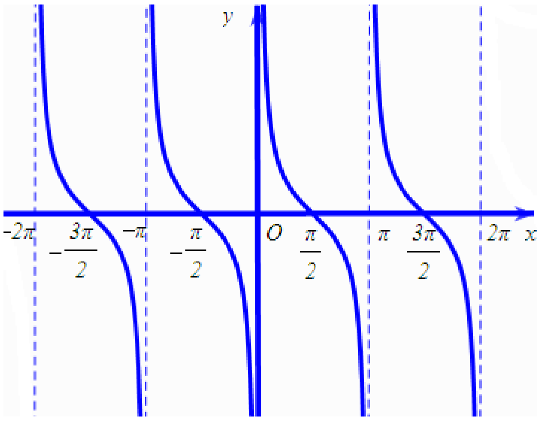
Hàm số $y=\tan x$:

- Có tập xác định $D_1=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$
- Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $\pi$
- Có tập giá trị là $\mathbb{R}$
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),k\in\mathbb{Z}$
- Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ làm một đường tiệm cận

b) Hàm số $y=\cot x$

Hàm số $y=\cot x$ có tập xác định $D_2=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$ là một hàm số tuần hoàn với chu ki $\pi$.

Tương tự khảo sát như đối với hàm số $y=\tan x$ ở trên thì ta có thể vẽ đồ thị hàm số $y=\cot x$ như sau:




Hình 1.10

**GHI NHỚ**

Hàm số $y = \cot x$:

- Có tập xác định: $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $\pi$
- Có tập giá trị là $\mathbb{R}$
- Đồng biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
- Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận.