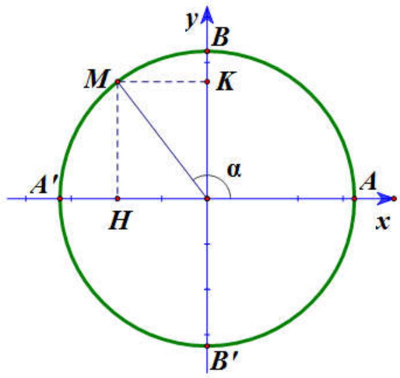
CHỦ ĐỀ 1:
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC
BÀI: GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. LÝ THUYẾT

1. Giá trị lượng giác của cung α.

Trên đường tròn lượng giác (hình 1.1) cho cung $\overset{\frown}{AM}$ có sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$:



Hình 1.1

Gọi $M(x;y)$ với tung độ của M là $y = \overline{OK}$, hoành độ là $x = \overline{OH}$ thì ta có:

$\sin\alpha = \overline{OK}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \overline{OH}$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha};(\cos\alpha \neq 0)$ $\qquad$ $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha};(\sin\alpha \neq 0)$

Các giá trị $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của cung α.

Các hệ quả cần nắm vững

1. Các giá trị $\sin\alpha$; $\cos\alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Và ta có:

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha, \forall k \in \mathbb{Z};$$

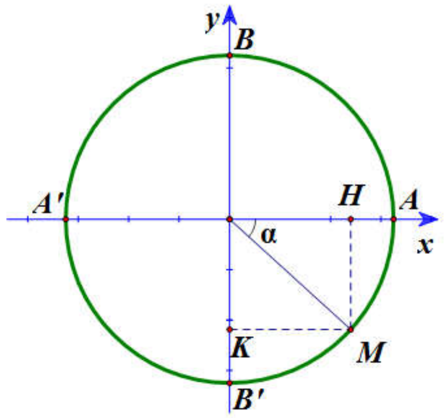
$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

2. $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

3. $\tan\alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

4. $\cot\alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Dấu của các giá trị lượng giác của cung α phụ thuộc vào vị trí điểm cuối của cung $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ trên đường tròn lượng giác (hình 1.2).

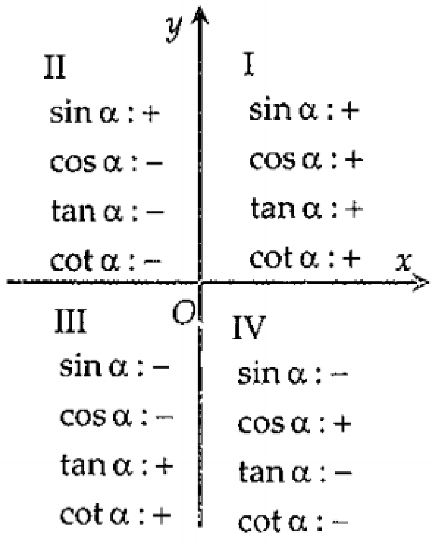


Hình 1.2

Ta có bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác như sau

Góc phần tư / Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\cos\alpha$	+	-	-	+
$\sin\alpha$	+	+	-	-
$\tan\alpha$	+	-	+	-
$\cot\alpha$	+	-	+	-

Ở hình 1.3 là một cách nhớ khác để xác định dấu của các giá trị lượng giác



Hình 1.3

2. Công thức lượng giác

<u>Công thức cơ bản</u>

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\tan^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\cot^2 x + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

<u>Cung đối nhau</u>

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\tan(-x) = -\tan x$

Công thức cộng

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

Cung bù nhau

$\sin x = \sin(\pi - x)$

$\cos x = -\cos(x - \pi)$

$\tan x = \tan(x - \pi)$

Công thức đặc biệt

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Góc nhân đôi

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Góc chia đôi

$\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Góc nhân ba

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$

Góc chia ba

$\sin^3 x = \dfrac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

$\cos^3 x = \dfrac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$

STUDY TIP

Ở đây từ các công thức góc nhân đôi, góc nhân ba ta có thể suy ra công thức góc chia đôi, chia ba mà không cần nhớ nhiều công thức.

Biến đổi tích thành tổng

$\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x - y) + \cos(x + y)\right]$

$\sin x \sin y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x - y) - \cos(x + y)\right]$

$\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x - y) + \sin(x + y)\right]$

Biến đổi tổng thành tích

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x + y}{2}\cos\dfrac{x - y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x + y}{2}\sin\dfrac{x - y}{2}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x + y}{2}\cos\dfrac{x - y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x + y}{2}\sin\dfrac{x - y}{2}$

3. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

α (độ)	0	30°	45°	60°	90°	180°
α (radian)	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định	0

STUDY TIP

Từ bảng giá trị lượng giác các cung đặc biệt ở bên ta thấy một quy luật như sau để độc giả có thể nhớ các giá trị lượng giác của các cung đặc biệt:

α	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Các giá trị ở tử số tăng dần từ $\sqrt{0}$ đến $\sqrt{4}$. Ngược lại đối với giá trị $\cos$, tử số giảm dần từ $\sqrt{4}$ về $\sqrt{0}$.

BÀI: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. LÝ THUYẾT

1. Hàm số $y = sinx$ và hàm số $y = cos\,x$.

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với sin của góc lượng giác có số đo rađian bằng x được gọi là hàm số sin, kí hiệu là $y = sinx$.

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với $cosin$ (cos) của góc lượng giác có số đo rađian bằng x được gọi là hàm số cos, kí hiệu là $y = cos\,x$.

Tập xác định của các hàm số $y = sinx; y = cos\,x$ là $\mathbb{R}$.

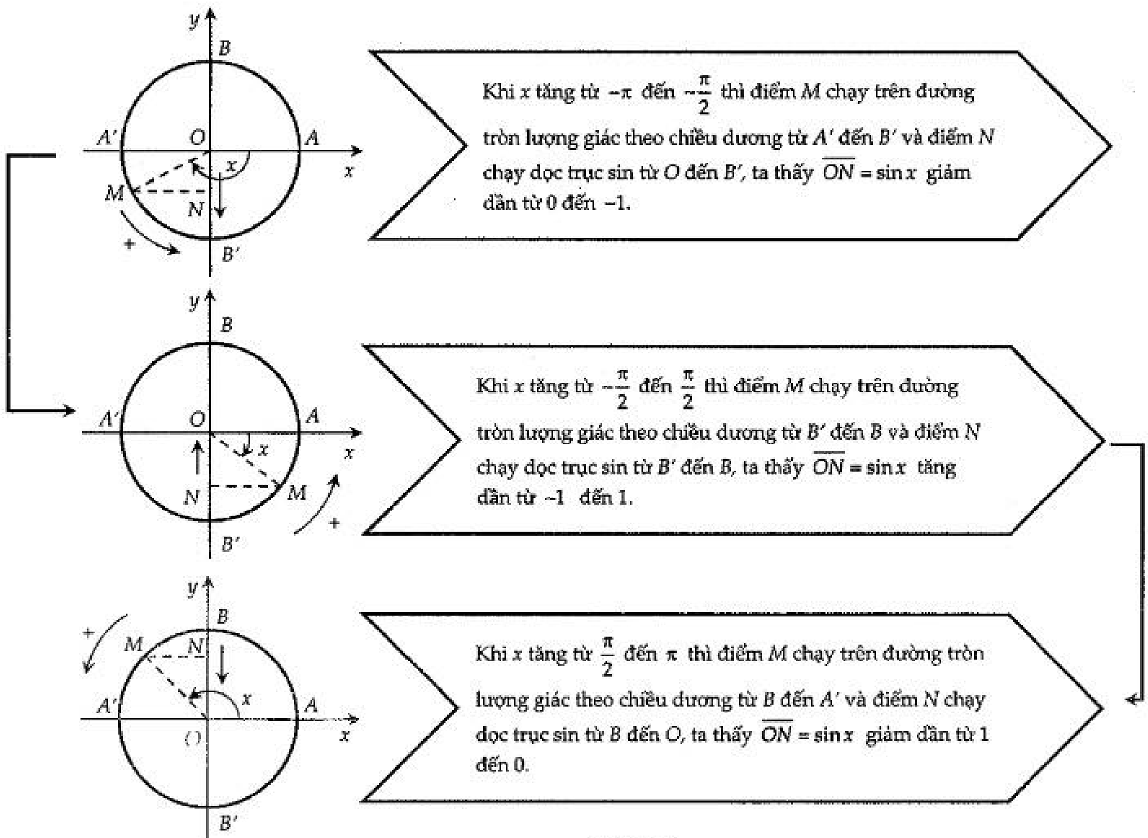
a) Hàm số $y = sinx$

Nhận xét: Hàm số $y = sinx$ là hàm số lẻ do hà số có tập xác định $D = \mathbb{R}$ là đối xứng và $-sinx = sin(-x)$.

Hàm số $y = sinx$ tuần hoàn với chu kì 2π.

Sự biến thiên:

Sự biến thiên của hàm số $y = sinx$ trên đoạn $[-\pi;\pi]$ được biểu thị trong sơ đồ (hình 1.4) phía dưới:



Hình 1.4

Bảng biến thiên:

Từ đây ta có bảng biến thiên của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi;\pi]$ như sau:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$y = \sin x$	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0

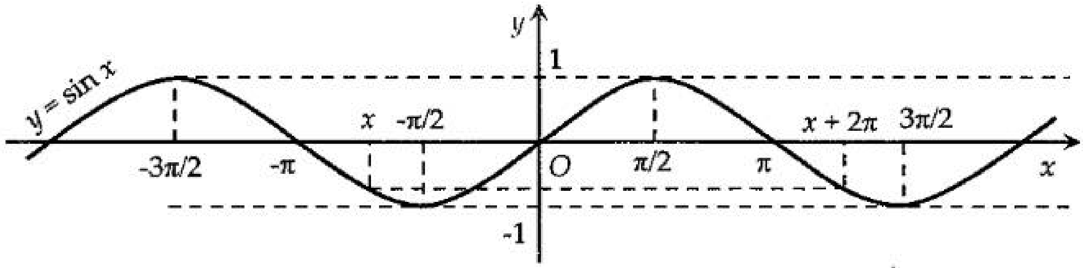
STUTY TIP

Khái niệm:

Hàm số $f(x)$ xác định trên D gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi x thuộc D ta có $\begin{cases} x - T \in D; x + T \in D \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$.

Số dương T nhỏ nhất (nếu có) thỏa mãn tính chất trên gọi là chu kì của hàm tuần hoàn.

Đồ thị hàm số:



Hình 1.5

Nhận xét: Do hàm số $y = sinx$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kì 2π nên khi vẽ đồ thị hàm số $y = sinx$ trên $\mathbb{R}$ ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $\left[0;\pi\right]$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc tọa O, ta được đồ thị hàm số $y = sinx$ trên đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành ta được các đoạn có độ dài $2\pi; 4\pi, ...$

STUDY TIP

Hàm số $y = sinx$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Do tính chất tuần hoàn với chu kì 2π, hàm số $y = sinx$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

Tương tự ta suy ra được hàm số $y = sinx$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

GHI NHỚ

Hàm số $y = sinx$:

- Có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Có tập giá trị là $\left[-1;1\right]$.
- Là hàm số lẻ.
- Đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.
- Có đồ thị là một đường hình sin.
- Tuần hoàn với chu kì 2π.
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

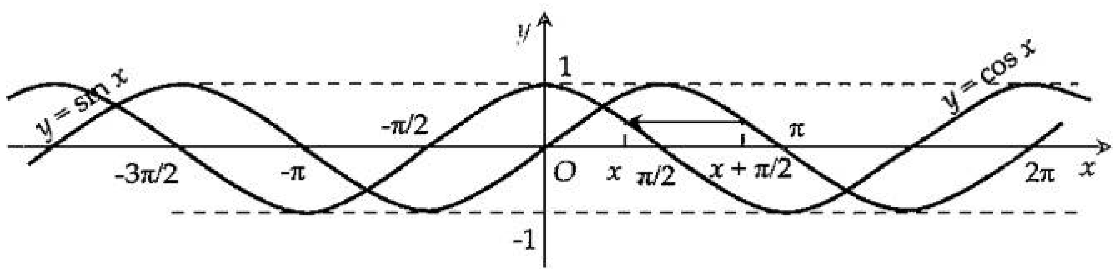
b) Hàm số $y = cos\,x$

Ta thấy $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \sin x$ sang trái một đoạn có độ dài $\frac{\pi}{2}$, ta được đồ thị hàm số $y = \cos x$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = \cos x$ trên $[-\pi;\pi]$.

x	$-\pi$	0	π
$y = \cos x$	-1 ↗	1	↘ -1

Đồ thị hàm số $y = \cos x$:



Hình 1.6

STUTY TIP

Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi;0)$. Do tính chất tuần hoàn với chu kì 2π, hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Tương tự ta suy ra được hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

GHI NHỚ

Hàm số $y = \cos x$:

- Có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Là hàm số chẵn.
- Là một đường hình sin.
- Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Đọc thêm

Hàm số $y = a.\sin(\omega x + b) + c, (a,b,c,\omega \in \mathbb{R}, a\omega \neq 0)$ là một hàm tuần hoàn với chu kì cơ sở $\frac{2\pi}{|\omega|}$ vì:

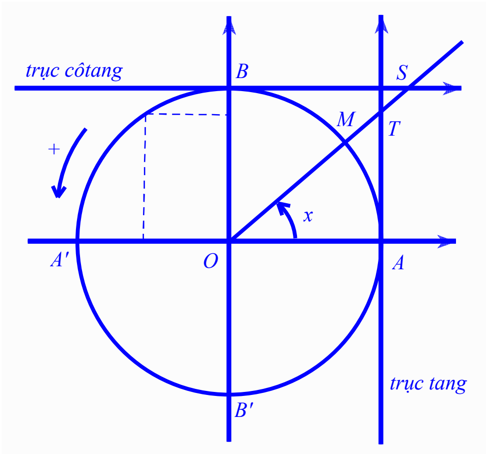
$$a.sin\left(\omega\left(x+T\right)+b\right)+c=a.sin\left(\omega x+b\right)+c,\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow a.sin\left(\omega x+b+\omega T\right)=a.sin\left(\omega x+b\right),\forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \omega T=k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow T=k\frac{2\pi}{\omega},\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

Tương tự hàm số $y=a.cos\left(\omega x+b\right)+c,\left(a,b,c,\omega\in\mathbb{R},a\omega\neq 0\right)$ cũng là một hàm tuần hoàn với chu kì cơ sở $\frac{2\pi}{|\omega|}$ và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

Ứng dụng thực tiễn: Dao động điều hòa trong môn Vật lý chương trình 12.

2. Hàm số $y=\tan x$ và hàm số $y=\cot x$



Hình 1.7

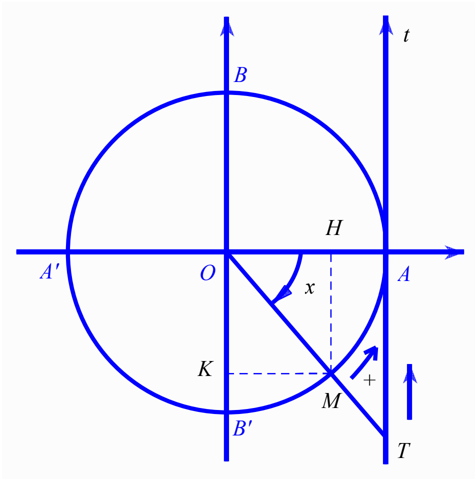
Với $D_1=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$, quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x\in D_1$ với số thực $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ được gọi là hàm số tang, kí hiệu là $y=\tan x$. Hàm số $y=\tan x$ có tập xác định là D_1.

Với $D_2=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$, quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x\in D_2$ với số thực $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ được gọi là hàm số côtang, kí hiệu là $y=\cot x$. Hàm số $y=\cot x$ có tập xác định là D_2.

Nhận xét: - Hai hàm số $y=\tan x$ và hàm số $y=\cot x$ là hai hàm số lẻ.

- Hai hàm số này là hai hàm số tuần hoàn với chu kì π.

a) Hàm số $y=\tan x$



Hình 1.8

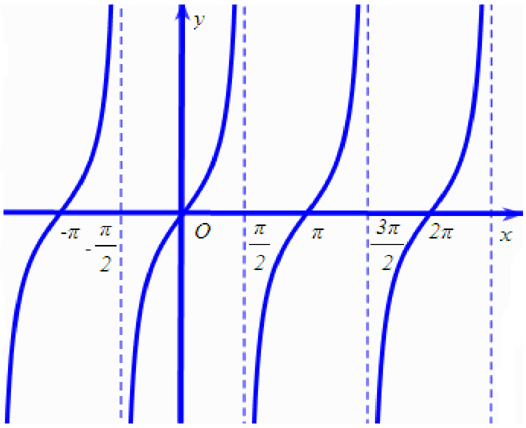
Sự biến thiên: Khi cho $x=(OA,OM)$ tăng từ $-\frac{\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$ thì điểm M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ B' đến B (không kể B' và B). Khi đó điểm T thuộc trục tang sao cho $\overline{AT}=\tan x$ chạy dọc theo At, nên $\tan x$ tăng từ $-\infty$ đến $+\infty$ (qua giá trị 0 khi $x=0$).

Giải thích: $\tan x=\overline{AT}$ vì $\tan x=\frac{\overline{MH}}{\overline{OH}}=\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{AT}}{1}=\overline{AT}$

Nhận xét: Hàm số $y=\tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right), k\in\mathbb{Z}$. Đồ thị hàm số $y=\tan x$ nhận mỗi đường thẳng $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận.

Đồ thị hàm số:

Nhận xét: Do hàm số $y=\tan x$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$ và tuần hoàn với chu kì π nên khi vẽ đồ thị hàm số $y=\tan x$ trên $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$ ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc tọa độ O, ta được đồ thị hàm số $y=\tan x$ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành.



Hình 1.9

STUDY TIP

Hàm số $y = \tan x$ nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận

GHI NHỚ

Hàm số $y = \tan x$:

- Có tập xác định $D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$ - Là hàm số lẻ

- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π - Có tập giá trị là $\mathbb{R}$

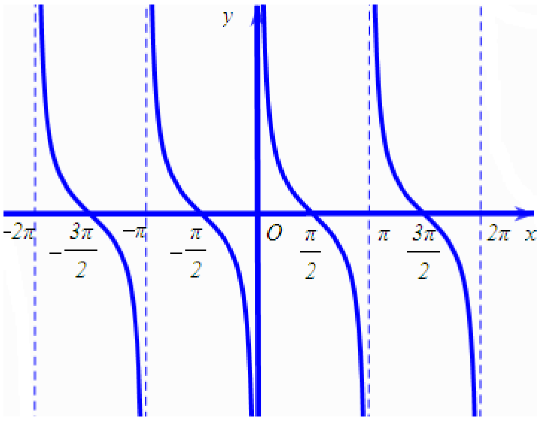
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$

- Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận

b) Hàm số $y = \cot x$

Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi | k \in \mathbb{Z} \}$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì π.

Tương tự khảo sát như đối với hàm số $y = \tan x$ ở trên thì ta có thể vẽ đồ thị hàm số $y = \cot x$ như sau:



Hình 1.10

GHI NHỚ

Hàm số $y=\cot x$:

- Có tập xác định: $D_2=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$ - Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π - Có tập giá trị là $\mathbb{R}$
- Đồng biến trên mỗi khoảng $(k\pi;\pi+k\pi),k\in\mathbb{Z}$
- Đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x=k\pi,(k\in\mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận.

B. Các dạng toán liên quan đến hàm số lượng giác

Dạng 1: **Bài toán tìm tập xác định của hàm số lượng giác**

Cách 1	***Cách 2***
Tìm tập D của x để $f(x)$ có nghĩa, tức là tìm $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)\in\mathbb{R}\}$.	Tìm tập E của x để $f(x)$ không có nghĩa, khi đó tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus E$.

CHÚ Ý

A. Với hàm số $f(x)$ cho bởi biểu thức đại số thì ta có:

1. $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, điều kiện: * $f_1(x)$ có nghĩa

* $f_2(x)$ có nghĩa và $f_2(x)\neq 0$.

2. $f(x)=\sqrt[2m]{f_1(x)},(m\in\mathbb{N})$, điều kiện: $f_1(x)$ có nghĩa và $f_1(x)\geq 0$.

3. $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{\sqrt[2m]{f_2(x)}},(m\in\mathbb{N})$, điều kiện: $f_1(x),f_2(x)$ có nghĩa và $f_2(x)>0$.

B. Hàm số $y=\sin x; y=\cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$, như vậy

$y=\sin[u(x)]; y=\cos[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định.

* $y=\tan[u(x)]$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x)\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$.

* $y=\cot[u(x)]$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x)\neq +k\pi;k\in\mathbb{Z}$.

STUDY TIP

Ở phần này chúng ta chỉ cần nhớ kĩ điều kiện xác định của các hàm số cơ bản như sau:

1. Hàm số $y=\sin x$ và $y=\cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$.

2. Hàm số $y=\tan x$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

3. Hàm số $y=\cot x$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\left\{k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ví dụ 1. Tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{2\cos x-1}$ là:

A. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi,\frac{5\pi}{3}+k2\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi,\frac{5\pi}{3}+k2\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{5\pi}{3}+k2\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Chọn A.

Lời giải

Cách 1: Hàm số đã cho xác định khi

$$2\cos x-1\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq\cos\frac{\pi}{3}\\ \cos x\neq\cos\frac{5\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x\neq\frac{5\pi}{3}+k2\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z}.$$

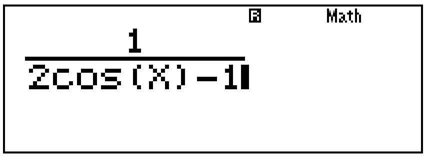
Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay tính giá trị của hàm số $y=\frac{1}{2\cos x-1}$ tại $x=\frac{\pi}{3}$ và $x=\frac{5\pi}{3}$ ta thấy hàm số đều không xác định, từ đây ta chọn **A**.

STUDY TIP

Đối với hàm côsin, trong một chu kỳ tuần hoàn của hàm số $[0;2]$ tồn tại hai góc có số đo là $\frac{\pi}{3}$ và $\frac{5\pi}{3}$ cùng thỏa mãn $\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$ chính vì thế ta kết luận được điều kiện như vậy.

Cách bấm như sau:

Nhập vào màn hình $\frac{1}{2\cos(X)-1}$:



Ấn r gán $X=\frac{\pi}{3}$ thì máy báo lỗi, tương tự với trường hợp $X=\frac{5\pi}{3}$.

Từ đây suy ra hàm số không xác định tại $\frac{\pi}{3}$ và $\frac{5\pi}{3}$.

Ví dụ 2. Tập xác định của hàm số $y=\frac{\cot x}{\sin x-1}$ là:

A. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{k\frac{\pi}{2} \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi;\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Chọn C.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định khi

+ $\cot x$ xác định $\Leftrightarrow \sin x\neq 0$

+ $\sin x-1\neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\neq 0\\ \sin x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\neq k\pi\\ x\neq \frac{\pi}{2}+k2\pi\end{cases}, k\in\mathbb{Z}.$$

STUDY TIP

Trong bài toán này, nhiều độc giả có thể chỉ sử dụng điều kiện để hàm phân thức xác định $(\sin x-1\neq 0)$ chứ không chú ý điều kiện để hàm $\cot x$ xác định, sẽ bị thiếu điều kiện và chọn D là sai.

Ví dụ 3. Tập hợp $\mathbb{R}\backslash\{k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$ không phải là tập xác định của hàm số nào?

A. $y=\frac{1-\cos x}{\sin x}$.

B. $y=\frac{1-\cos x}{2\sin x}$.

C. $y=\frac{1+\cos x}{\sin 2x}$.

D. $y=\frac{1+\cos x}{\sin x}$.

Chọn C.

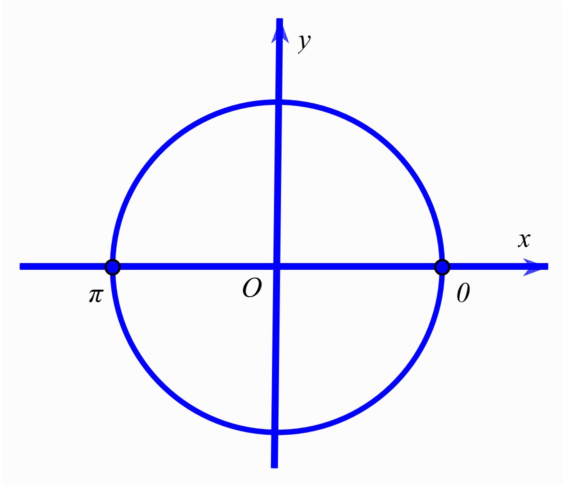
Lời giải

$$\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x\neq \sin 0\\ \sin 2x\neq \sin \pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x\neq k2\pi\\ 2x\neq \pi+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\neq k\pi\\ x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow x\neq \frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$$

$$\sin x\neq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x\neq \sin 0\\ \sin x\neq \sin \pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\neq k2\pi\\ x\neq \pi+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Phân tích: Với các bài toán dạng này nếu ta để ý một chút thì sẽ thấy hàm $\cos x$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$. Nên ta chỉ xét mẫu số, ở đây có đến ba phương án có mẫu số có chứa $\sin x$ như nhau là $A;D$ và B. Do đó ta chọn được luôn đáp án C

Trong ví dụ trên ta có thể gộp hai họ nghiệm $k2\pi$ ***và*** $\pi+k2\pi$ ***thành*** $k\pi$ ***dựa theo lý thuyết sau:***



Hình 1.11

Mỗi cung (hoặc góc) lượng giác được biểu diễn bởi một điểm trên đường tròn lượng giác

$*x=\alpha+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ được biểu diễn bởi một điểm trên đường tròn lượng giác.

$*x=\alpha+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ được biểu diễn bởi hai điểm đối xứng nhau qua O trên đường tròn lượng giác.

$*x=\alpha+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$ được biểu diễn bởi ba điểm cách đều nhau, tạo thành 3 đỉnh của một tam giác đều nội tiếp đường tròn lượng giác.

$*x=\alpha+\frac{k2\pi}{n}, k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^*$ được biểu diễn bởi n điểm cách đều nhau, tạo thành n đỉnh của một đa giác đều nội tiếp đường tròn lượng giác.

Giải thích cách gộp nghiệm ở ví dụ 3 ta có

Trên hình 1.11 hai chấm tròn đen là điểm biểu diễn hai nghiệm ta tìm được ở ví dụ 3. Từ đây nếu gộp nghiệm lại thì ta sẽ có $x=0+\frac{k2\pi}{2}=k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 4. Tìm tập xác định của hàm số $y=\sin\frac{1}{x}+2x$

A. $D=[-2;2]$. **B.** $D=[-1;1]\backslash\{0\}$. **C.** $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số đã cho xác định khi $\sin\frac{1}{x}$ xác định $\Leftrightarrow x\neq 0$

STUDY TIP

Ở đây nhiều độc giả nhầm lẫn, thấy hàm số sin và chọn luôn C là sai. Cần chú ý đến điều kiện để $\frac{1}{x}$ xác định.

Ví dụ 5. Tập xác định của hàm số $y=2016\tan^{2017}2x$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $y=2016\tan^{2017}2x=2016.(\tan 2x)^{2017}$

2017 là một số nguyên dương, do vậy hàm số đã cho xác định khi $\tan 2x$ xác định

$\Leftrightarrow 2x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

STUDY TIP

Trong bài này, ta cần thêm kiến thức về tập xác định của hàm số lũy thừa ở lớp 12: Tập xác định của hàm số $y=x^{\alpha}$ tùy thuộc vào giá trị của α.

* Với α nguyên dương thì tập xác định là $\mathbb{R}$.
* Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
* Với α không nguyên, tập xác định là $(0;+\infty)$.

Ví dụ 6. Tập xác định của hàm số $y=2016\cot^{2017}2x$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn B.

Tương tự như ví dụ 5, ta có hàm số xác định khi $\cot 2x$ xác định

$\Leftrightarrow 2x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 7. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{1-\cos 2017x}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

B. $D=\mathbb{R}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số $y=\sqrt{1-\cos 2017x}$ xác định khi $1-\cos 2017x \ge 0$.

Mặt khác ta có $-1 \le \cos 2017x \le 1$ nên $1-\cos 2017x \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

STUDY TIP

Với các bài toán chứa căn thức ta chú ý các hệ số tự do để áp dụng các bất đẳng thức cơ bản như $-1 \le \sin x; \cos x \le 1, \ldots$

Ví dụ 8. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{2}{\sqrt{2-\sin 6x}}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

B. $D=\mathbb{R}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\sin 6x<2 \Leftrightarrow 2-\sin 6x>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Vậy hàm số đã cho xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Một dạng khác của bài toán liên quan đến tìm tập xác định của hàm lượng giác như sau:

Ví dụ 9. Để tìm tập xác định của hàm số $y=\tan x+\cos x$, một học sinh đã giải theo các bước sau:

Bước 1: Điều kiện để hàm số có nghĩa là $\begin{cases}\sin x\ne 0\\ \cos x\ne 0\end{cases}$.

Bước 2: $\Leftrightarrow \begin{cases}x\ne \dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\ne k\pi\end{cases}; (k\in\mathbb{Z})$.

Bước 3: Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi; k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài giải của bạn đó đúng chưa? Nếu **sai**, thì **sai** bắt đầu ở bước nào?

A. Bài giải đúng.

B. Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2.

D. Sai từ bước 3.

Lời giải

Chọn B.

Nhận thấy hàm số đã cho xác định khi $\tan x$ xác định (do $\cos x$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$).

Do vậy hàm số xác định khi $\cos x\ne 0 \Leftrightarrow x\ne \dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 10. Hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x+1}}$ xác định khi và chỉ khi

A. $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $x\in\mathbb{R}$.

C. $x=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

D. $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn A.

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow \sin x + 1 > 0 \Leftrightarrow \sin x > -1 \Leftrightarrow \sin x \neq -1$ (do $\sin x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Dạng chứa tham số trong bài toán liên quan đến tập xác định của hàm sô lượng giác.

Với $S \subset D_f$ (là tập xác định của hàm số $f(x)$) thì

$* f(x) \leq m, \forall x \in S \Leftrightarrow \max\limits_S f(x) \leq m$. $* f(x) \geq m, \forall x \in S \Leftrightarrow \min\limits_S f(x) \geq m$.

$*$ $\exists x_0 \in S, f(x_0) \leq m \Leftrightarrow \min\limits_S f(x) \leq m$ $*$ $\exists x_0 \in S, f(x_0) \geq m \Leftrightarrow \max\limits_S f(x) \geq m$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $h(x) = \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x - 2m\sin x.\cos x}$ .Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số xác định với mọi số thực x (trên toàn trục số) là

A. $-\dfrac{1}{2} \leq m \leq \dfrac{1}{2}$. **B.** $0 \leq m \leq \dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{2} \leq m \leq 0$. **D.** $m \leq \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Xét hàm số $g(x) = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 - m\sin 2x$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x - m\sin 2x$$

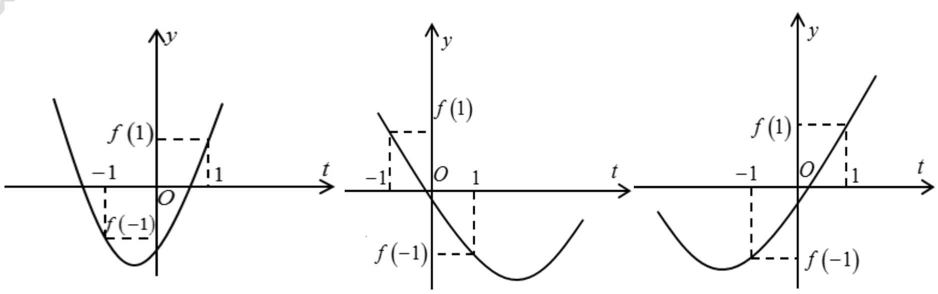
$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - m\sin 2x.$$

Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow t \in [-1;1]$.

Hàm số $h(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}t^2 - mt + 1 \geq 0, \forall t \in [-1;1]$

$\Leftrightarrow t^2 + 2mt - 2 \leq 0, \forall t \in [-1;1]$.

Đặt $f(t) = t^2 + 2mt - 2$ trên $[-1;1]$.



Đồ thị hàm số có thể là một trong ba đồ thị trên.

Ta thấy $\max\limits_{[-1;1]} f(t) = f(1)$ hoặc $\max\limits_{[-1;1]} f(t) = f(-1)$

Ycbt $f(t) = t^2 + 2mt - 2 \le 0, \forall t \in [-1;1] \Leftrightarrow \max\limits_{[-1;1]} f(t) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) \le 0 \\ f(-1) \le 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 + 2m \le 0 \\ -1 - 2m \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m \le \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{3x}{\sqrt{2\sin^2 x - m\sin x + 1}}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

A. $m \in \left[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right]$. **B.** $m \in \left(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$.

C. $m \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}; +\infty\right)$. **D.** $m \in \left\{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right\}$.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $2\sin^2 x - m\sin x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow t \in [-1;1]$

Lúc này ta đi tìm điều kiện của m để $f(t) = 2t^2 - mt + 1 > 0, \forall t \in [-1;1]$

Ta có $\Delta_t = m^2 - 8$

TH 1: $\Delta_t < 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 < 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$. Khi đó $f(t) > 0, \forall t$ (thỏa mãn).

TH 2: $\Delta_t = 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2\sqrt{2} \\ m = 2\sqrt{2} \end{array}\right.$ (thử lại thì cả hai trường hợp đều không thỏa mãn).

TH 3: $\Delta_t > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2\sqrt{2} \\ m > 2\sqrt{2} \end{array}\right.$ khi đó tam thức $f(t) = 2t^2 - mt + 1$ có hai nghiệm phân biệt $t_1; t_2 \ (t_1 < t_2)$.

Để $f(t) > 0, \forall t \in [-1;1]$ thì $\left[\begin{array}{l} t_1 \ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{m - \sqrt{m^2 - 8}}{4} \ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 8} \ge m - 4 \ (VN) \\ t_2 \le -1 \Leftrightarrow \dfrac{m + \sqrt{m^2 - 8}}{4} \le -1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 8} \le -m - 4 \ (VN) \end{array}\right.$.

Vậy $m \in \left(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý: Với các bài toán dạng này ta cần chia ba trường hợp để tìm đủ các giá trị của m.
Ở bài toán trên trong **TH3** đã áp dụng qui tắc xét dấu tam thức bậc hai "trong trái ngoài cùng". Tức là trong khoảng hai nghiệm thì cùng dấu với hệ số a, còn khoảng hai nghiệm thì trái dấu với hệ số a.

Dạng 2: Xét Tính Chẵn Lẻ Của Hàm Số Lượng Giác.

Định Nghĩa.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D.

a, Hàm số $y=f(x)$ được gọi là hàm số chẵn nếu với mọi x thuộc D, ta có $-x\in D$ và $f(-x)=f(x)$.

b, Hàm số $y=f(x)$ được gọi là hàm số lẻ nếu với mọi x thuộc D, ta có $-x\in D$ và $f(-x)=-f(x)$.

STUDY TIP:

Để kết luận hàm số $y=f(x)$ không chẵn không lẻ thì ta chỉ cần chỉ ra điểm $x_0\in D$ sao cho $\begin{cases} f(-x_0)\neq f(x_0) \\ f(-x_0)\neq -f(x_0) \end{cases}$ hoặc chỉ ra tập xác định của $f(x)$ không phải là tập đối xứng.

Phương pháp chung:

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số, khi đó

$*$ Nếu D là tập đối xứng (tức $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$), thì ta thực hiện tiếp bước 2.

$*$ Nếu D không phải tập đối xứng(tức là $\exists x\in D$ mà $-x\notin D$) thì ta kết luận hàm số không chẵn không lẻ.

Bước 2: Xác định $f(-x)$:

$*$ Nếu $f(-x)=f(x),\forall x\in D$ thì kết luận hàm số là hàm số chẵn.

$*$ Nếu $f(-x)=-f(x),\forall x\in D$ thì kết luận hàm số là hàm số lẻ.

$*$ Nếu không thỏa mãn một trong hai điều kiện trên thì kết luận hàm số không chẵn không lẻ.

Các kiến thức đã học về hàm lượng giác cơ bản:

1, Hàm số $y=\sin x$ là hàm số lẻ trên $D=\mathbb{R}$.

2, Hàm số $y=\cos x$ là hàm số chẵn trên $D=\mathbb{R}$.

3, Hàm số $y=\tan x$ là hàm số lẻ trên $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4, Hàm số $y=\cot x$ là hàm số lẻ trên $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

Ví dụ 1. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y=-2\cos x$. **B.** $y=-2\sin x$. **C.** $y=2\sin(-x)$. **D.** $y=\sin x-\cos x$.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1: Với các kiến thức về tính chẵn lẻ của hsố lượng giác cơ bản ta có thể chọn luôn A.

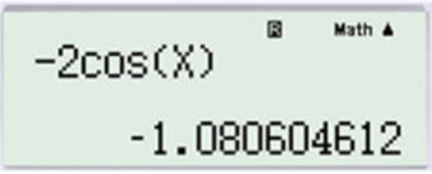
Xét A: Do tập xác định $D=\mathbb{R}$ nên $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$.

Ta có $f(-x)=-2\cos(-x)=-2\cos x=f(x)$. Vậy hàm số $y=-2\cos x$ là hàm số chẵn.

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

Ta có thể thử từng phương án bằng máy tính cầm tay, sử dụng CALC để thử trường hợp x và $-x$.

Với A**:** Nhập vào màn hình hàm số sử dụng CALC với trường hợp $x=1$ (hình bên trái) và trường hợp $x=-1$ (hình bên phải) đều đưa kết quả giống nhau. Vì $f(x)=-f(x)\Rightarrow$ ta chọn luôn **A.**



STUDY TIP:
Khi sử dụng máy tính cầm tay ta nên chú ý cả tập xác định của hàm số xem có phải là tập đối xứng không.

Ví dụ 2. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y=\dfrac{\sin 2x}{2\cos x-3}$ thì $y=f(x)$ là

A. Hàm số chẵn.
B. Hàm số lẻ.
C. Không chẵn không lẻ.
D. Vừa chẵn vừa lẻ.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

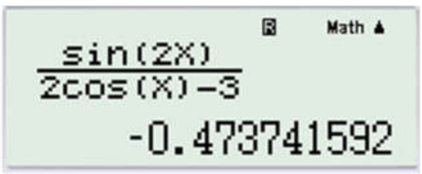
Ta có $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

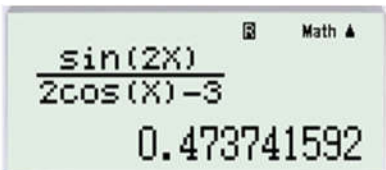
$f(-x)=\dfrac{\sin(-2x)}{2\cos(-x)-3}=\dfrac{-\sin 2x}{2\cos x-3}=-f(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

Ta có thể thử từng phương án bằng máy tính cầm tay, sử dụng CALC để thử trường hợp x và $-x$.

Với **A:** Nhập biểu thức của hàm số vào màn hình sử dụng CALC với trường hợp $x=1$ (hình bên trái) và trường hợp $x=-1$ (hình bên phải), ta thấy $f(1)=-f(-1)\Rightarrow$ hàm số đã cho là hàm số lẻ.





STUDY TIP:
Trong bài toán này, tập xác định $D=\mathbb{R}$ bởi $2\cos x-3<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y=f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, ta được $y=f(x)$ là:

A. Hàm số chẵn.
B. Hàm số lẻ.
C. Không chẵn không lẻ.
D. Vừa chẵn vừa lẻ.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1:

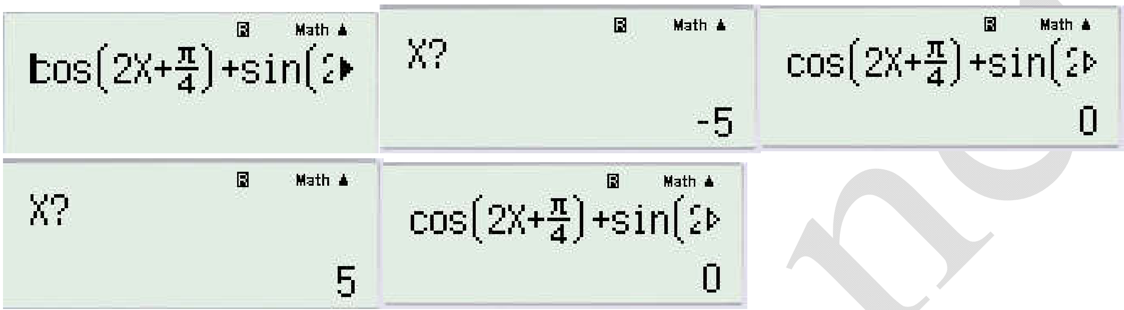
Ta có $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 2x-\sin 2x)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin 2x-\cos 2x)=0$.

Ta có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Hàm số $y=0$ vừa thỏa mãn tính chất của hàm số chẵn, vừa thỏa mãn tính chất của hàm số lẻ, nên đây là hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

Tương tự các bài toán trên ta nhập hàm số và sử dụng CALC để thử thì thấy cả hai trường hợp đều ra kết quả là 0. Mà $y=0$ vừa là hàm số chẵn, vừa là hàm số lẻ vừa là hàm hằng nên ta chọn **D.**



STUDY TIP:
Hàm số $y=0$ vừa là hàm số chẵn, vừa là hàm số lẻ vừa là hàm hằng.

Ví dụ 4. Cho hai hàm số $f(x)=\frac{1}{x-3}+3\sin^2 x$ và $g(x)=\sin\sqrt{1-x}$. Kết luận nào sau đây đúng về tính chẵn lẻ của hai hàm số này?

A. Hai hàm số $f(x);g(x)$ là hai hàm số lẻ.

B. Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn; hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ.

C. Hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ; hàm số $g(x)$ là hàm số không chẵn không lẻ.

D. Cả hai hàm số $f(x);g(x)$ đều là hàm số không chẵn không lẻ.

Lời giải

Chọn D.

a, Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{x-3}+3\sin^2 x$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Ta có $x=-3\in D$ nhưng $-x=3\notin D$ nên D không có tính đối xứng. Do đó ta có kết luận hàm số $f(x)$ không chẵn không lẻ.

b, Xét hàm số $g(x)=\sin\sqrt{1-x}$ có tập xác định là $D_2=[1;+\infty)$. Dễ thấy D_2 không phải là tập đối xứng nên ta kết luận hàm số $g(x)$ không chẵn không lẻ.

Vậy chọn **D.**

STUDY TIP:

Khi xét tính chẵn lẻ của hàm số ta cần chú ý xét tập xác định đầu tiên để giải quyết bài toán một cách chính xác.

Ví dụ 5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\sin^{2007}x+\cos nx$, với $n\in\mathbb{Z}$. Hàm số $y=f(x)$ là:

A. Hàm số chẵn. **B.** Hàm số lẻ.

C. Không chẵn không lẻ. **D.** Vừa chẵn vừa lẻ.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f(-x)=\sin^{2007}(-x)+\cos(-nx)=-\sin^{2007}x+\cos nx\neq\pm f(x)$.

Vậy hàm số đã cho không chẵn không lẻ.

Ví dụ 6. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sin^{2004n}x+2004}{\cos x}$, với $n\in\mathbb{Z}$. Xét các biểu thức sau:

1, Hàm số đã cho xác định trên $D=\mathbb{R}$.
2, Đồ thị hàm số đã cho có trục đối xứng.
3, Hàm số đã cho là hàm số chẵn.
4, Đồ thị hàm số đã cho có tâm đối xứng.
5, Hàm số đã cho là hàm số lẻ.
6, Hàm số đã cho là hàm số không chẵn không lẻ.

Số phát biểu đúng trong sáu phát biểu trên là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số đã xác định khi $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ Vậy phát biểu 1 sai.

Ở đây ta cần chú ý : các phát biểu 2; 3; 4; 5; 6 để xác định tính đúng sai ta chỉ cần đi xét tính chẵn lẻ của hàm số đã cho.

Ta có tập xác định của hàm số trên là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ là tập đối xứng.

$$f(-x)=\frac{\sin^{2004n}(-x)+2004}{\cos(-x)}=\frac{\sin^{2004n}x+2004}{\cos x}=f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn. Suy ra đồ thị hàm số đối xứng qua trục Oy. Vậy chỉ có phát biểu 2 và 3 là phát biểu đúng. Từ đây ta chọn **B.**

STUDY TIP

Đồ thị hàm số lẻ thì đối xứng qua tâm O.

Đồ thị hàm số chẵn thì đối xứng qua trục Oy.

Ví dụ 7. Cho hàm số $f(x)=|x|\sin x$. Phát biểu nào sau đây là đúng về hàm số đã cho?

A. Hàm số đã cho có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

B. Đồ thị hàm số đã cho có tâm đối xứng.

C. Đồ thị hàm số đã cho có trục xứng.

D. Hàm số có tập giá trị là $[-1;1]$.

Lời giải

Chọn B.

Hàm số đã cho xác định trên tập $D=\mathbb{R}$ nên ta loại A.

Tiếp theo để xét tính đối xứng của đồ thị hàm số ta xét tính chẵn lẻ của hàm số đã cho.

$f(-x)=|-x|\sin(-x)=-|x|\sin x=-f(x)$. Vậy đồ thị hàm số đối xứng qua gốc tọa độ O.

Vậy ta chọn đáp án **B**.

STUDY TIP
Với bài toán này ta nên xét B và C trước thay vì xét lần lượt A, B, C, D.

Ví dụ 8. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=f(x)=3m\sin 4x+\cos 2x$ là hàm chẵn.

A. $m>0$. **B.** $m<-1$. **C.** $m=0$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

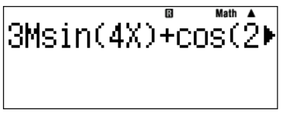
Ta có $f(-x)=3m\sin 4(-x)+\cos 2(-x)=-3m\sin 4x+\cos 2x$.

Để hàm số đã cho là hàm chẵn thì

$$f(-x)=f(x),\forall x\in D\Leftrightarrow -3m\sin 4x+\cos 2x=3m\sin 4x+\cos 2x,\forall x\in D$$
$$\Leftrightarrow 4m\sin 4x=0,\forall x\in D\Leftrightarrow m=0.$$

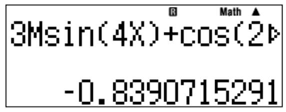
Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

Với bài toán này ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để thử các giá trị. Với A và C, ta thử một trường hợp để loại hai đáp án còn lại, tương tự với B và D. Ở đây ta sử dụng CALC để thử tại giá trị x và $-x$.



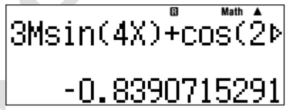
Ví dụ: Nhập vào màn hình như hình bên.

Ấn CALC để gán các giá trị cho m. Ta thử với $m=0$ thì ấn $\boxed{0}$ $\boxed{=}$



Chọn x bất kì, sau đó làm lại lần nữa và gán x cho $-x$ ban đầu và so sánh (ở đây ta thử với $x=5$ và tại -5).

Ta thấy $f(-x)=f(x)$. Vậy C đúng. Ta chọn luôn C và loại các phương án còn lại.



***DẠNG 3.* Xét tính đơn điệu của hàm số lượng giác**

Phương pháp chung:

Ở phần lý thuyết, với các hàm số lượng giác cơ bản, ta đã biết rằng:

1. Hàm số $y=\sin x$:

 * Đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right), k\in\mathbb{Z}$.

 * Nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right), k\in\mathbb{Z}$.

2. Hàm số $y=\cos x$:

 * Đồng biến trên các khoảng $\left(-\pi+k2\pi; k2\pi\right), k\in\mathbb{Z}$.

 * Nghịch biến trên các khoảng $\left(k2\pi; \pi+k2\pi\right), k\in\mathbb{Z}$.

3. Hàm số $y=\tan x$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right), k\in\mathbb{Z}$.

4. Hàm số $y=\cot x$ nghịch biến trên các khoảng $\left(k\pi; \pi+k\pi\right), k\in\mathbb{Z}$.

Với các hàm số lượng giác phức tạp, để xét tính đơn điệu của nó ta sử dụng định nghĩa.

Ví dụ 1. Xét hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $[-\pi;0]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

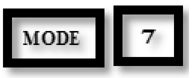
Lời giải

Chọn A.

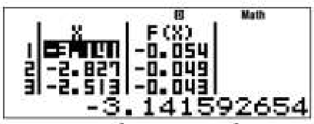
Cách 1: Từ lý thuyết về các hàm số lượng giác cơ bản ở trên ta có hàm số $y=\sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

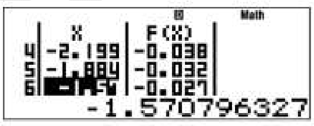
Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

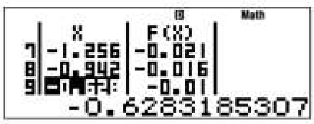
Do ở đề bài, các phương án A, B, C, D chỉ xuất hiện hai khoảng là $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ nên ta sẽ dùng máy tính cầm tay chức năng MODE 7: TABLE để giải bài toán.

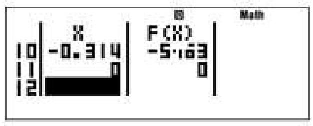
Ấn 

Máy hiện $f(X)=$ thì ta nhập $\sin X$. START? Nhập $-\pi$; END? Nhập 0. STEP? Nhập $\frac{\pi}{10}$.









Lúc này từ bảng giá trị của hàm số ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

Ví dụ 2. Xét hàm số $y=\cos x$ trên đoạn $[-\pi;\pi]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\pi;0)$ và $(0;\pi)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\pi;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0;\pi)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\pi;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\pi;0)$ và $(0;\pi)$.

Lời giải

Chọn B.

Theo lý thuyết ta có hàm số $y=\cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi),k\in\mathbb{Z}$ và nghịch biến trên khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi),k\in\mathbb{Z}$. Từ đây ta có với $k=0$ hàm số $y=\cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0;\pi)$.

Tiếp theo ta đến với hàm số $y=\tan nx;(n\in\mathbb{Z}),...$ Ta có ví dụ 3.

Ví dụ 3. Xét sự biến thiên của hàm số $y=\tan 2x$ trên một chu kì tuần hoàn. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số đã cho luôn đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Hàm số $y=\tan 2x$ tuần hoàn với chu kì $\frac{\pi}{2}$, dựa vào các phương án A; B; C; D thì ta sẽ xét tính đơn điệu của hàm số trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$.

Dựa theo kết quả khảo sát sự biến thiên của hàm số $y=\tan x$ ở phần lý thuyết ta có thể suy ra với hàm số $y=\tan 2x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

STUDY TIP

Ở đây ta không chọn C vì hàm số không liên tục trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, hàm số bị gián đoạn tại $x=\frac{\pi}{4}$ (tức là hàm số không xác định tại $x=\frac{\pi}{4}$).

Ví dụ 4. Xét sự biến thiên của hàm số $y=1-\sin x$ trên một chu kì tuần hoàn của nó. Trong các kết luận sau, kết luận nào sai?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ 2π và kết hợp với các phương án đề bài thì ta sẽ xét sự biến thiên của hàm số trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ta có hàm số $y=\sin x$:

* Đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

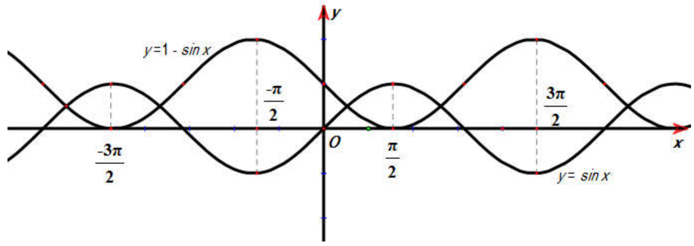
* Nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

Từ đây suy ra hàm số $y=1-\sin x$:

* Nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

* Đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$. Từ đây ta chọn D.

Dưới đây là đồ thị của hàm số $y=1-\sin x$ và hàm số $y=\sin x$ trên $\mathbb{R}$.



Ví dụ 5. Xét sự biến thiên của hàm số $y=\sin x-\cos x$. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$.

C. Hàm số đã cho có tập giá trị là $\left[-1;1\right]$.

D. Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1:

Ta có $y=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Từ đây ta có thể loại đáp án C, do tập giá trị của hàm số là $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ 2π do vậy ta xét sự biến thiên của hàm số trên đoạn

$\left[-\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]$.

Ta có:

* Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$.

* Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$. Từ đây ta chọn A.

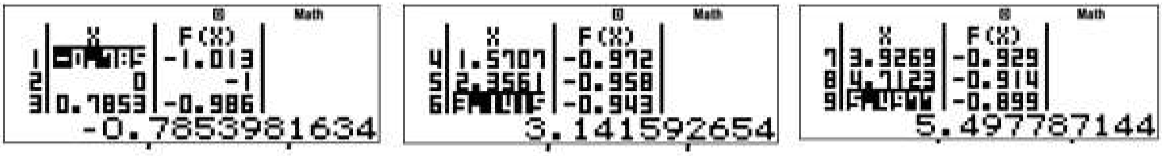
Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay

Tương tự như ở ví dụ 1, ta sẽ sử dụng máy tính cầm tay chức năng MODE 7: TABLE để giải bài toán.

Ấn MODE 7

Máy hiện $f(X)=$ thì ta nhập $\sin X-\cos X$. Chọn STAR; TEND; STEP

phù hợp ta sẽ có kết quả như hình dưới:



Từ bảng giá trị của hàm số $f(x)$ trên ta thấy khi x chạy từ $-\frac{\pi}{4}\approx -0,785$ đến

$\frac{3\pi}{4}\approx 2,3561$ thì

giá trị của hàm số tăng dần, tức là hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$.

Phân tích thêm: Khi x chạy từ $\frac{3\pi}{4}$ đến $\frac{7\pi}{4}\approx 5,49778$ thì giá trị của hàm số giảm dần, tức là

hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$.

STUDY TIP

Ta chú ý ở đây có $-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4}$ nên ta có thể suy ra STEP phù hợp.

Trong bài gán STEP $=\frac{\pi}{4}$.

Ví dụ 6. Chọn câu đúng?

A. Hàm số $y=\tan x$ luôn luôn tăng.

B. Hàm số $y=\tan x$ luôn luôn tăng trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số $y=\tan x$ tăng trong các khoảng $(\pi+k2\pi;2\pi+k2\pi),k\in\mathbb{Z}$.

D. Hàm số $y=\tan x$ tăng trong các khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi),k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

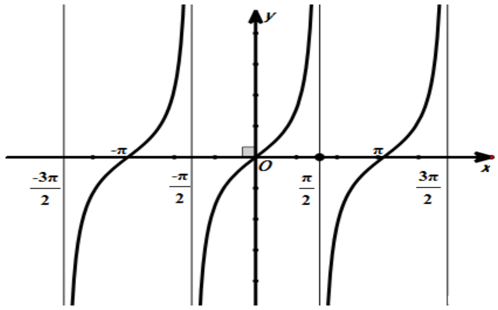
Chọn B.

Với A ta thấy hàm số $y=\tan x$ không xác định tại mọi điểm $x\in\mathbb{R}$ nên tồn tại các điểm làm

cho hàm số bị gián đoạn nên hàm số không thể luôn tăng.

Với B ta thấy B đúng vì hàm số $y=\tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),k\in\mathbb{Z}.$

Từ đây loại C và D.



Ví dụ 7. Xét hai mệnh đề sau:

(I) $\forall x\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$: Hàm số $y=\frac{1}{\sin x}$ giảm.

(II) $\forall x\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$: Hàm số $y=\frac{1}{\cos x}$ giảm.

Mệnh đề đúng trong hai mệnh đề trên là:

A. Chỉ (I) đúng . **B.** Chỉ (II) đúng . **C.** Cả 2 sai . **D.** Cả 2 đúng .

Lời giải

Chọn B.

Cách 1:

Như bài toán xét xem hàm số tăng hay giảm. Ta lấy $x_1<x_2\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$

Lúc này ta có $f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{\sin x_2}-\frac{1}{\sin x_1}\ \frac{\sin x_1-\sin x_2}{\sin x_1\sin x_2}$

Ta thấy $x_1<x_2\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\sin x_1>\sin x_2\Rightarrow\sin x_1-\sin x_2>0$

$0>\sin x_1>\sin x_2\Rightarrow\frac{\sin x_1-\sin x_2}{\sin x_1.\sin x_2}>0\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Vậy $y=\frac{1}{\sin x}$ là hàm tăng.

Tương tự ta có $y=\frac{1}{\cos x}$ là hàm giảm. Vậy I sai, II đúng.

Cách 2:

Sử dụng lệnh TABLE để xét xem hàm số tăng hay giảm trên máy tính.

Với hàm $\frac{1}{\sin x}$ ta nhập MODE 7: TABLE ($\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$)

Nhập hàm $f(x)$ như hình bên:

$\frac{\blacklozenge}{\blacklozenge}$	1	∇	SIN	ALPHA	)	)	=

START? π ; END? $\frac{3\pi}{2}$. STEP? $\frac{\pi}{10}$.

Của hàm số $y=\frac{1}{\sin x}$ như hình bên. Ta thấy giá trị của hàm số tăng dần khi x chạy từ π đến $\frac{3\pi}{2}$. Nên ta kết luận trên $\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ hàm số $y=\frac{1}{\sin x}$ tăng.

Tương tự với II và kết luận.

Ví dụ 8. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $y=|\tan x|$ đồng biến trong $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

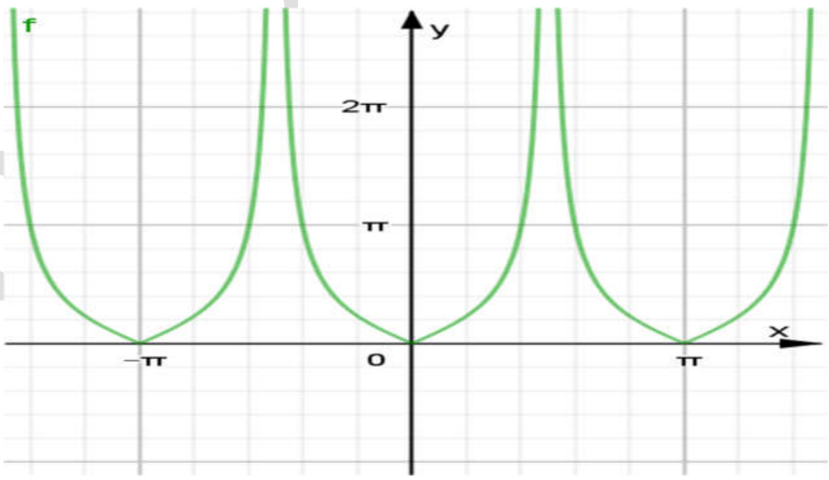
B. $y=|\tan x|$ là hàm số chẵn trên $D=R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in Z\right\}$.

C. $y=|\tan x|$ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

D. $y=|\tan x|$ luôn nghịch biến trong $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B.



Ta được đồ thị như hình vẽ trên. Ta thấy hàm số $y=|\tan x|$ nghịch biến trên $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ và đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Nên ta loại A và D.

Với B ta có $f(-x)=|\tan(-x)|=|\tan x|=f(x)\Rightarrow$ hàm số $y=|\tan x|$ là hàm số chẵn.

Với C ta thấy đồ thị hàm số đã cho không đối xứng qua gốc tọa độ, từ đây ta chọn B.

STUDY TIP

Ta suy diễn đồ thị hàm hàm số $y=|f(x)|$ từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ từ đó suy ra khoảng đơn điệu của hàm số $y=|f(x)|$.

-Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm phía trên trục Ox.

-Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ phía dưới trục Ox qua Ox.

-Hợp hai phần trên ta được đồ thị hàm số $y=|f(x)|$.

STUDY TIP

Với bài toán này ta có thể không suy diễn đồ thị mà làm theo hướng tư duy sau:

-Với A: $y=|\tan x|$ không xác định tại $x=\pm\frac{\pi}{2}$ nên không thể đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

-Từ B suy ra C;D sai.

DẠNG 4. **Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số lượng giác.**

*Các kiến thức về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên miền $D\subset R$.

1. Số thực M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x)\le M, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=M \end{cases}$$

2. Số thực N được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x)> m, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=m \end{cases}$$

Một số kiến thức ta sử dụng trong các bài toán này:

1. Tính bị chặn của hàm số lượng giác.
2. Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc nhất giữa $\sin$ và $\cos$.
3. Bảng biến thiên của hàm số lượng giác.
4. Kỹ thuật sử dụng máy tính cầm tay.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=2017\cos(8x+\frac{10\pi}{2017})+2016$.

A. $\min y=1; \max y=4033$. **B.** $\min y=-1; \max y=4033$.

C. $\min y=1; \max y=4022$. **D.** $\min y=-1; \max y=4022$.

Phân tích

Ta có các bước để giải quyết bài toán như sau:

Bước 1: Chỉ ra $f(x) \le M, \forall x \in D$.

Bước 2 : Chỉ ra $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$ **.**

Kết luận : $\max\limits_{D} f(x) = M$

Tương tự với tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Hàm số xác định trên R .

Ta có $-1 \le \cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) \le 1, \forall R$.

$\Leftrightarrow -2017 \le 2017\cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) + 2016 \le 4033, \forall \in R$.

$\Leftrightarrow -1 \le 2017\cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) + 2016 \le 4033, \forall \in R$

Ta có $y = -1$ khi $\cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) = -1$; $y = 4033$ khi $\cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) = 1$.

Vậy $\min y = -1; \max y = 4033$.

Cách 2: sử dụng máy tính cầm tay.

Trong bốn phương án chỉ có hai giá trị max là $4022; 4033$.

Chỉ có hai giá trị min là 1;-1.

Lúc này ta sử dụng chức năng SHIFT CALC để thử giá trị:

Ví dụ ta nhập vào màn hình $2017\cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) + 2016 = 4033$ ta thấy phương trình có nghiệm.

Tương tự nhập $2017\cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) + 2016 = -1$ ta thấy phương trình có nghiệm.

Từ đây ta chọn **B**.

> **STUDY TIP**
> Trong bài toán ta chọn thử hai giá trị trên vì 4033 là giá trị lớn hơn và -1 là giá trị nhỏ hơn nên ta thử trước. Nếu phương trình không có nghiệm thì sẽ là trường hợp còn lại.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 1$

A. $\min y = 0; \max y = 4$ **B.** $\min y = 1 - \sqrt{3}; \max y = 3 + \sqrt{3}$.

C. $\min y = -4; \max y = 0$. **D.** $\min y = -1 + \sqrt{3}; \max y = 3 + \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Để sử dụng tính bị chặn của hàm số ở trong STUDY TIP ta đưa ra ở trên, ta sẽ đưa $y = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 1$ về theo $\sin u(x)$ hoặc $\cos u(x)$.

Ta có $y = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 1 = 2\cos^2 x - 1 - \sqrt{3}\sin 2x + 2 = \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x + 2\,(*)$

$= 2\left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) + 2 = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$

Mặt khác $-1 \le 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2 \le 4, \forall x \in R \Leftrightarrow 0 \le y \le 4, \forall x \in R$.

Ta có bài toán tổng quát:

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = a\sin u + b\cos u$ trên R . Với $a, b \in R; a^2 + b^2 > 0$.

Lời giải tổng quát

$y = a\sin u + b\cos u \Rightarrow y = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin u + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos u\right)\sqrt{a^2+b^2}$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = 1 \Rightarrow \exists\, \alpha \in R$ sao cho $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin u.\cos\alpha + \cos u.\sin\alpha\right) \Rightarrow y = \sqrt{a^2+b^2}.\sin\left(u+\alpha\right)$

Vì $-1 \le \sin\left(u+\alpha\right) \le 1 \Rightarrow -\sqrt{a^2+b^2} \le y \le \sqrt{a^2+b^2}$

Ngoài ra ta có thể mở rộng bài toán như sau:

$y = a\sin\left[f(x)\right] + b\cos\left[f(x)\right] + c$. Ta có $-\sqrt{a^2+b^2} + c \le y \le \sqrt{a^2+b^2} + c$

Từ bài toán tổng quát trên ta có thể giải quyết nhanh bài toán ví dụ 2 từ dòng (*) như sau: Ta có $-\sqrt{1+3}+2 \le y \le \sqrt{1+3}+2 \Leftrightarrow 0 \le y \le 4$.

STUDY TIP

Ngoài cách nhớ công thức ở bài toán tổng quát phía bên phải ta có thể nhớ theo điều kiện có nghiệm của phương trình bậc nhất theo sin và cos như sau:

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = a\sin\left[f(x)\right] + b\cos\left[f(x)\right] + c$

$a\sin\left[f(x)\right] + b\cos\left[f(x)\right] + c - y = 0$ điều kiện có nghiệm $a^2 + b^2 \ge (c-y)^2$. Từ đây ta tìm được $\min, \max$ của y.

Ví dụ 3. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 3}{2+\cos x}$

A. $\min y = -\frac{2}{3}; \max y = 2$.

B. $\min y = \frac{2}{3}; \max y = 2$

B. $\min y = \frac{1}{2}; \max y = \frac{3}{2}$

D. $\min y = -\frac{1}{2}; \max y = \frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Ta có $\cos x + 2 > 0, \forall x \in R$.

$y = \frac{\sin x + 2\cos x + 3}{2+\cos x} \Leftrightarrow \sin x + 2\cos x + 3 = 2y + y\cos x \Leftrightarrow \sin x + (2-y)\cos x + 3 - 2y = 0$

Ta sử dụng điều kiện ở STUDY TIP trong bài tổng quát trên.

Ta có $1^2 + (2-y)^2 \ge (3-2y)^2 \Leftrightarrow 4y^2 - 12y + 9 - y^2 + 4y - 4 - 1 \le 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 8y + 4 \le 0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \le y \le 2$

Cách 2 : sử dụng máy tính cầm tay

Tương tự như ở ví dụ 1 thì ta có thể sử dụng SHIFT SOLVE: $\frac{\sin x + 2\cos x + 3}{2 + \cos x} = 2$ thì phương trình có nghiệm. Do 2 là số lớn nhất trong các phương án A;B;C;D nên ta không cần thử trường hợp $\max = \frac{3}{2}$.

Lúc này chỉ còn A và B. Thử với $\min y = -\frac{2}{3}$ thì không có nghiệm.

Từ đây chọn B.

STUDY TIP

Nếu hàm số có dạng $y = \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2}$ ta tìm miền xác định của hàm số rồi quy đồng mẫu số, đưa về dạng phương trình trong STUDY TIP ở phía trên và tiếp tục lời giải.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x}$.

A. $\min y = -1; \max y = 1$.

B. $\min y = 0; \max y = 1$

C. $\min y = -1; \max y = 0$.

D. $\min y = -1; \max y$ không tồn tại.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1 : Ta có $\begin{cases} 0 \le \sqrt[4]{\sin x} \le 1 \\ 0 \le \sqrt{\cos x} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \sqrt[4]{\sin x} \le 1 \\ -1 \le -\sqrt{\cos x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le y \le 1$.

Vậy khi $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = k2\pi; k \in Z$

Cách 2 : sử dụng máy tính cầm tay

STUDY TIP

Nhiều độc giả không lưu ý đổi dấu của bpt thứ hai của hệ khi nhân các vế với -1 dẫn đến chọn đáp án sai.

Ví dụ 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \cot^4 a + \cot^4 b + 2\tan^2 a.\tan^2 b + 2$

A. $\min y = 2$.

B. $\min y = 6$.

C. $\min y = 4$.

D. Không tồn tại GTLN.

Lời giải

Chọn B.

$$P = \left(\cot^2 a - \cot^2 b\right)^2 + 2\cot^2 a.\cot^2 b + 2\tan^2 a.\tan^2 b + 2$$

$$= \left(\cot^2 a - \cot^2 b\right)^2 + 2\left(\cot^2 a.\cot^2 b + \tan^2 a.\tan^2 b - 2\right) + 6$$

$$= \left(\cot^2 a - \cot^2 b\right)^2 + 2\left(\cot^2 a.\cot^2 b + \tan^2 a.\tan^2 b - 2\cot a.\cot b.\tan a.\tan b\right) + 6$$

$$= \left(\cot^2 a - \cot^2 b\right)^2 + 2\left(\cot a.\cot b - \tan a.\tan b\right)^2 + 6 \ge 6$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \cot^2 a = \cot^2 b \\ \cot a.\cot b = \tan a.\tan b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot^2 a = 1 \\ \cot^2 b = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow a=b=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

STUDY TIP:
Với các bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm lượng giác ta có thể đưa về dạng $y=A^2(x)+B\geq B$. Nhưng cần lưu ý xem dấu bằng có xãy ra hay không.

Tiếp theo ta có ví dụ 6 là một câu hỏi khác cho ví dụ 2 như sau

Ví dụ 6. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x.\cos x+1$ trên đoạn $\left[0,\dfrac{7\pi}{12}\right]$ lần lượt là

A. $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=2;\max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=3$.

B. $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=0;\max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=2$.

C. $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=0;\max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=4$.

D. $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=0;\max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=3$.

Lời giải

Chọn B.

Từ ví dụ 2 ta có $y=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2$. Đặt $u=2x+\dfrac{\pi}{3}$

Từ đề bài ta xét $x\in\left[0;\dfrac{7\pi}{12}\right]\Rightarrow u\in\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{3\pi}{2}\right]$

Ta lập BBT của hàm số $y=2\cos u+2$ trên $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

u	$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$2\cos u+2$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right]} f(\mathrm{u})=0$ khi $u=\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}$

$\max\limits_{\left[\frac{\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right]} f(\mathrm{u})=3$ khi $u=\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=0$

Hay $\min\limits_{\left[0;\frac{7\pi}{12}\right]} y=0;\max\limits_{\left[0;\frac{7\pi}{12}\right]} y=3$.

STUDY TIP:

> Với các bài toán tìm min, max của hàm số lượng giác trên một đoạn ta thường phải xét nhanh BBT để giải quyết bài toán. Ở chương trình 11 ta chưa học đạo hàm nên chưa giải quyết được bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm số sử dụng đạo hàm. Sau khi học xong đạo hàm ta sẽ giải quyết bài toán này nhanh chóng hơn.

Ví dụ 7. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin^2 x-\sin x+2$.

A. $\min y=\frac{7}{4};\max y=4$. **B.** $\min y=\frac{7}{4};\max y=2$.

C. $\min y=-1;\max y=1$. **D.** $\min y=\frac{1}{2};\max y=2$.

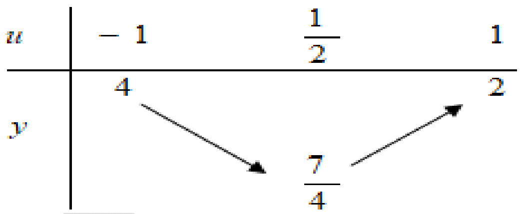
Lời giải

Chọn A.

Đặt $\sin x=u;\ u\in[-1;1]$

Xét hàm số: $y=u^2-u+2$ trên $[-1;1]$.

Ta có: $\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2}\in[-1;1]$. Từ đây có bảng biến thiên



Ta kết luận: $\min\limits_{[-1;1]} f(u)=\frac{7}{4}$ và $\max\limits_{[-1;1]} y=4 \Leftrightarrow u=-1$.

Hay $\min y=\frac{7}{4}\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$ và $\max y=4\Leftrightarrow \sin x=-1$.

Ngoài các phương pháp giải các bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm số lượng giác ta rút ra từ các ví dụ trên ta còn phương pháp sử dụng bất đẳng thức cơ bản. Phương pháp này được coi là một phương pháp khó vì đòi hỏi tính sang tạo và kĩ thuật trong việc sử dụng bất đẳng thức.

Một số bất đẳng thức ta thường dung:

1.Bất đẳng thức AM – GM.

a. Với hai số:

Cho hai số thực a,b là hai số dương, ta có $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ dấu bằng xảy ra khi $a=b$.

b. Với n số:

Cho hai số thực $x_1;x_2;x_3;...;x_n$ là các số dương $n\in N^*$, ta có

$\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1.x_2.x_3...x_n}$ dấu bằng xảy ra khi $x_1=x_2=x_3=...=x_n$.

2. Bất đẳng thức Bunyakovsky

a. Bất đẳng thuwcsBunyakovsky dạng thông thường.

$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\geq\left(ac+bd\right)^2$. Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

b. Bất đẳng thức Bunyakovsky cho bộ hai số

Với hai bộ số $\left(a_1;a_2;...;a_n\right)$ và $\left(b_1;b_2;...;b_n\right)$ ta có

$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2$

STUDY TIP

Ta có thể sử dụng tính chất của tam thức bậc hai để giải các bài toán tìm min max hàm lượng giác như sau:

Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$

+ Nếu $a<0$ thì $ax^2+bx+c\leq\frac{-\Delta}{4a}$ dấu bằng xảy ra khi $x=-\frac{b}{2a}$.

+ Nếu $a>0$ thì $ax^2+bx+c\geq\frac{-\Delta}{4a}$ dấu bằng xảy ra khi $x=-\frac{b}{2a}$.

+ Nếu hàm số đã cho là hàm bậc hai mà điều kiện không phải là $\forall x\in R$ thì ta phải lập BBT để tìm min max

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=....=\frac{a_n}{b_n}$ với quy ước nếu một số b_i nào đó $\left(i=1,2,3\ldots\right)$ bằng 0 thì a_i tương đương bằng 0.

c. Hệ quả của bất đẳng thức Bunyakopvsky ta có $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\geq 4abcd$

Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2x}+\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sin^2x}$

A. $1+\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{22}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$. **D.** $1+\sqrt{5}$.

Đáp án B

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y=\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2x}+\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sin^2x}\Leftrightarrow y=\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2x}+\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2x}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakopvsky cho 4 số: 1; 1; $\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2x}$; $\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2x}$ ta có:

$$1.\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2x}+1.\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2x}\leq\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2x+\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2x}=\sqrt{2}.\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{2.1}}=\frac{\sqrt{22}}{2}$$

Hay $y\leq\frac{\sqrt{22}}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $1+\frac{1}{2}\cos^2 x=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

STUDY TIP

Trong bài toán ta có thể nhanh chóng nhận ra sử dụng bất đẳng thức Bunyakopvsky bởi ở trong căn lần lượt có $\sin^2 x$ và $\cos^2 x$. Ta cân bằng hệ số của $\sin^2 x$ và $\cos^2 x$ để áp dụng tính chất $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Áp dụng Bunyakopvsky thì vế phải sẽ là hằng số, từ đó giải quyết được bài toán.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=\frac{1}{2-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}$ với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{4}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ T

B. $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{2}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}$

C. $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{2}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

D. $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{4}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1: Ta thấy $2-\cos x>0, \forall x\in R$ và $1+\cos x>0, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra $\frac{1}{2-\cos x}$ và $\frac{1}{1+\cos x}$ là hai số dương. Áp dụng vất đẳng thức AM- GM cho hai số dương ta có

$$\frac{1}{2-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}\geq\frac{2}{\sqrt{(2-\cos x)(1+\cos x)}}$$

Mặt khác tiếp tục áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{(2-\cos x)(1+\cos x)}\leq\frac{2-\cos x+1+\cos x}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y\geq\frac{2}{\sqrt{(2-\cos x)(1+\cos x)}}\geq\frac{4}{3}$$

STUDY TIP

Trong bài toán ta có thể nhanh chóng nhận ra sử dụng bất đẳng thức AM-GM bởi vì ta thấy mẫu số của hai phân thức cộng lại sẽ ra hằng số, nên ở đây ta có thể sử dụng bất đẳng thức AM-GM.

Ta có thể giải quyết bài toán theo hướng khác đó là sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu.

Với x, y là hai số thực dương ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ dấu bằng xảy ra khi $x=y$

Vậy $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{4}{3}$, dấu bàng xảy ra khi $\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$ vì $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Cách 2: Để ý đề bài hỏi tìm GTLN, GTNN của hàm số trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Trên đây là hai ví dụ sử dụng bất đẳng thức tìm GTLN, GTNN của hàm số lượng giác mà không có liên hệ cho trước. Ví dụ 10 dưới đây là một ví dụ khó hơn về sử dụng bất đẳng thức kết hợp với lượng giác để giải quyết.

Ví dụ 10. Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = \frac{\pi}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$y = \sqrt{1 + \tan x.\tan y} + \sqrt{1 + \tan y.\tan z} + \sqrt{1 + \tan z.\tan x}$$

A. $y_{\max} = 1 + 2\sqrt{2}$. **B.** $y_{\max} = 3\sqrt{3}$. **C.** $y_{\max} = \sqrt{4}$. **D.** $y_{\max} = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $x + y + z = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x + y = \frac{\pi}{2} - z \Rightarrow \tan(x + y) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \Leftrightarrow \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x.\tan y} = \frac{1}{\tan z}$

$\Leftrightarrow \tan x.\tan z + \tan y.\tan z = 1 - \tan x.\tan y \Leftrightarrow \tan x.\tan z + \tan y.\tan z + \tan x.\tan y = 1$

Ta thấy $\tan x.\tan z$; $\tan y.\tan z$; $\tan x.\tan y$ lần lượt xuất hiện trong hàm số đề cho dưới căn thức, tương tự như ví dụ 8, áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho 6 số ta có: $1.\sqrt{1 + \tan x.\tan y} + 1.\sqrt{1 + \tan y.\tan z} + 1.\sqrt{1 + \tan z.\tan x} \leq$

$\leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}.\sqrt{1.\tan x.\tan z + 1.\tan y.\tan z + 1.\tan x.\tan y} =$

$= \sqrt{3}\sqrt{3 + (\tan x.\tan z + \tan y.\tan z + \tan x.\tan y)} = 2\sqrt{3}$

Vậy $y_{\max} = 2\sqrt{3}$

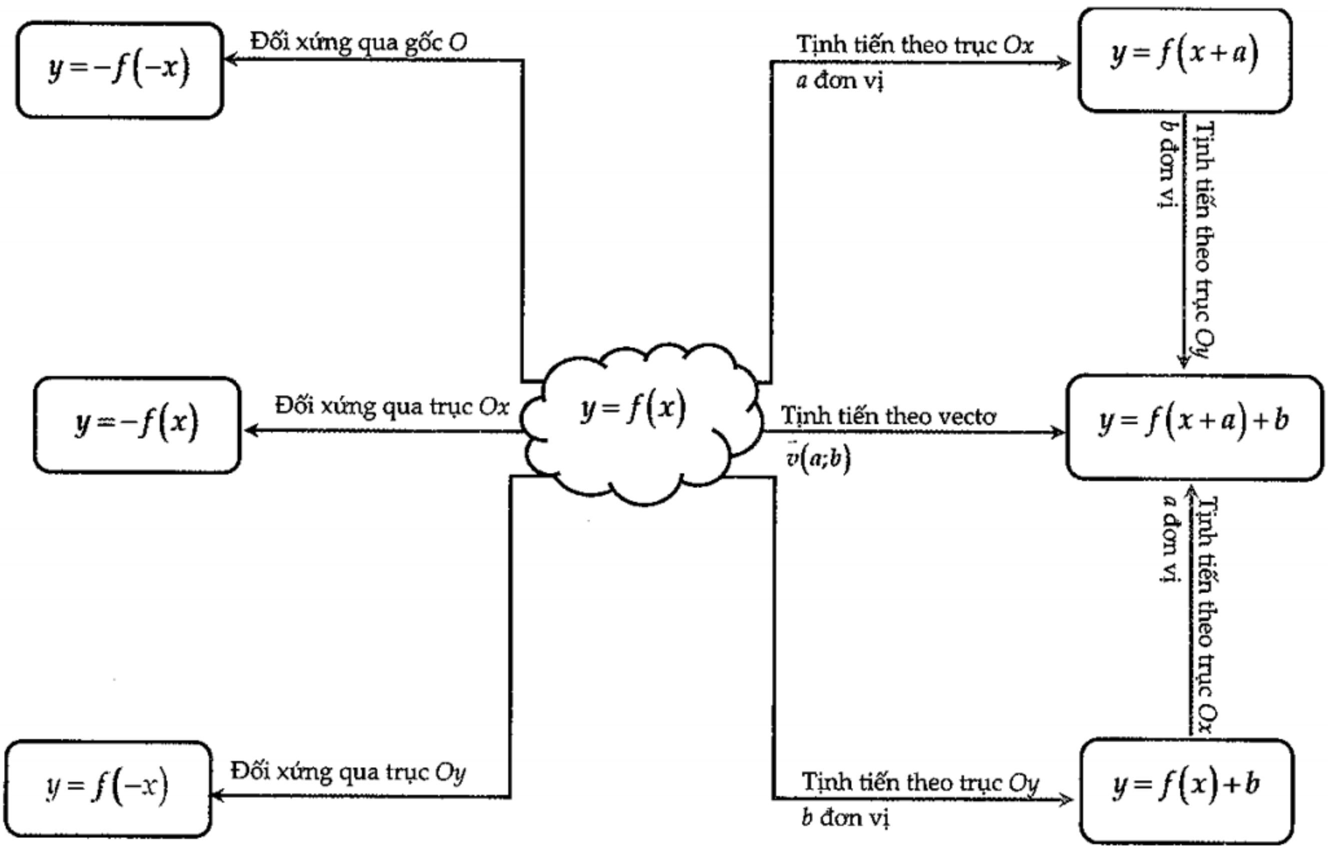
Đọc thêm

DẠNG 5: Dạng đồ thị của hàm số lượng giác

Các kiến thức cơ bản về dạng của hàm số lượng giác được đưa ra ở phần 1:

Lý thuyết cơ bản: Sau đây ta bổ sung một số kiến thức lý thuyết để giải quyết bài toán nhận dạng đồ thị hàm số lượng giác một cách hiệu quả.

Sơ đồ biến đổi đồ thị hàm số cơ bản:



Các kiến thức liên quan đến suy diễn đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối:
Cho hàm số $y=f(x)$. Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy diễn:

Đồ thị hàm số $y=\lvert f(x)\rvert$ gồm	*Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị $y=f(x)$. *Đối xứng phần đồ thị của hàm số $y=f(x)$ phía dưới trục hoành qua trục hoành.
Đồ thị hàm số $y=f(\lvert x\rvert)$ gồm	*Phần đồ thị của hàm số $y=f(x)$ nằm bên phải trục Oy. *Đối xứng phần đồ thị trên qua trục Oy.
Đồ thị hàm số $y=\lvert u(x)\rvert.v(x)$ với $f(x)=u(x).v(x)$ gồm	*Phần đồ thị của hàm số $y=f(x)$ trên miền thỏa mãn $u(x)\geq 0$. *Đối xứng phần đồ thị $y=f(x)$ trên trên miền $u(x)<0$ qua trục hoành.

Ở phần lý thuyết có đưa ra phần đọc thêm về hàm số $y=a\sin(\omega x+b)+c$ với $a;b;c;\omega\in\mathbb{R}; a\omega\neq 0$.

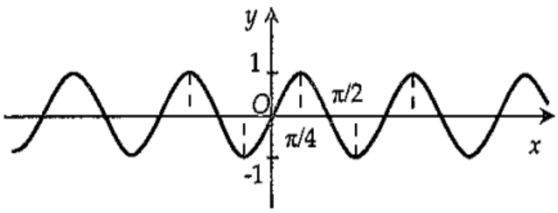
Hàm số $y = a\sin\left(\omega x + b\right) + c, (a, b, c, \omega \in R, a\omega \neq 0)$ cũng là một hàm tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{|\omega|}$ và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

Tương tự hàm số $y = a\cos(\omega x + b), (a, b, c, \omega \in \mathbb{R}, a\omega \neq 0)$ cũng là một hàm tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{|\omega|}$ và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

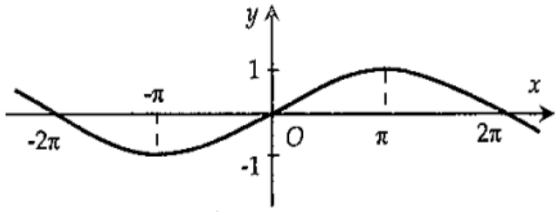
Ta có ví dụ sau:

Ví dụ 11. Hình nào dưới đây biểu diễn đồ thị hàm số $y = f(x) = 2\sin 2x$?

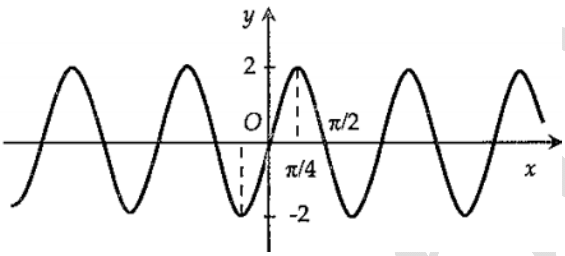
A.



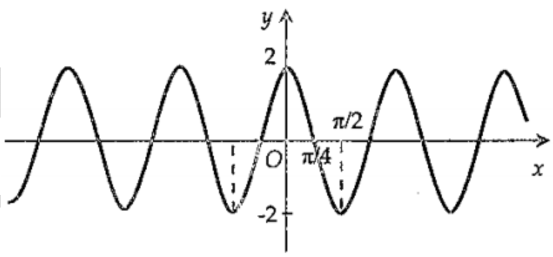
B.



C.



D.



Lời giải

Chọn C.

Ta thấy $-2 \leq 2\sin 2x \leq 2$ nên ta có loại A và B.

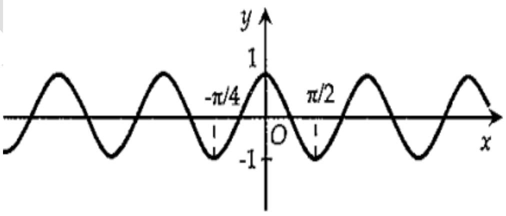
Tiếp theo với C và D ta có:

Từ phần lý thuyết ở trên ta có hàm số tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

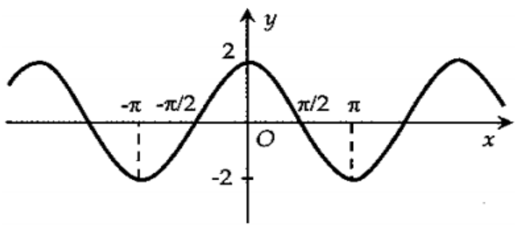
Ta thấy với $x = 0$ thì $y = 0$ nên đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ. Từ đây ta chọn đáp án C.

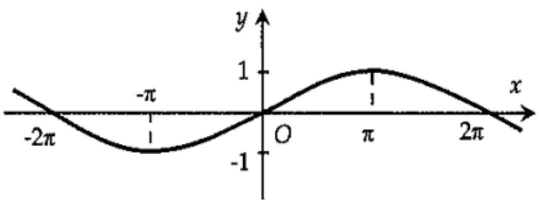
Ví dụ 11. Hình vẽ nào sau đây biểu diễn đồ thị hàm số $y = \cos\frac{x}{2}$?

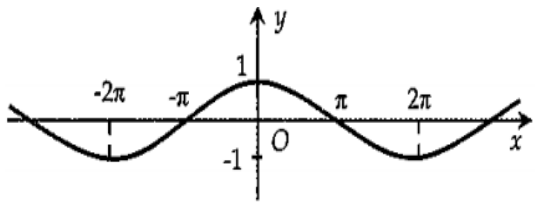
A.



B.



C. 

D. 

Lời giải

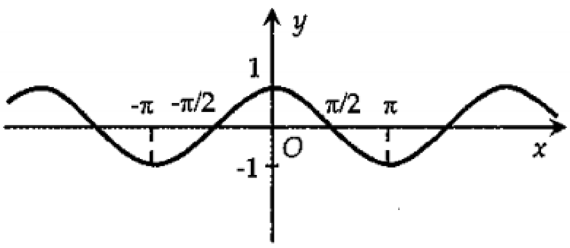
Chọn D

Ta thấy $-1 \le \cos\frac{x}{2} \le 1$ nên ta loại B.

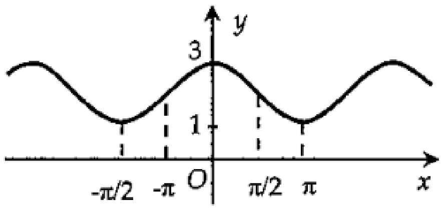
Tiếp theo ta có hàm số $y = \cos\frac{x}{2}$ có chu kì tuần hoàn là $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

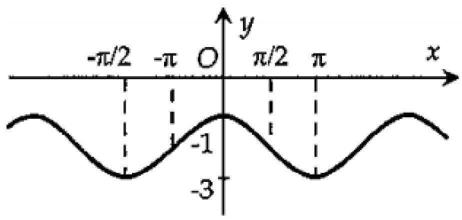
Ta thấy với $x = 0$ thì $y = \cos\frac{x}{2} = \cos 0 = 1$ nên ta chọn D.

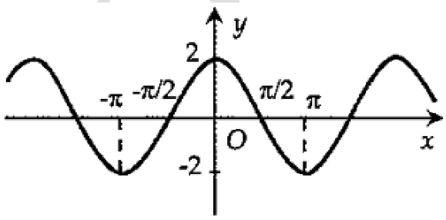
Ví dụ 12. Cho đồ thị hàm số $y = \cos x$ như hình vẽ :

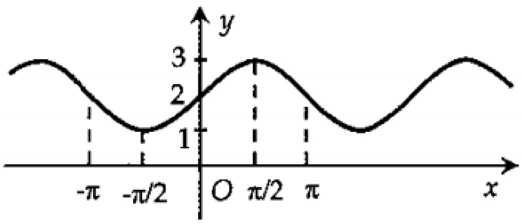


Hình vẽ nào sau đây là đồ thị hàm số $y = \cos x + 2$?

A. 

B. 

C. 

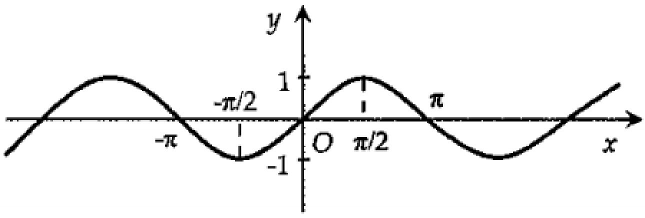
D. 

Lời giải

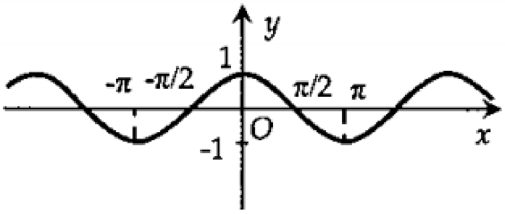
Chọn A

Ta thực hiện phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên trục Oy lên trên 2 đơn vị (xem lại sơ đồ biến đổi đồ thị cơ bản ở bên trên).

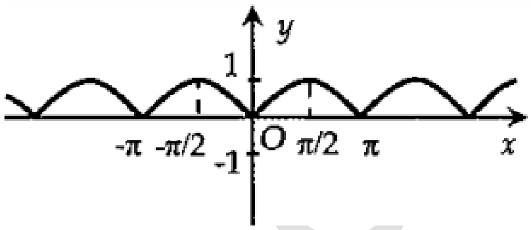
Ví dụ 13. Cho đồ thị hàm số $y = \sin x$ như hình vẽ:



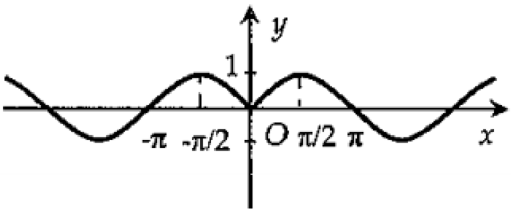
Hình nào sau đây là đồ thị hàm số $y = \sin|x|$?

A. 

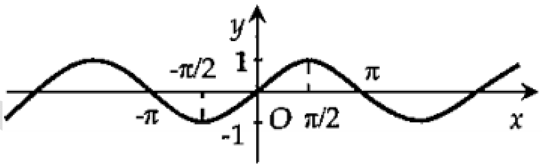
.

B. 

.

C. 

.

D. 

.

Lời giải

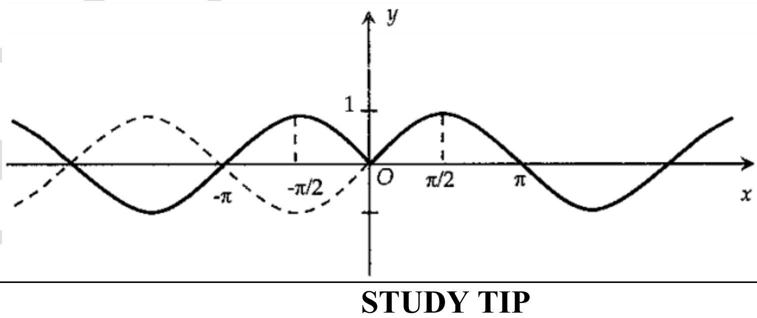
Chọn C

Suy diễn đồ thị hàm số $y = \sin|x|$ từ đồ thị hàm số $y = \sin x$:

Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = \sin x$ nằm bên phải trục Oy.

Lấy đối xứng phần đồ thị trên qua trục Oy.

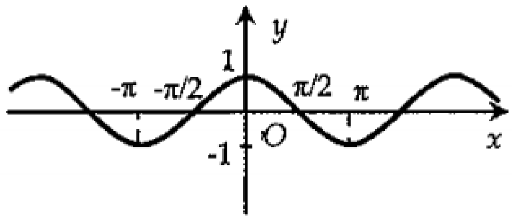
Dưới đây là đồ thị ta thu được sau khi thực hiện các bước suy diễn ở trên. Phần đồ thị nét đứt là phần bỏ đi của đồ thị hàm số $y = \sin x$.

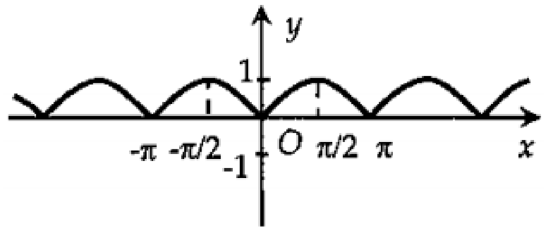


STUDY TIP

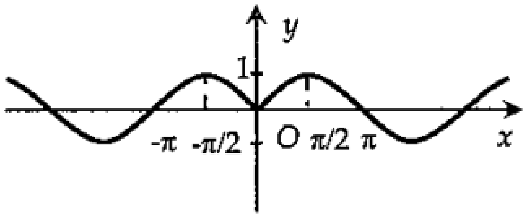
Ngoài ra ở bài toán này, ta có thể áp dụng tính chất hàm chẵn lẻ mà tôi đã cung cấp ở phần xét tính chẵn lẻ của hàm số phía trước. Hàm số $y = \sin|x|$ là hàm số chẵn có đồ thị đối xứng qua trục Oy. Nhìn các phương án A, B, C, D chỉ có phương án D là không có đồ thị đối xứng qua trục Oy. Tiếp theo ta tìm giá trị của một số điểm đặc biệt và chọn được C.

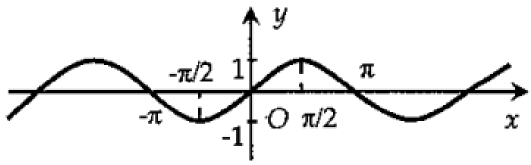
Ví dụ 14. Hình nào sau đây là đồ thị hàm số $y = |\sin x|$?

A. 

. **B.** 

.

C. 

. **D.** 

.

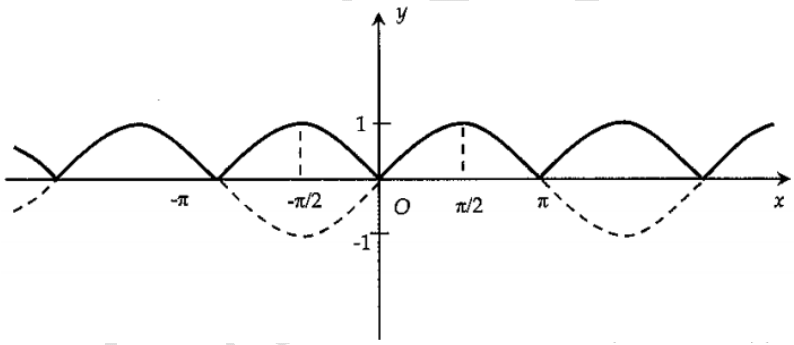
Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Suy diễn đồ thị hàm số $y=|\sin x|$ từ đồ thị hàm số $y=\sin x$:

Giữ nguyên phần tử từ trục hoành trở lên của đồ thị $y=\sin x$.

Lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y=\sin x$ phía dưới trục hoành qua trục hoành.



Cách 2: Ta thấy $|\sin x|\geq 0, \forall x$ nên đồ thị hàm số $y=|\sin x|$ hoàn toàn nằm trên trục Ox.

Từ đây ta chọn **B**.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

DẠNG 1. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$.

A. $D=R\backslash\{k\pi \mid k\in Z\}$. **B.** $D=R\backslash\{\pi+k\pi \mid k\in Z\}$.

C. $D=R\backslash\{\pi+k2\pi \mid k\in Z\}$. **D.** $D=R\backslash\{k2\pi \mid k\in Z\}$.

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y=\sin 5x+\tan 2x$ là:

A. $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}, k\in Z.$ **B.** $R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right\}, k\in Z.$

C. $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}(k+1)\right\}, k\in Z.$ **D.** $R.$

Câu 3. Tập xác định D của hàm số $y=\tan x-\frac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}$ là

A. $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi \mid k\in Z\right\}.$ **B.** $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in Z\right\}.$

C. $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2} \mid k\in Z\right\}.$ **D.** $R\backslash\left\{\frac{k\pi}{2} \mid k\in Z\right\}.$

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ là

A. $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in Z\right\}.$ **B.** $R\backslash\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi \mid k\in Z\right\}.$

C. $R\backslash\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi \mid k\in Z\right\}.$ **D.** $R\backslash\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2} \mid k\in Z\right\}.$

Câu 5. Xét bốn mệnh đề sau

(1) Hàm số $y=\sin x$ có tập xác định là R.

(2) Hàm số $y=\cos x$ có tập xác định là R.

(3) Hàm số $y=\tan x$ có tập xác định là $R\backslash\{k\pi \mid k\in Z\}$.

(4) Hàm số $y=\cot x$ có tập xác định là $R\backslash\left\{k\frac{\pi}{2} \mid k\in Z\right\}$.

Số mệnh đề đúng là

A. 1. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y=\cos\sqrt{x}$ là

A. $D=[0;2\pi]$. **B.** $D=[0;+\infty)$.

C. $D=R$. **D.** $D=R\backslash\{0\}$.

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}$ là

A. $R\backslash\{k\pi \mid k\in Z\}.$ **B.** $R\backslash\{k2\pi \mid k\in Z\}.$

C. $R\backslash\left\{-\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in Z\right\}.$ **D.** $R\backslash\left\{k\frac{\pi}{2} \mid k\in Z\right\}.$

Câu 8. Tìm tập xác định của hàm số $y=3\tan x+2\cot x+x$.

A. $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in Z\right\}.$ **B.** $D=R\backslash\left\{k\frac{\pi}{2} \mid k\in Z\right\}.$

C. $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\,|\,k\in Z\right\}$. **D.** $D=R$.

Câu 9. Tìm tập xác định của hàm số $y=\frac{1}{\sin^2 x-\cos^2 x}$.

A. $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **B.** $R\backslash\left\{k\frac{\pi}{2}\,|\,k\in Z\right\}$.

C. R. **D.** $R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\,|\,k\in Z\right\}$.

Câu 10. Tìm tập xác định của hàm số $y=\frac{2017\tan 2x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$.

A. $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **B.** $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

C. R. **D.** $R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\,|\,k\in Z\right\}$.

Câu 11. Tập xác định của hàm số $y=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$.

A. $D=R\backslash\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **B.** $D=R\backslash\left\{k\frac{\pi}{4}\,|\,k\in Z\right\}$.

C. $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **D.** $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

Câu 12. Tìm tập xác định của hàm số $y=\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}$.

A. $D=R\backslash\left\{-\frac{\pi}{4}+k2\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **B.** $D=R\backslash\left\{k\frac{\pi}{4}\,|\,k\in Z\right\}$.

C. $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **D.** $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

Câu 13. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\sin 2x+1}$ là

A. $D=R\backslash\{k\pi\,|\,k\in Z\}$. **B.** $D=R$.

C. $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **D.** $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

Câu 14. Tìm tập xác định của hàm số $y=\frac{\tan x}{\sqrt{15-14\cos 13x}}$.

A. $D=R\backslash\{k\pi\,|\,k\in Z\}$. **B.** $D=R$.

C. $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **D.** $D=R\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

Câu 15. Tìm tập xác định của hàm số: $y=\dfrac{\cot 2x}{\sqrt{2017-2016\sin 2015x}}$.

A. . $D=R\backslash\{k\pi \mid k\in Z\}$.
B. $D=R$. .
C. $D=R\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in Z\right\}$.
D. $D=R\backslash\left\{k\dfrac{\pi}{2} \mid k\in Z\right\}$.

Câu 16. Tìm tập xác định của hàm số: $y=\sqrt{\dfrac{20+19\cos 18x}{1-\text{sinx}}}$.

A. $D=R\backslash\{k\pi \mid k\in Z\}$.
B. $D=R\backslash\{k2\pi \mid k\in Z\}$.
C. $D=R\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \mid k\in Z\right\}$.
D. $D=R\backslash\left\{k\dfrac{\pi}{2} \mid k\in Z\right\}$.

Câu 17. Hàm số nào sau đây có tập xác định là R?

A. $y=2\cos\sqrt{x}$.
B. $y=\cos\dfrac{1}{x}$.
C. $y=\dfrac{\tan 2x}{\sin^2 x+1}$.
D. $y=\sqrt{\dfrac{\sin 2x+3}{\cos 4x+5}}$.

Câu 18. Hàm số nào sau đây có tập xác định khác với các hàm số còn lại?

A. $y=\tan x$.
B. $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x}$.
C. $y=\dfrac{\tan 2017x+2018}{\cos x}$.
D. $y=\sqrt{\dfrac{1}{1-\sin^2 x}}$.

Câu 19. Hàm số $y=\sqrt{\cos x-1}+1-\cos^2 x$ chỉ xác định khi:

A. $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.
B. $x=0$.
C. $x\neq k\pi, k\in Z$.
D. $x=k2\pi, k\in Z$.

Câu 20. Hàm số $y=\sqrt{1-\sin 2x}-\sqrt{1+\sin 2x}$ có tập xác định là:

A. $\varnothing$.
B. R.
C. $\left[\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\right], k\in Z$.
D. $\left[\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi;\dfrac{13\pi}{6}+k2\pi\right], k\in Z$.

Câu 21. Chọn khẳng định đúng:

A. Hàm số $y=\sqrt{\sin x}$ có tập xác định là các đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right], k\in Z$.

B. Hàm số $y=\sqrt{\cos x}$ có tập xác định là các đoạn $[k2\pi;\pi+k2\pi], k\in Z$.

C. Hàm số $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$ có tập xác định là các đoạn $\left[k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right], k\in Z$.

D. Hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$ có tập xác định là các đoạn $\left[k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right], k\in Z$.

Câu 22. Xét hai mệnh đề:

(I): Các hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ và $y=\cot x$ có chung tập xác định là $R\setminus\{x\,|\,x=k\pi,k\in Z\}$.

(II): Các hàm số $y=\dfrac{1}{\cos x}$ và $y=\tan x$ có chung tập xác định là $R\setminus\left\{x\,|\,x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\right\}$.

A. Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng. **C.** Cả hai đều sai . **D.** Cả hai đều đúng.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)=\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}$ với $0\le x\le 2\pi$. Tập xác định của hàm số là:

A. $[0;\pi]$. **B.** $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$. **C.** $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. **D.** $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{\tan x+1}{\tan x-1},(0<x<\pi)$. Tập xác định:

A. $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$. **C.** $(0;\pi)\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$. **D.** $(0;\pi)\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Câu 25. Tập xác định của hàm số $y=3\tan^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$ là:

A. R .

B. $R\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\right\}$.

C. $R\setminus\left\{\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi,k\in Z\right\}$.

D. $R\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in Z\right\}$.

Câu 26. Tập xác định của hàm số $y=2\cot\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ là:

A. $R\setminus\left\{\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2},k\in Z\right\}$.

B. $R\setminus\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z\right\}$.

C. $R\setminus\left\{\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,k\in Z\right\}$.

D. $R\setminus\left\{\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2},k\in Z\right\}$.

Câu 27. Cho hàm số $y=\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}$. Hãy chỉ ra khoảng mà hàm số không xác định $(k\in Z)$

A. $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\right)$.

B. $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right)$.

C. $\left(\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$.

D. $\left(\pi+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$.

Câu 28. Xét hai câu sau:

(I): Các hàm số $y=\sin x$ và $y=\cos x$ có chung tập xác định là R.

(II): Các hàm số $y=\tan x$ và $y=\cot x$ có chung tập xác định là $R\backslash\left\{\left\{x\,|\,x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}\cup\{x\,|\,x=k\pi\}\right\},k\in Z$.

A. Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng. **C.** Cả hai đều sai . **D.** Cả hai đều đúng.

Câu 29. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\cos 3x}{\cos x.\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}$ là:

A. $R\backslash\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3};\frac{5\pi}{6}+\mathrm{k}\,\pi;\frac{\pi}{6}+\mathrm{k}\,\pi,k\in Z\right\}$. **B.** $R\backslash\left\{\frac{5\pi}{6}+k\pi;\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z\right\}$.

C. $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\mathrm{k}\,\pi;\frac{5\pi}{6}+k\pi;\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z\right\}$. **D.** $R\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{5\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in Z\right\}$.

Câu 30. Tập xác định của hàm số $f(x)=\dfrac{5\sin 2x+3}{12\,\mathrm{sinx}}+\dfrac{\sqrt{\cos^2 x+5}}{\cos x}$ là:

A. $D=R\backslash\{k2\pi\,|\,k\in Z\}$. **B.** $D=R\backslash\left\{\frac{k\pi}{2}\,|\,k\in Z\right\}$.

C. $D=R\backslash\{\mathrm{k}\,\pi\,|\,k\in Z\}$. **D.** $D=R\backslash\left\{-\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

Câu 31. Tập xác định của hàm số $\dfrac{1-\cos x}{2\sin x+1}$ là:

A. $D=R\backslash\left\{-\frac{\pi}{6}+k2\pi;\frac{7\pi}{6}+\mathrm{k}\,2\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **B.** $D=R\backslash\left\{\frac{7\pi}{6}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

C. $D=R\backslash\left\{-\frac{\pi}{6}+\mathrm{k}\,\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **D.** $D=R\backslash\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi;\frac{7\pi}{6}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

Câu 32. Tập xác định của hàm số $\sqrt{\dfrac{5-3\cos 2x}{\left|1+\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right|}}$ là:

A. $D=R\backslash\{k\pi\,|\,k\in Z\}$. **B.** $D=R$.

C. $D=R\backslash\left\{\frac{k\pi}{2}\,|\,k\in Z\right\}$. **D.** $D=R\backslash\{k2\pi\,|\,k\in Z\}$.

Câu 33. Tập xác định của hàm số $y=\cot\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ là:

A. $D=R\backslash\left\{-\frac{\pi}{6}+k2\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **B.** $D=R\backslash\left\{\frac{7\pi}{6}+k\pi,\mathrm{k}\,2\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

C. $D=R\backslash\{\mathrm{k}\,2\pi\,|\,k\in Z\}$. **D.** $D=R\backslash\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

Câu 34. Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{2+\sin x}-\dfrac{1}{\tan^2 x-1}$ là:

A. $D=R\setminus\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+\text{k}\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **B.** $D=R\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2}\,|\,k\in Z\right\}$.

C. $D=R\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\text{k}\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **D.** $D=R\setminus\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

Câu 35. Hàm số $y=\dfrac{1+\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+2x\right)}{\cot^2 x+1}$ có tập xác định là:

A. $D=R\setminus\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{2},\text{k}\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **B.** $D=R\setminus\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\text{k}\dfrac{\pi}{2}\,|\,k\in Z\right\}$.

C. $D=R\setminus\left\{\dfrac{\pi}{12}+\text{k}\pi;\text{k}\pi\,|\,k\in Z\right\}$. **D.** $D=R\setminus\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{2};\text{k}\pi\,|\,k\in Z\right\}$.

Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

Câu 36. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y=-2\cos x$. **B.** $y=-2\sin x$. **C.** $y=2\sin(-x)$. **D.** $y=\sin x-\cos x$.

Câu 37. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

A. $y=-2\cos x$. **B.** $y=-2\sin x$. **C.** $y=-2\sin^2 x+2$. **D.** $y=-2\cos x+2$.

Câu 38. Hàm số $y=\sin x.\cos^2 x+\tan x$ là:

A. Hàm số chẵn. **B.** Hàm số lẻ

C. Vừa chẵn vừa lẻ. **D.** Không chẵn không lẻ.

Câu 39. Xét tính chẳn lẻ của hàm số $y=\dfrac{1+\sin^2 2x}{1+\cos 3x}$ ta kết luận hàm số đã cho là:

A. Hàm số chẵn. **B.** Hàm số lẻ .

C. Vừa chẵn vừa lẻ **D.** Không chẵn không lẻ

Câu 40. Xét các câu sau:

I.Hàm số $y=\text{sinx}\sqrt{\sin x}$ là hàm số lẻ.

II.Hàm số $y=\text{cosx}\sqrt{\cos x}$ là hàm số chẵn.

III.Hàm số $y=\text{sinx}\sqrt{\cos x}$ là hàm số lẻ.

Trong các câu trên, câu nào đúng?

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II). **C.** Chỉ (III) . **D.** Cả 3 câu .

Câu 41. Hãy chỉ ra hàm số nào là hàm số lẻ:

A. $y=\sqrt{\sin x}$.
B. $y=\sin^2 x$.
C. $y=\dfrac{\cot x}{\cos x}$.
D. $y=\dfrac{\tan x}{\sin x}$.

Câu 42. Hàm số $y=\dfrac{\tan 2x}{\sin^3 x}$ có tính chất nào sau đây?

A. Hàm số chẵn.
B. Hàm số lẻ.
C. Hàm không chẵn không lẻ.
D. Tập xác định $D=R$.

Câu 43. Hãy chỉ ra hàm số không có tính chẵn lẻ

A. $y=\text{sinx}+\text{tanx}$.
B. $y=\tan x+\dfrac{1}{\sin x}$.
C. $y=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.
D. $y=\cos^4 x-\sin^4 x$.

Câu 44. Hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

A. $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.
B. $y=\dfrac{1}{\sin^{2013} x}$.
C. $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.
D. $y=\sqrt{1-\sin 2012x}$.

Câu 45. Hàm số nào có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng?

A. $y=\sin 2017x$. **B.** $y=\dfrac{1}{\sin x}$. **C.** $y=\sqrt{\cos x}$. **D.** $y=\sqrt{\sin 2x}$.

Câu 46. Hãy chỉ ra hàm nào là hàm số chẵn:

A. $y=\sin^{2016} x.\text{cosx}$.
B. $y=\dfrac{\cot x}{\tan^2 x+1}$.
C. $y=\text{sinx}.\cos 6x$.
D. $y=\cos x.\sin^3 x$.

Câu 47. Xét hai mệnh đề:

(I)Hàm số $y=f(x)=\text{tanx}+\text{cotx}$ là hàm số lẻ

(II) Hàm số $y=f(x)=\text{tanx}-\text{cotx}$ là hàm số lẻ

Trong các câu trên, câu nào đúng?

A. Chỉ (I) đúng . **B.** Chỉ (II) đúng . **C.** Cả hai đúng. **D.** Cả hai sai.

Câu 48. Xét hai mệnh đề:

(I)Hàm số $y=f(x)=\text{tanx}+\text{cosx}$ là hàm số lẻ

(II) Hàm số $y=f(x)=\text{tanx}+\text{sinx}$ là hàm số lẻ

Trong các câu trên, câu nào đúng?

A. Chỉ (I) đúng . **B.** Chỉ (II) đúng . **C.** Cả hai đúng. **D.** Cả hai sai.

Câu 49. Hàm số $y=1-\sin^2 x$ là:

A. Hàm số chẵn.
B. Hàm số lẻ.
C. Hàm không chẵn không lẻ.
D. Hàm số không tuần hoàn.

Câu 50. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y = \sin 2x$.
B. $y = x.\cos x$.
C. $y = \cos x.\cot x$.
D. $y = \dfrac{\tan x}{\sin x}$.

Câu 51. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y = \sin|x|$.
B. $y = x^2.\sin x$.
C. $y = \dfrac{x}{\cos x}$.
D. $y = x + \sin x$.

Câu 52. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

A. $y = \dfrac{1}{2}\sin x.\cos 2x$.
B. $y = 2\cos 2x$.
C. $y = \dfrac{x}{\sin x}$.
D. $y = 1 + \tan x$.

Câu 53. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $y = |\sin x|$ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.
B. $y = \cos x$ có đồ thị đối xứng qua trục Oy.
C. $y = |\tan x|$ có đồ thị đối xứng qua trục Oy.
D. $y = \cot x$ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Câu 54. Cho hàm số $y = \sqrt{\cos x}$ xét trên $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm không chẳn không lẻ.
B. Hàm lẻ.
C. Hàm chẳn.
D. Có đồ thị đối xứng qua trục hoành.

Câu 55. Tìm kết luận sai:

A. Hàm số $y = x.\sin^3 x$ là hàm chẵn.

B. Hàm số $y = \dfrac{\sin x.\cos x}{\tan x + \cot x}$ là hàm lẻ.

C. Hàm số $y = \dfrac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x}$ là hàm chẵn.

D. Hàm số $y = \cos^3 x + \sin^3 x$ là hàm số không chẵn không lẻ.

Câu 56. Nhận xét nào sau đây là sai?

A. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sin x - \tan x}{2\sin x + 3\cot x}$ nhận trục Oy làm trục đối xứng.

B. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2}{\sin x + \tan x}$ nhận góc tọa độ làm tâm đối xứng.

C. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sin^{2008n} x + 2009}{\cos x}, (n \in Z)$ nhận trục Oy làm trục đối xứng.

D. Đồ thị hàm số $y=\sin^{2009}x+\cos nx,(n\in Z)$ nhật góc tọa độ làm tâm đối xứng.

Câu 57. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có trục đối xứng.

A. $y=\dfrac{\cos^{2008n}x+2003}{2012\sin x}$.

B. $y=\tan x+\cot x$.

C. $y=\dfrac{\cos x}{6x^6+4x^4+2x^2+15}$.

D. $y=\dfrac{1}{2\sin x-1}$.

Câu 58. Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{\cos x+2}+\cot^2 x}{\sin 4x}$. Hàm số trên là hàm số.

A. Hàm lẻ.

B. Hàm không tuần hoàn.

C. Hàm chẵn.

D. Hàm không chẵn không lẻ.

Câu 59. Hàm số $y=\cos 2x.\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ là

A. Hàm lẻ.

B. Hàm không tuần hoàn.

C. Hàm chẵn.

D. Hàm không chẵn không lẻ.

Câu 60. Xác định tĩnh chẳn lẻ của hàm số: $y=1+2x^2-\cos 3x$

A. Hàm lẻ.

B. Hàm không tuần hoàn.

C. Hàm chẵn.

D. Hàm không chẵn không lẻ.

DẠNG 3: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 61. Trong khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, hàm số $y=\sin x-\cos x$ là hàm số:

A. Đồng biến.

B. Nghịch biến.

C. Không đổi.

D. Vừa đồng biến vừa nghịch biến.

Câu 62. Hàm số $y=\sin 2x$ nghịch biến trên các khoảng nào sau đây $(k\in Z)$?

A. $(k2\pi;\pi+k2\pi)$.

B. $\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\right)$.

C. $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$.

D. $\left(-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)$.

Câu 63. Hàm số $y=\cos 2x$ nghịch biến trên khoảng $(k\in Z)$?

A. $\left(k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$.

B. $\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\pi+k\pi\right)$.

C. $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right)$.

D. $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$.

Câu 64. Xét các mệnh đề sau:

(I): $\forall x\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$:Hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ giảm.

(II): $\forall x \in \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$:Hàm số $y=\frac{1}{\cos x}$ giảm.

Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên:

A. Chỉ (I) đúng . **B.** Chỉ (II) đúng . **C.** Cả hai đúng. **D.** Cả hai sai.

Câu 65. Cho hàm số $y=4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin 2x$. Kết luận nào sau đây là đúng về sự biến thiên của hàm số đã cho?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ và $\left(\frac{3\pi}{4};\pi\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên $(0;\pi)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{3\pi}{4}\right)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\pi\right)$.

Câu 66. Với $k\in Z$, kết luận nào sau đây về hàm số $y=\tan 2x$ là sai?

A. Hàm số $y=\tan 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T=\frac{\pi}{2}$.

B. Hàm số $y=\tan 2x$ luôn đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2};\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số $y=\tan 2x$ nhận đường thẳng $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ là một đường tiệm cận.

D. Hàm số $y=\tan 2x$ là hàm số lẻ.

Câu 67. Để hàm số $y=\sin x+\cos x$ tăng, ta chọn x thuộc khoảng nào?

A. $\left(-\frac{3\pi}{4}+k2\pi;\frac{\pi}{4}+k2\pi\right)$. **B.** $\left(-\frac{3\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$.

C. $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$. **D.** $(\pi+k2\pi;2\pi+k2\pi)$.

Câu 68. Xét hai mệnh đề sau:

(I): $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$:Hàm số $y=\tan^2 x$ tăng.

(II): $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$:Hàm số $y=\sin^2 x$ tăng.

Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên:

A. Chỉ (I) đúng . **B.** Chỉ (II) đúng . **C.** Cả hai đúng. **D.** Cả hai sai.

Câu 69. Hãy chọn câu sai: Trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\pi+k2\pi\right), k\in Z$ thì:

A. Hàm số $y=\sin x$ là hàm số nghịch biến .

B. Hàm số $y=\cos x$ là hàm số nghịch biến.
C. Hàm số $y=\tan x$ là hàm số đồng biến.
D. Hàm số $y=\cot x$ là hàm số đồng biến .

Câu 70. Bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)=\cos 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ là:

A.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
y	-1	↗	1	↘	-1	↗	1	↘	-1

B.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
y	1	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	1

C.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
y	-2	↗	2	↘	-2	↗	2	↘	-2

D.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
y	2	↘	2	↗	2	↘	-2	↗	2

Câu 71. Cho hàm số $y=\cos\frac{x}{2}$. Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[-\pi;\pi]$ là:

A.

x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
y	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

B.

x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
y	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

C.

x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
y	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	0

D.

x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
y	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	1

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 72. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y=4\cos\sqrt{x}$ là:
A. 0 và 4. **B.** -4 và 4. **C.** 0 và 1. **D.** -1 và 1.

Câu 73. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{1-\cos^2 x}-2$ là:
A. 0 và $\sqrt{2}-1$. **B.** -1 và $\sqrt{2}-1$. **C.** -2 và -1 **D.** -1 và 1

Câu 74. Cho hàm số $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Giá trị lớn nhất của hàm số là:

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Câu 75. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin^6 x+\cos^6 x$ là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 76. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\sin x+1}{\cos x+2}$ là:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{-\sqrt{2}}{2}$. **D.** 0.

Câu 77. Giá trị lớn nhất của hàm số là: $y=\frac{\cos x+2\sin x+3}{2\text{cosx}-\text{sinx}+4}$

A. 0. **B.** $3-2\sqrt{3}$.. **C.** $2-2\sqrt{2}$.. **D.** -1. .

Câu 78. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=3-\frac{1}{5}\sin^2 x\cos^2 x$ là

A. $\frac{59}{20}$ **B.** $\frac{14}{5}$ **C.** 3 **D.** $\frac{29}{10}$

Câu 79. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4\sin x+2\cos x$ là

A. $2\sqrt{5}$ **B.** $-2\sqrt{5}$ **C.** 0 **D.** 20

Câu 80. Hàm số $y=4\sin x-4\cos^2 x$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. -1 **B.** -4 **C.** $\frac{-5}{4}$ **D.** -5

Câu 81. Hàm số $y=4\cot^2 2x-\frac{\sqrt{3}\left(1-\tan^2 x\right)}{\tan x}$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. 0 **B.** $3-2\sqrt{3}$ **C.** $2-2\sqrt{2}$ **D.** -1

Câu 82. Hàm số $y=2\cos x+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $5-2\sqrt{2}$ **B.** $5+2\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$ **D.** $\sqrt{5-2\sqrt{2}}$

Câu 83. Tổng của giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^4 x+\cos^4 x+\sin x\cos x$ là

A. $\frac{9}{8}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** 1 **D.** $\frac{4}{3}$

Câu 84. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin x\sqrt{\cos x}+\cos x\sqrt{\sin x}$ là

A. 0 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt[4]{2}$ **D.** $\sqrt{6}$

Câu 85. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{\cos^2 x+7\sin^2 x}+\sqrt{\sin^2 x+7\cos^2 x}$ là

A. $1+\sqrt{7}$ **B.** $-1+\sqrt{7}$ **C.** 4 **D.** 14

Hướng dẫn giải chi tiết

Dạng 1: Tìm tập xác định của hàm số

Câu 1. Đáp án **A.**

Hàm số đã cho xác định khi $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k2\pi \\ x \neq \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Nếu giải đến đây ta có thể dễ dàng loại B,C,D vì:

Với C thì thiếu $x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Với B,D thì không thõa mãn.

Với A ta kết hợp gộp nghiệm thì ta được $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 2. Đáp án **B.**

Ở đây $\sin 5x$ xác định với mọi số thực x. Nên ta đi tìm điều kiện cho $\tan 2x$ xác định khi

$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Câu 3. Đáp án **B.**

Hàm số đã cho xác định khi

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin^3 x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Câu 4. Đáp án **D.**

Hàm số đã cho xác định khi

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Câu 5. Đáp án **B.**

Mệnh đề (1) và (2) là đúng

Mệnh đề (3) và (4) là sai

Sửa lại cho đúng như sau

(3) Hàm số $y = \tan x$ có TXĐ là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

(4) Hàm số $y = \tan x$ có TXĐ là $\mathbb{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$

Câu 6. Đáp án **B.**

Hàm số đã cho xác định khi $x \geq 0$

Câu 7. Đáp án **D.**

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Câu 8. Đáp án **B.**

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Câu 9. Đáp án **D.**

Hàm số đã cho xác định khi $\sin^2 x - \cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Câu 10. Đáp án **D.**

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} \sin^2 x - \cos^2 x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Câu 11. Đáp án **A.**

Hàm số đã cho xác định khi

$\sin x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 12. Đáp án **D.**

Hàm số đã cho xác định khi

$\sin x - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 13. Đáp án **B.**

Ta có $\sin 2x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin 2x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số đã cho xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$

Câu 14. Đáp án **C.**

Ta có $\cos 13x \leq 1 < \frac{15}{14} \Rightarrow 15 - 14\cos 13x > 0$.

Vậy hàm số đã cho xác định khi $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 15. Đáp án **D.**

Tương tự câu 14, hàm số đã cho xác định khi $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Câu 16. Đáp án **C.**

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} \frac{20 + 19\cos 18x}{1 - \sin x} \geq 0 \\ 1 - \sin x \neq 0 \end{cases}$

Mà $19 + 20\cos 18x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đã cho xác định

$1 - \sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy hàm số đã cho xác định khi $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 17. Đáp án **D.**

Với A thì hàm số xác định khi $x \geq 0$

Với B thì hàm số xác định khi $\tan 2x$ xác định $\Leftrightarrow 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Với C thì hàm số xác định khi $x \neq 0$

Với D thì $\dfrac{\sin 2x+3}{\cos 4x+5} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy ta chọn D vì các phương án trên không có phương án nào thỏa mãn hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Câu 18. Đáp án **C.**

Với A thì hàm số xác định khi $\cos x \neq 0$

Với B thì hàm số xác định khi $\cos x \neq 0$

Với C thì hàm số xác định khi $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2017x \neq 0 \end{cases}$

Từ đây ta chọn C do khác với A và B

Câu 19. Đáp án **D.**

Hàm số đã cho xác định khi $\cos x - 1 \geq 0$, mà $\cos x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, do vậy để hàm số xác định thì $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 20. Đáp án **B.**

Cách 1: Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} 1-\sin 2x \geq 0 \\ 1+\sin 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq \sin 2x \leq 1$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

Cách 2: $y = |\sin x - \cos x| - |\sin x + \cos x|$,tập xác định là $\mathbb{R}$

Câu 21. Đáp án **C.**

Với A thì hàm số $y = \sqrt{\sin x}$ xác định khi $\sin x \geq 0 \Leftrightarrow k2\pi \leq x \leq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. vậy A sai.

Với B thì hàm số $y = \sqrt{\cos x}$ xác định khi $\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-\pi}{2} + k2\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\cos x \neq 0$

Với C thì hàm số xác định khi $y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}$ xác định khi

$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k2\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy C đúng.

Câu 22. Đáp án **D.**

Ta thấy cả hai hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x}$ và $y = \cot x$ đều xác định khi $\sin x \neq 0$. tương tự thì hai hàm số ở mệnh đề II đều xác định khi $\cos x \neq 0$.

Câu 23. Đáp án **C.**

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x \in [0; 2\pi] \\ \sin x \geq 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0 \leq x \leq \pi \\ \dfrac{-\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

Câu 24. Đáp án **D.**

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 0 < x < \pi \\ \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;\pi) \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2} \right\}$

Câu 25. Đáp án **C.**

Hàm số xác định khi $\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 26. Đáp án **A.**

Hàm số xác định khi $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Câu 27. Đáp án **B.**

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Khoảng $\left(\dfrac{-\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ chứa $x = \dfrac{-\pi}{4} + k2\pi$ nên hàm số không xác định trong khoảng này

Câu 28. Đáp án **A.**

Hàm số $y = \tan x$ tập xác định là $\mathbb{R} \backslash \left\{ x / x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, Hàm số $y = \cot x$ tập xác định là $\mathbb{R} \backslash \{ x / x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$, suy ra (II) sai

Câu 29. Đáp án **A.**

Hàm số đã cho xác định khi $\cos 3x.\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right).\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{3} + x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x \neq \dfrac{5\pi}{6} + k\pi, k \in Z \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array} \right.$$

Câu 30. Đáp án B.

Hàm số $f(x) = \dfrac{5\sin 2x + 3}{12\sin x} + \dfrac{\sqrt{\cos^2 x + 5}}{\cos x}$ xác định khi

$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases}; k \in Z \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in Z$.

Câu 31. Đáp án A.

ĐK: $2\sin x+1=0 \Leftrightarrow \sin x \neq -\frac{1}{2} \neq \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x \neq \frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{cases}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{6}+k2\pi;\frac{7\pi}{6}+k2\pi \mid k\in Z\right\}$.

Câu 32. Đáp án A.

Ta có $-1\le \cos 2x \le 1$ nên $5-3\cos 2x>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Mặt khác $\left|1+\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right|\ge 0$.

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow 1+\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\neq 0$

A. $\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\neq -1 \Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{2}\neq -\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x\neq k\pi, k\in Z$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in Z\}$.

Câu 33. Đáp án B.

Vì $-1\le \cos x\le 1$ nên $1+\cos x\ge 0$ và $1-\cos x\ge 0 \Rightarrow \frac{1+\cos x}{1-\cos x}\ge 0$.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\neq 0 \\ 1-\cos x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{6}\neq k\pi \\ x\neq k2\pi \end{cases}, k\in Z$.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi, k2\pi \mid k\in Z\right\}$.

Câu 34. Đáp án A.

Vì $-1\le \sin x\le 1$ neen $2+\sin x\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2+\sin x\ge 0 \\ \tan^2 x-1\neq 0 \\ \cos x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x\neq \pm 1 \\ \cos x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \pm\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}, k\in Z$.

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z\right\}$.

Câu 35. Đáp án D.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} \cot^2 x+1\neq 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)\neq 0 \\ \sin x\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3}+2x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}, k \in Z \\ x \neq k\pi \end{cases}.$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}, k\pi, k \in Z\right\}$.

Dạng 2: Xét tính chẵn, lẻ của hàm số lượng giác.

Câu 36. Đáp án A.

Với A: TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có với $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \Rightarrow -2\cos(-x) = -2\cos x$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 37. Đáp án B.

Với A: Ta có $-2\cos(-x) = -2\cos x$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Với B: Ta có:

$-2\sin(-x) = -2.(-\sin x) = 2\sin x = -f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ. Vậy ta chọn B.

Câu 38. Đáp án B.

Hàm số đã cho có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in Z\right\}$.

Vậy với $x \in D \Rightarrow -x \in D$. Ta có $f(-x) = \sin(-x)\cos^2(-x) + \tan(-x)$

$= -\sin x.\cos^2 x - \tan x = -f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ. Đáp án **B.**

Câu 39. Đáp án A.

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{3} \mid k \in Z\right\}$ là tập đối xứng.

Ta có $f(-x) = \frac{1+\sin^2(-2x)}{1+\cos(-3x)} = \frac{1+(\sin(-2x))^2}{1+\cos(-3x)} = \frac{1+\sin^2 2x}{1+\cos 3x \to}$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 40. Đáp án C.

Ta loại I và II do khi $\sin x > 0$ thì $\sin(-x) = -\sin x < 0$, do đó $\sqrt{-\sin x}$ không tồn tại.

Với III: Hàm số xác định khi $\cos x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+k2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}+k2\pi, k \in Z$.

Tập xác định của hàm số là tập đối xứng.

Do vậy, ta xét $f(-x) = \sin(-x).\sqrt{\cos(-x)} = -\sin x.\sqrt{\cos x} = -f(x)$.

Vậy III đúng.

Câu 41. Đáp án C.

Với A: Tương tự như câu 26, thì ta loại A.

Với B: Tập xác định $D=\mathbb{R}$ là tập đối xứng.

Ta có $f(-x) = \sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$. Vậy hàm sô ở phương án C là hàm số lẻ.

Câu 42. Đáp án A.

Ta loại D vì để hàm số đã cho xác định thì $\begin{cases}\cos 2x \neq 0\\ \sin x \neq 0\end{cases}$ nên tập xác định của hàm số đã cho không thể là hàm số chẵn.

Do $f(-x) = \dfrac{\tan(-2x)}{\sin^3(-x)} = \dfrac{-\tan 2x}{-\sin^3 x} = f(x)$.

Câu 43. Đáp án B.

Ta thấy các hàm số ở phương án A,C là các hàm số lẻ, còn ở phương án D là hàm số chẵn. Do vậy, ta chọn B. Thật vậy $\sqrt{2}\sin\left(-x-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \neq \sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Câu 44. Đáp án C.

Hàm số lẻ có đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng, do đó ta đi tìm hàm số lẻ trong bốn hàm số đã cho. Với bài toán này ta đi tìm hàm số là hàm số lẻ. Với các bạn tinh ý thì ta có thể chọn luôn C.

Lý giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k \in Z\}$ là tập đối xứng.

$f(-x) = \dfrac{1}{\sin^{2013}(-x)} = \dfrac{-1}{\sin^{2013} x} = -f(x)$. Vậy hàm số ở phương án C là hàm số lẻ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Câu 45. Đáp án B.

Hàm số chẵn có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng do đó ta đi tìm hàm số chẵn trong bốn hàm số đã cho.

Hàm số ở D loại vì lí do tương tự câu 26.

Hàm số A và C là hàm số lẻ. Do vậy ta chọn **B.**

Câu 46. Đáp án A.

Với A: TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = (\sin(-x))^{2016}.\cos(-x) = \sin^{2016} x.\cos x$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Các hàm số ở B, C, D đều là hàm số lẻ.

Câu 47. Đáp án D.

(I) Tập xác định của hàm số đã cho là tập đối xứng.

Ta có $f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -f(x)$.

Vậy (I) đúng.

(II) Tập xác định của hàm số đã cho là tập đối xứng.

Ta có

$f(-x) = \tan(-x) - \cot(-x) = -\tan x + \cot x = -f(x)$.

Vậy (II) đúng.

Câu 48. Đáp án A.

- Với (I) ta có $f(-x) = \tan(-x) + \cos(-x) = -\tan x + \cos x \neq f(x) \neq f(x)$.

Vậy hàm số ở (I) không phải hàm số chẵn cũng không phải hàm số lẻ.

- Với (II) ta có $f(-x) = \tan(-x) + \sin(-x) = -\tan x - \sin x = -f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 49. Đáp án C.

Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f(-x)=1-\sin^2(-x)=1-(-\sin x)^2 =1-\sin^2 x=f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 50. Đáp án D.

Dễ thấy hàm số $y=\sin 2x$ là hàm số lẻ.

Với B ta có $f(-x)=(-x).\cos(-x)=-x.\cos x=-f(x)$.

Vậy hàm số ở B là hàm số lẻ.

Với C ta có TXĐ $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in Z\}$ là tập đối xứng.

$f(-x)=\cos(-x).\cot(-x)=\cos x.(-\cot x)=-f(x)$.

Vậy hàm số ở C là hàm số lẻ. Vậy ta chọn D.

Câu 51. Đáp án A.

Ta chọn luôn A vì ở phần ví dụ ta có đưa ra hàm số $y=f(|x|)$ là hàm số chẵn trên D.

Câu 52. Đáp án A.

Với A: Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f(-x)=\frac{1}{2}\sin(-x).\cos(-2x)=-\frac{1}{2}\sin x.\cos 2x=f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Câu 53. Đáp án A.

Ta thấy hàm số ở phương án A là hàm số chẵn thì ta có đồ thị đối xứng qua trục tung, chứ không phải đối xứng qua gốc tọa độ.

Câu 54. Đáp án C.

Tập $D=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ là tập đối xứng.

Ta có $f(-x)=\sqrt{\cos(-x)}=\sqrt{\cos x}=f(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn

Câu 55. Đáp án B.

<u>*Với A*</u>: Ta có $f(-x)=(-x)\sin^3(-x)=x\sin^3 x=f(x)$. vậy A đúng.

<u>*Với B*</u> : Tập xác định D là tập đối xứng .

Ta có $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)\cos(-x)}{\tan(-x)+\cot(-x)}=\dfrac{-\sin x\cos x}{-(\tan x+\cot x)} = \dfrac{\sin x\cos x}{\tan x+\cot x}=f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn. Vậy B sai.

Câu 56. Đáp án D.

<u>*Với A*</u> : Tập xác định của hàm số đã cho là tập đối xứng . Ta có $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)-\tan(-x)}{2\sin(-x)+3\cot(-x)}=$ $\dfrac{-\sin x+\tan x}{-2\sin x-3\cot x}=\dfrac{\sin x-\tan x}{2\sin x+3\cot x}=f(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn có đồ thị nhận trục oy làm trục đối xứng . Vậy A đúng.

Với B : Ta có $f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{\sin(-x)+\tan(-x)}=\dfrac{x^2}{-\sin x-\tan x}=-f(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số lẽ có đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng . vậy B đúng .

Với C : Ta có $f(-x)=\dfrac{\sin^{2008n}(-x)+2009}{\cos(-x)}=\dfrac{\sin^{2008n}x+2009}{\cos x}=f(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn có đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng . Vậy C đúng .

Từ đây ta chọn D.

Câu 57. Đáp án C.

Bài toán trở thành tìm hàm số chẵn trong bốn hàm số đã cho phần phương án .

Với A : Ta có $f(-x)=\dfrac{\cos^{2008n}(-x)+2003}{2012\sin(-x)}=\dfrac{\cos^{2008n}x+2003}{-2012\sin x}=-f(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số lẽ, (loại).

Với B : Ta có $f(-x)=\tan(-x)+\cot(-x)=-\tan x-\cot x=-f(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số lẽ (loại).

Với C : Ta có $f(-x)=\dfrac{\cos(-x)}{6(-x)^6+4(-x)^4+2(-x)^2+15}=\dfrac{\cos x}{6x^6+4x^4+2x^2+15}=f(x)$. vậy ta chon C

Câu 58. Đáp án A.

Vì $\cos x+2>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó điều kiện là $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \sin 4x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq k\pi\\ x\neq\dfrac{k\pi}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$. vậy tập xác định của D là tập đối xứng.

Ta có $f(-x)=\dfrac{\sqrt{\cos x+2}+\cot^2(-x)}{\sin(-4x)}=-\dfrac{\sqrt{\cos x+2}+\cot^2(-x)}{\sin 4x}=-f(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số lẽ.

Câu 59. Đáp án D.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Với $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Ta có $f(-x)=\cos(-2x).\sin(-x-\dfrac{\pi}{4})=\cos 2x.\sin(-x-\dfrac{\pi}{4})=-\cos 2x.\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$

Ta thấy $\begin{cases}f(-x)\neq f(x)\\ f(-x)\neq -f(x)\end{cases}$. Vậy hàm số đã cho không chẵn không lẻ.

Câu 60. Đáp án C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ là tập đối xứng .

$f(-x)=1+2(-x)^2-\cos 3(-x)=1+2x^2-\cos 3x=f(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Dạng 3 : Xét tính đơn điệu của hàm số lượng giác.

Câu 61. Đáp án A.

Cách 1 : Ta thấy trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ hàm $f(x)=\sin x$ đồng biến và hàm $g(x)=-\cos x$ đồng biến , suy ra trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ hàm số $y=\sin x-\cos x$ đồng biến.

Cách 2 : Sử dụng máy tính . Dùng TABLE ta xác định được hàm số $y=\sin x-\cos x$ tăng trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Câu 62. Đáp án C .

Ta thấy hàm số $y=\sin 2x$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right), k\in\mathbb{Z}$, suy ra hàm số

$y=\sin 2x$ nghịch biến khi $\dfrac{\pi}{2}+k2\pi<2x<\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4}+k\pi<x<\dfrac{3\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Vậy hàm số $y=\sin 2x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\right), k\in\mathbb{Z}$

Câu 63. Đáp án A.

Hàm số $y=\cos 2x$ nghịch biến khi $k2\pi<2x<\pi+k2\pi \Leftrightarrow k\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Câu 64. Đáp án B.

$\forall x\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$: Hàm $y=\sin x$ giảm và $\sin x<0$, $\forall x\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$ suy ra $y=\dfrac{1}{\sin x}$ tăng :

Câu (I) sai, $\forall x\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$: Hàm $y=\cos x$ tăng và $\cos x<0$, $\forall x\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$, suy ra hàm

$y=\dfrac{1}{\cos x}$ giảm.

Câu (II) đúng.

Câu 65. Đáp án A.

Ta có $y=4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-\sin 2x = 2\left(\sin 2x+\sin\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin 2x=\sin 2x+\sqrt{3}$. Xét sự biến thiên của hám số $y=\sin 2x+\sqrt{3}$, ta sử dụng TABLE để xét các mệnh đề .

Ta thấy với A. Trên $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ thì giá trị của hàm số luôn tăng.

Tương tự trên $\left(\dfrac{3\pi}{4};\pi\right)$ thì giá trị của hàm số cũng luôn tăng.

Câu 66. Đáp án B.

Ta thấy hàm số $y=\tan x$ luôn đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$, suy ra hàm số

$y=\tan 2x$ luôn đồng biến tren mỗi khoảng $-\dfrac{\pi}{2}+k\pi<2x<\dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$.

Vậy B là sai.

Câu 67. Đáp án A.

Ta có $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. Để hàm số $y=\sin x+\cos x$ tăng thì

$-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi<x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}. \Leftrightarrow -\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi<x<\dfrac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$

Câu 68. Đáp án C.

Bài toán có hai hàm số mà cùng xét trên một khoảng nên ta sẽ sử dụng chức năng TABLE cho hai hàm Ấn MODE7 : Nhập $f(x)$ là hàm $\tan^2 x$. nhập $g(x)$ là hàm $\sin^2 x$ thì ta có kết quả .

Ta thấy cả hai hàm số đều không là hàm tăng trên cả khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Vì khi x chạy từ $-\frac{\pi}{2}$ đến 0 thì giá trị của hai hàm số đều giảm . Khi x chạy từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$ thì giá trị của hai hàm số đều tăng , vậy cả hai mệnh đề đều sai.

Câu 69. Đáp án D.

D sai , thật vậy với $\frac{2\pi}{3};\frac{3\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, ta có : $\frac{2\pi}{3}<\frac{3\pi}{4}\Rightarrow \cot\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}>-1=\cot\frac{3\pi}{4}$

Câu 70. Đáp án A.

Ta có thể loại phương án $B;C;D$ luôn do tại $f(0)=\cos 0=1$ và $f(\pi)=\cos 2\pi=1$. Các bảng biến thiên $B;C;D$ đều không thỏa mãn.

Câu 71. Đáp án C.

Tương tự như câu 70 thì ta có thể loại A và B do $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. tiếp theo xét giá trị hàm số tại hai đâu mút thì ta loại được D.

Dạng 4 : Tìm giá trị lớn nhất , nhỏ nhất của hàm lượng giác .

Câu 72. Đáp án B.

Tập xác định $D=[0;+\infty)$ .Ta có $-1\le\cos\sqrt{x}\le 1$, $\forall x\in D$. $\Leftrightarrow -4\le y\le 4$. Vậy $\min_D y=-4\Leftrightarrow\cos\sqrt{x}=-1$. $\max_D y=4\Leftrightarrow\cos\sqrt{x}=1$.

Câu 73. Đáp án C .

Ta có $y=\sqrt{1-\cos^2 x}-2=\sqrt{\sin^2}-2=|\sin x|-2$ $0\le|\sin x|\le 1\Leftrightarrow -2\le y\le -1$

Câu 74. Đáp án C.

Ta có $-1\le\sin(x+\frac{\pi}{4})\le 1$

Câu 75. Đáp án B.

Ta có $\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\left(1-2\sin^2 2x\right)=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$

Ta có $\cos 4x\le 1,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x\le 1,\forall x\in\mathbb{R}$. Dấu bằng xảy ra khi $\cos 4x=1$.

Câu 76. Đáp án D.

Cách 1 : Tương tự như phần lý thuyết đã giới thiệu thì ta thấy $\cos x+2>0,\forall x$. Vậy

$y=\frac{\sin x+1}{\cos x+2}\Leftrightarrow\sin x+1=y(\cos x+2)\quad\Leftrightarrow\sin x-y\cos x+1-2y=0$. Ta có

$1^2+(-y)^2\ge(1-2y)^2\Leftrightarrow y^2+1\ge 4y^2-4y+1\ \Leftrightarrow 3y^2-4y\le 0\Leftrightarrow 0\le y\le\frac{4}{3}$. Vậy $\min y=0$.

Cách 2 : Ta có $\begin{cases}\sin x+1\geq 0\\ \cos x+2\geq 0\end{cases}\Rightarrow y\geq 0\Rightarrow \min y=0\ khi\ \sin x=-1$.

Câu 77. Đáp án C.

Ta có $2\cos x-\sin x+4\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$. $y=\dfrac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4}$

$\Leftrightarrow 2y\cos x-y\sin x+4y=\cos x+2\sin x+3 \quad \Leftrightarrow (2y-1)\cos x-(y+2)\sin x+4y-3=0$. Ta có

$(2y-1)^2+(y+2)^2\geq(4y-3)^2 \quad \Leftrightarrow 5y^2+5\geq 16y^2-24y+9 \quad \Leftrightarrow 11y^2-24y+4\leq 0\Leftrightarrow \dfrac{2}{11}\leq y\leq 2.$

Vậy GTLN của hàm số đã cho là 2.

Câu 78. Đáp án A.

Ta có $f(x)=3-\dfrac{1}{5}\sin^2 x\cos^2 x=3-\dfrac{1}{20}.(2\sin x.\cos x)^2=3-\dfrac{1}{20}\sin^2 x \ \leq 3-\dfrac{1}{20}=\dfrac{59}{20}$. Vậy GTNN của hàm số là $\dfrac{59}{20}$.

Câu 79. Đáp án B.

Ta có $4^2+2^2\geq y^2\Leftrightarrow -2\sqrt{5}\leq y\leq 2\sqrt{5}.$

Câu 80. Đáp án D.

Ta có $y=4\left(\sin x-(1-\sin^2 x)\right)=4\left(\sin^2 x+\sin x-1\right)=4\left(\left(\sin x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}\right)\geq -5.$

Dấu bằng xảy ra khi $\sin x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow \min y=-5$

Câu 81. Đáp án D.

Ta có $\cot 2x=\dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x}$. Từ đó suy ra $y=3\cot^2 2x-\dfrac{2\sqrt{3}\left(1-\tan^2 x\right)}{2\tan x}=3\cot^2 2x-2\sqrt{3}\cot 2x$

$=\left(\sqrt{3}\cot 2x-1\right)^2-1\geq -1,\forall x\in\mathbb{R}$. Vậy $\min y=-1\Leftrightarrow \cot 2x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 82. Đáp án C.

Ta có $y=2\cos x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow 2\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \quad \Leftrightarrow 2\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$

$\Leftrightarrow y=\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x$. Ta có $y^2\leq\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\Leftrightarrow y^2\leq 5+2\sqrt{2}$. Do đó ta có $-\sqrt{5+2\sqrt{2}}\leq y\leq\sqrt{5+2\sqrt{2}}$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$.

Câu 83. Đáp án A.

Ta có $y=\sin^4 x+\cos^4 x+\sin x\cos x\Leftrightarrow y=1-2\sin^2 x\cos^2 x+\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x+\dfrac{1}{2}\sin 2x \quad \Leftrightarrow y=1-\dfrac{1}{2}\left[\left(\sin 2x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right]\Leftrightarrow y=\dfrac{9}{8}-\dfrac{1}{2}\left(\sin 2x-\dfrac{1}{2}\right)^2\leq\dfrac{9}{8}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

Câu 84. Đáp án A.

Ta có $\sin x\sqrt{\cos x} + \cos x\sqrt{\sin x} \ge 2\sqrt{\sin x.\cos x\sqrt{\sin x.\cos x}} \Leftrightarrow y \ge 2.\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2x\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2x}} \ge 0$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sin 2x = 0$.

Câu 85. Đáp án C.

Ta có $y^2 \le \left(1^2+1^2\right)\left(\cos^2 x + 7\sin^2 x + \sin^2 x + 7\cos^2 x\right) \Leftrightarrow y^2 \le 2(1+7) = 16 \Rightarrow y \le 4$. Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 4.

I. **CONG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRINH LUỢNG GIÁC CƠ BẢN**

a) $\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

b) $\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

c) $\tan f(x) = \tan g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

d) $\cot f(x) = \cot g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Không được dùng đồng thời 2 đơn vị độ và radian cho một công thức về nghiệm phương trình

lượng giác.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào nhận $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$ làm nghiệm

A. $\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$.

B. $\cos x = \sin 2x$.

C. $\cos 4x = -\cos 6x$.

D. $\tan 2x = -\tan\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn B

A. $\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{4} - 2x + k2\pi \\ 3x = \pi - (\frac{\pi}{4} - 2x) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + k\frac{2\pi}{5} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$

B. $\cos x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ x = -\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} - k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

STUDY TIP

$(-\sin f(x)) = \sin(-f(x))$ $\quad$ $(-\tan f(x)) = \tan(-f(x))$

$(-\cos f(x)) = \cos(\pi - f(x))$ $\quad$ $(-\cot f(x)) = \cot(-f(x))$

C. $\cos 4x = -\cos 6x \Leftrightarrow \cos 4x = \cos(\pi - 6x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \pi - 6x + k2\pi \\ 4x = -(\pi - 6x) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \\ x = \frac{\pi}{2} - k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

D. $\tan 2x = -\tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \tan 2x = \tan(-\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

So sánh ta được đáp án là B.

LƯU Ý: Bạn có thể biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác rồi dùng máy tính để thử nghiệm và kết luận . Phần này sẽ được trình bày kỹ hơn trong cuốn công phá kỹ thuật giải toán CASIO.

Ví dụ 2. Phương trình $\sin 2x = -\sin\frac{\pi}{3}$ có nghiệm dạng $x = \alpha + k\pi$ và $x = \beta + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}), \left(-\frac{\pi}{4} \le \alpha; \beta \le \frac{3\pi}{4}\right)$. Khi đó tích $\alpha.\beta$ bằng :

A. $-\frac{\pi^2}{9}$. **B.** $-\frac{\pi}{9}$. **C.** $-\frac{4\pi^2}{9}$. **D.** $\frac{\pi^2}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sin 2x = -\sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin(-\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \pi - (-\frac{\pi}{3}) + k2\pi \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \Rightarrow \alpha.\beta = -\frac{\pi^2}{9}.$$

II. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Dạng $\sin x = m,\quad \cos x = m,\quad \tan x = m,\quad \cot x = m,\ (m \in \mathbb{R})$

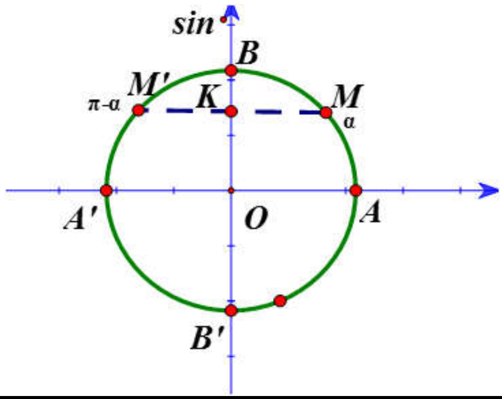
1. Phương trình $\sin x = m \quad (1)$

- Nếu $|m| > 1 \Rightarrow$ Phương trình (1) vô nghiệm do $|\sin x| \le 1\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $|m| \le 1$:

+ Xác định α sao cho $m = \sin\alpha$.

Vậy phương trình $\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

+ Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\ \sin\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arcsin m$ (đọc là ac-sin-m). Khi đó $\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.



STUDY TIP

+) $\sin x = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow |m \le 1|$

+) arc sin m là cung thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ mà có sin bằng *m*.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau đây,phương trình nào có tập nghiệm là $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ và $x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi,\quad (k \in \mathbb{Z})$.

A. $\sin x = \frac{2}{\sqrt{2}}$ **B.** $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Lời giải

Chọn A

Cách 1

A. $\sin x = \frac{2}{\sqrt{2}}$ vô nghiệm do $\frac{2}{\sqrt{2}} > 1$.

B. $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4}$ (vì $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\Leftrightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{3})$ (vì $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{3})$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

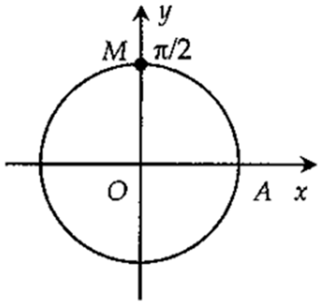
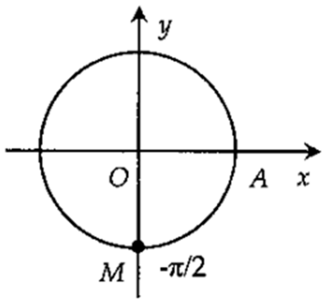
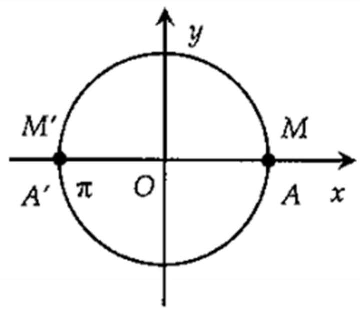
D. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương án đúng là C.

Cách 2 : Sử dụng máy tính cầm tay (MTCT).

Ta có $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}+k2\pi\right)=\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Đặc biệt

Phương trình	**Biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác**
+ $\sin x=1$ $\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.	 sđ $\overset{\frown}{AM}=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
+ $\sin x=1$ $\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.	 sđ $\overset{\frown}{AM}=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
+ $\sin x=0$ $\Leftrightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$.	sđ $\overset{\frown}{AM}=k2\pi; k\in\mathbb{Z}$ sđ $\overset{\frown}{AM}=(2k+1)\pi; k\in\mathbb{Z}$ Để ý: $\left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=(2k+1)\pi \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow x=k\pi; k\in\mathbb{Z}$ 

2. Phương trình $\cos x=m$ (2)

- Nếu $|m|>1\Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm (do $|\cos x|\le 1, \forall x\in\mathbb{R}$).

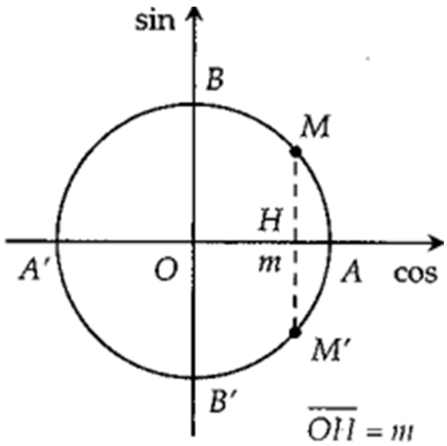
- Nếu $|m|\le 1$:

  + Xác định α sao cho $\cos\alpha=m$.

  Vậy phương trình $\cos x=m\Leftrightarrow \cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k2\pi \\ x=-\alpha+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

  + Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} 0\le\alpha\le\pi \\ \cos\alpha=m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha=\arccos m$ (đọc là ac-cos- m).

  Khi đó $\cos x=m\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\arccos m+k2\pi \\ x=-\arccos m+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.



sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha + k2\pi$; sđ $\overset{\frown}{AM} = -\alpha + k2\pi$

STUDY TIP

+ $\arccos m$ là cung thuộc $[0;\pi]$ mà có cos bằng m.

+ Phương trình $\cos x = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow |m| \le 1$.

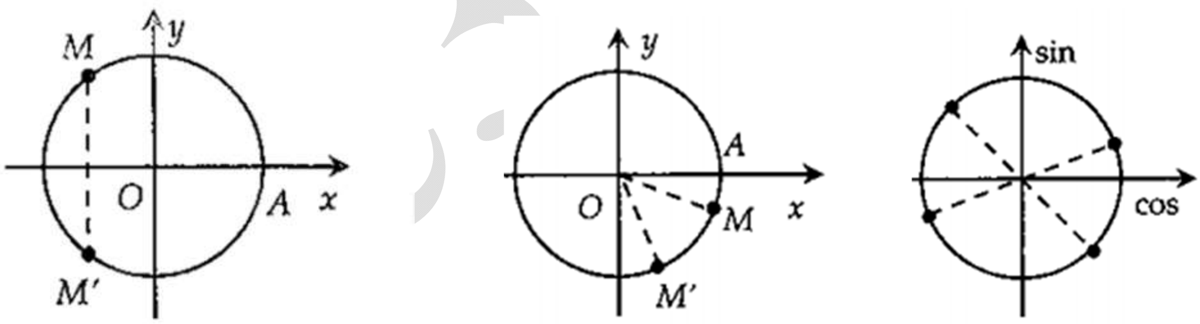
Ví dụ 1. Phương trình nào trong các phương trình sau có 2 nghiệm thuộc $(0°;180°)$?

A. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.   **B.** $\cos(x+50°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos(x+30°) = \dfrac{1}{2}$.   **D.** $\cos x = -\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C



A. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos 135° \Leftrightarrow x = \pm 135° + k360°$ chỉ có một nghiệm thuộc $(0°;180°)$.

B. $\cos(x+50°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(x+50°) = \cos 30° \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -20° + k360° \\ x = -80° + k360° \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình không có nghiệm nào thuộc $(0°;180°)$'

C. $\cos(x+30°) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x+30°) = \cos 60°$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 30° = 60° + k360° \\ 2x + 30° = -60° + k360° \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 15° + k180° \\ x = -45° + k180° \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm thuộc $\left(0°;180°\right)$.

D. $\cos x=-\dfrac{4}{3}$ vô nghiệm do $-\dfrac{4}{3}<-1$.

Ví dụ 2. Chọn đáp án **sai**: Nghiệm của phương trình $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ là:

A. $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

B. $x=\pm\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

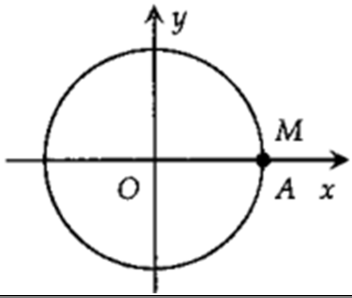
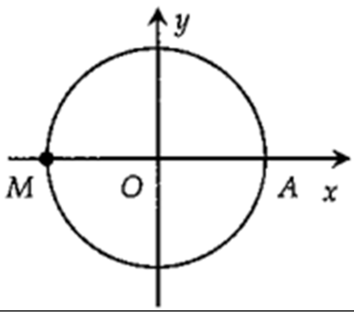
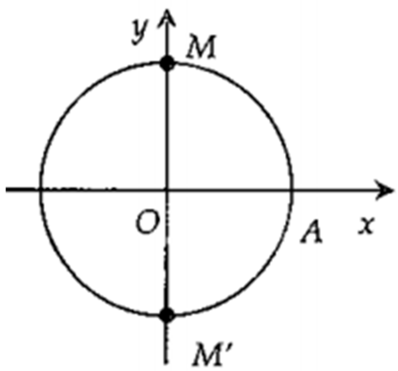
D. $x=\pm150°+k360°,k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn A

Dễ dàng kiểm tra trên đường tròn lượng giác $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Đặc biệt

Phương trình	Biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác
+ $\cos x=1$ $\Leftrightarrow x=k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.	$M\equiv A$ $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AM}=0+k2\pi=k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. 
+ $\cos x=-1$ $\Leftrightarrow x=\left(2k+1\right)\pi,k\in\mathbb{Z}$.	sđ $\overset{\frown}{AM}=\pi+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. $=\left(2k+1\right)\pi;k\in\mathbb{Z}$. 
+ $\cos x=0$ $\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ ..	sđ $\overset{\frown}{AM}=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$ sđ $\overset{\frown}{AM'}=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$ Để ý: $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$ 

3. Phương trình $\tan x=m,\cot x=m$

a) Phương trình $\tan x = m$

Điều kiện: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

- Ta xác định α sao cho $m = \tan\alpha$.

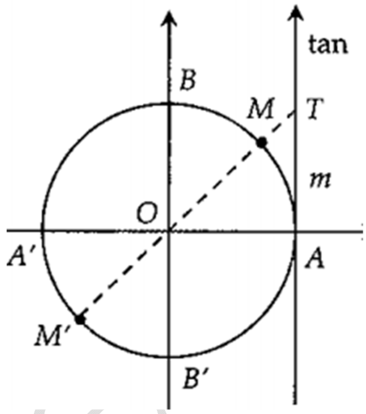
Khi đó phương trình

$\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

+ Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \\ \tan\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết

$\alpha = \arctan m$ (đọc là ac - tan - m).

Khi đó phương trình $\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$..



$\overline{AT} = m$

b) Phương trình $\cot x = m$

Điều kiện: $x \neq k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$

- Ta xác định α sao cho $m = \cot\alpha$.

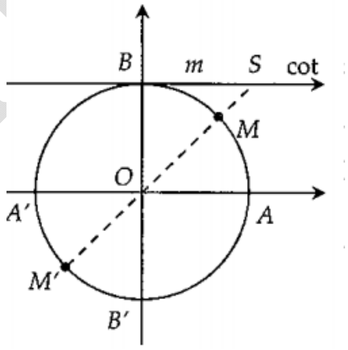
Khi đó phương trình

$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

+ Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} 0 < \alpha < \pi \\ \cot\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết

$\alpha = \operatorname{arccot} m$ (đọc là ac - cotang - m).

Khi đó phương trình $\cot x = m \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.



$\overline{AS} = m$

STUYDY TIP
Phương trình $\tan x = m, \cot x = m$ luôn có nghiệm với $\forall m \in \mathbb{R}$

Ví dụ 1. Trong các nghiệm dương bé nhất của các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm dương nhỏ nhất?

A. $\tan 2x = 1$. **B.** $\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$. **C.** $\cot x = 0$. **D.** $\cot x = -\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

A. $\tan 2x = 1 \Leftrightarrow \tan 2x = \tan\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

(Với $k = 0$ nên nghiệm dương bé nhất là $x = \dfrac{\pi}{8}$)

B. $\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

$\Rightarrow$ Nghiệm dương bé nhất là $x=\dfrac{7\pi}{12}$.

C. $\cot x=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right) \Rightarrow$ Nghiệm dương bé nhất là $x=\dfrac{\pi}{2}$.

D. $\cot x=-\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x=\cot\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Chọn $k=1 \Rightarrow$ Nghiệm dương bé nhất là $x=\dfrac{5\pi}{6}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất là $x=\dfrac{\pi}{8}$ nên ta chọn đáp án A.

Ví dụ 2. Phương trình $\tan\left(3x-15^\circ\right)=\sqrt{3}$ có các nghiệm là:

A. $x=60^\circ+k180^\circ$. **B.** $x=75^\circ+k180^\circ$. **C.** $x=75^\circ+k60^\circ$. **D.** $x=25^\circ+k60^\circ$.

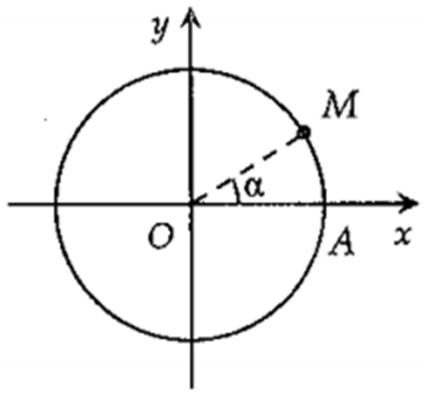
Lời giải

Chọn D

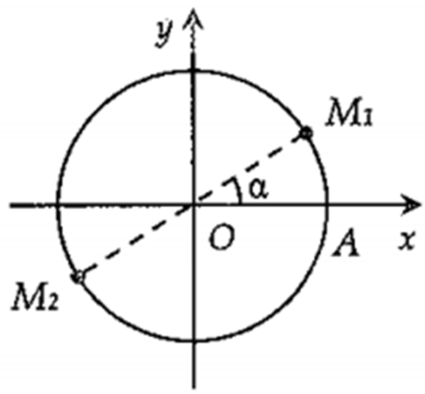
Ta có: $\tan\left(3x-15^\circ\right)=\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(3x-15^\circ\right)=\tan 60^\circ \Leftrightarrow 3x-15^\circ=60^\circ+k180^\circ$

$\Leftrightarrow x=25^\circ+k60^\circ\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

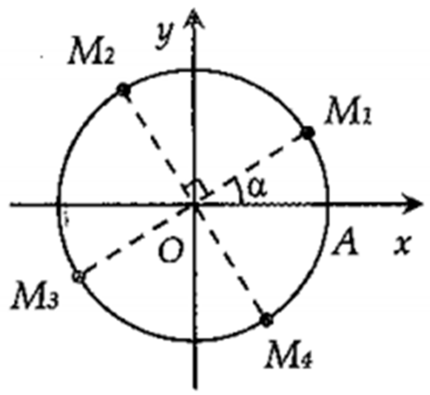
**** Kĩ năng biểu diễn và tổng hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác***



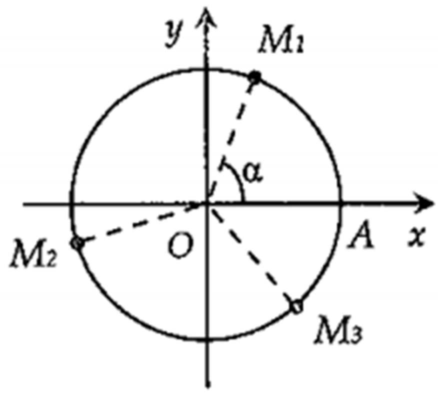
1 điểm trên đường tròn lượng giác $x=\alpha+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$



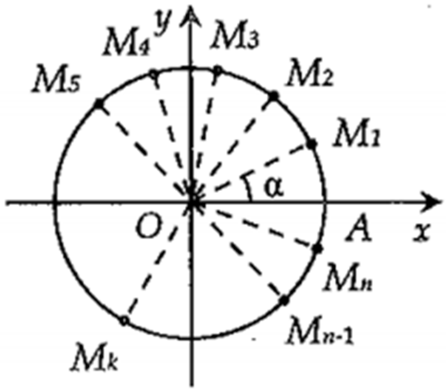
2 điểm đối xứng qua gốc O $x=\alpha+k\pi;k\in\mathbb{Z}$



4 điểm cách đều: $x=\alpha+k\dfrac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$



3 điểm cách đều: $x=\alpha+k\dfrac{2\pi}{3};k\in\mathbb{Z}$



n điểm cách đều: $x=\alpha+k\dfrac{2\pi}{n};k\in\mathbb{Z}$

III. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP.

DẠNG 1: PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Có dạng $at+b=0$ với $a,b\in\mathbb{R},a\neq 0$, t là một hàm số lượng giác

Phương pháp giải

$at+b=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{b}{a}$ (đây là phương trình lượng giác cơ bản đã học)

STUDY TIP

1. $a\sin f(x)+b=0$. 2. $a\cos f(x)+b=0$ 3. $a\tan f(x)+b=0$. 4. $a\cot f(x)+b=0$.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào có 2 nghiệm thuộc $(0;\pi)$?

A. $\sqrt{3}\sin x-2=0$. **B.** $2\cos x+1=0$.

C. $\sqrt{3}\tan x+1=0$. **D.** $\sqrt{2}\sin x-1=0$.

Lời giải

Chọn D

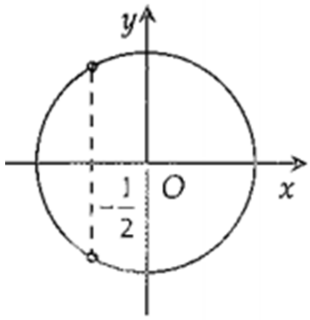
A. $\sqrt{3}\sin x-2=0\Leftrightarrow\sin x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ vô nghiệm (loại phương án A).

B. $2\cos x+1=0\Leftrightarrow\cos x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})\Rightarrow$ Có 1 nghiệm thuộc $(0;\pi)$.

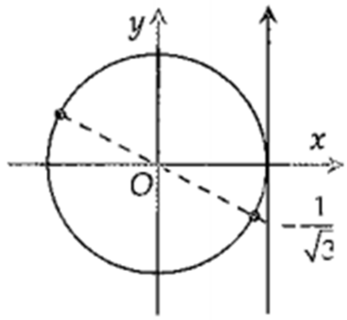
C. $\sqrt{3}\tan x+1=0\Leftrightarrow\tan x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})\Rightarrow$ Có 1 nghiệm thuộc $(0;\pi)$.

D. $\sqrt{2}\sin x-1=0\Leftrightarrow\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})\Rightarrow$ Có hai nghiệm thuộc $(0;\pi)$.

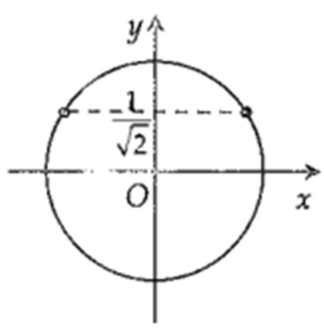
LƯU Ý: Để giải nhanh các bạn có thể biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác rồi so sánh để đưa ra đáp án một cách dễ dàng.



B. $\cos x = -\frac{1}{2}$



C. $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$



D. $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

STUDY TIP
Một số phương trình phải qua một vài bước biến đổi đưa về phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác.

Ví dụ 2. Tổng hai nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất của phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$ là:

A. $\frac{5\pi}{6}$, **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{7\pi}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\sin^6 x + \cos^6 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x\right)$

$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x \; = 1 - \frac{3}{4}.\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{5+3\cos 4x}{8}$

$\Rightarrow \frac{5+3\cos 4x}{8} = \frac{7}{16} \Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = \cos\frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 4x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Suy ra phương trình có 2 nghiệm dương nhỏ nhất là $x_1 = \frac{\pi}{6}$ và $x_2 = \frac{\pi}{3}$

Vậy $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{2}$

DẠNG 2.PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI (HOẶC PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2) ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Có dạng: $at^2 + bt + c = 0$ với $a,b,c \in \mathbb{R}; a \neq 0, t$ là một hàm số lượng giác.

Phương pháp giải:

- Bước 1: Đặt ẩn phụ, tìm điều kiện của ẩn phụ.

- Bước 2: Giải phương trình ẩn phụ.
- Bước 3: Từ nghiệm tìm được đưa về phương trình lượng giác cơ bản.

Ví dụ 15. Các điểm A, A', B, B' được biểu diễn trên đường tròn lượng giác thì các nghiệm của phương trình $\sin^2 x + 4\sin x + 3 = 0$ là:

A. sđ $\overparen{AB}$. **B.** sđ $\overparen{AA'}$. **C.** sđ $\overparen{AB'}$. **D.** sđ $\overparen{AB}$ và sđ $\overparen{AB'}$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $\sin = t \Rightarrow t = [-1;1] \forall x \in \mathbb{R}$

Phương trình $\sin^2 x + 4\sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -3(l) \end{array}\right.$

Với $t = -1 \Rightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình là sđ $\overparen{AB'}$

Ví dụ 16. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} = 3\cot x + \sqrt{3}$ là:

A. $-\frac{\pi}{2}$. **B.** $-\frac{5\pi}{6}$. **C.** $-\frac{\pi}{6}$. **D.** $-\frac{2\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(1 + \cot^2 x\right) = 3\cot x + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}\cot^2 x - 3\cot x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot x = 0 \\ \cot x = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Vậy nghiệm âm lớn nhất là $-\frac{\pi}{2}$

Ví dụ 17. Tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0;2018)$ của phương trình $\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = 1 - 2\sin x$ là:

A. 207046π. **B.** 206403π. **C.** 205761π. **D.** 204603π.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right)^2 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\cos^2 \frac{x}{2} = 1 - 2\sin x$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 x = 1-2\sin x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin^2 x - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = 4(VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$0<x<2018 \Leftrightarrow 0<k\pi<2018 \Leftrightarrow 0<k<\frac{2018}{\pi} \Rightarrow k\in\{1,2,3,...,642\}$$

Vậy tổng các nghiệm cần tìm là:

$$S=\pi+2\pi+3\pi+...+642\pi=\pi\left(1+2+3+...+642\right)=\frac{642\left(642+1\right)}{2}\pi=206403\pi$$

DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI SINX, COSX:

Có dạng $a\sin x+b\cos x=c\left(1\right)$ trong đó $\begin{cases}a,b,c\in\mathbb{R}\\ a^2+b^2\neq 0\end{cases}$

Phương pháp giải:

Chia 2 vế cho $\sqrt{a^2+b^2}$ ta được:

$$\left(1\right)\Leftrightarrow\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Đặt $\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha\\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha\end{cases} \Rightarrow \left(1\right)\Rightarrow \sin x.\cos\alpha+\cos x.\sin\alpha=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x+\alpha\right)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(2\right)$. Đây là phương trình lượng giác cơ bản.

+ Phương trình $\sin\left(x+\alpha\right)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ có nghiệm khi:

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1\Leftrightarrow\frac{c^2}{a^2+b^2}\leq 1\Leftrightarrow a^2+b^2\geq c^2$$

+ Bạn có thể đặt: $\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha\\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha\end{cases}$

$\Rightarrow\left(1\right)\Rightarrow \cos x.\cos\alpha+\sin x.\sin\alpha=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow\cos\left(x-\alpha\right)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Việc đặt thế nào thì tùy từng bài để được lời giải hợp lý nhất.

Ví dụ 1. Phương trình $m\sin x-\cos x=1$ với m là tham số vô nghiệm khi:

A. $m\in\left(0;+\infty\right)$. **B.** $m\in\mathbb{R}\backslash\left(0\right)$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $m=0$.

Lời giải:

Chọn C.

+ Ta đi tìm m để phương trình $m\sin x-\cos x=1$ có nghiệm rồi lấy phần bù

+ Ta có: Phương trình $m\sin x-\cos x=1\left(*\right)$ có nghiệm $\Leftrightarrow m^2+\left(-1\right)^2\ge 1^2\Leftrightarrow m^2\ge 0\forall m\in\mathbb{R}$

Vậy phương trình $\left(*\right)$ có nghiệm $\forall m\in\mathbb{R}$ suy ra phương trình $m\sin x-\cos x=1$ vô nghiệm khi $m\in\varnothing$

Ví dụ 2. Nghiệm của phương trình $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

B. $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

C. $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

D. $\left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\dfrac{1}{2}$ (chia 2 vế cho $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+3}=2$)

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Ví dụ 3. Gọi a,b lần lượt là nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\dfrac{\cos x-\sin 2x}{2\cos^2 x-\sin x-1}=\sqrt{3}$, ta có:

A. $ab=0$.

B. $ab=\dfrac{11\pi^2}{6}$.

C. $ab=-\dfrac{11\pi^2}{6}$.

D. $ab=-\dfrac{\pi^2}{36}$.

Lời giải:

Chọn C.

+ Điều kiện: $2\cos^2 x-\sin x-1\ne 0\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1\ne 0$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \sin x\ne -1 \\ \sin x\ne\dfrac{1}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x\ne -\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x\ne\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x\ne\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

+ Phương trình $\Leftrightarrow \cos x-\sin 2x=\sqrt{3}\left(2\cos^2 x-1-\sin x\right)\Leftrightarrow \cos x-\sin 2x=\sqrt{3}\left(\cos 2x-\sin x\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x + \cos x = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \cos\frac{\pi}{3}\sin 2x + \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{6} = 2x+\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{6} = \pi - 2x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} - k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + (2k+2)\frac{\pi}{3} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

Kết hợp điều kiện suy ra phương trình có các nghiệm $x = -\frac{\pi}{6} - k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Chọn $k=1 \Rightarrow a = \frac{11\pi}{6}; k=0 \Rightarrow b = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow a.b = -\frac{11\pi^2}{36}$

Ví dụ 4. Phương trình $3\sin 3x + \sqrt{3}\cos 9x = 2\cos x + 4\sin^3 3x$ có số nghiệm trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải:

Chọn D.

Phương trình $\Leftrightarrow 3\sin 3x - 4\sin^3 3x + \sqrt{3}\cos 9x = 2\cos x$

$\Leftrightarrow \sin 9x + \sqrt{3}\cos 9x = 2\cos x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 9x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x = \cos x$

$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{6}\sin 9x + \cos\frac{\pi}{6}\cos 9x = \cos x \Leftrightarrow \cos\left(9x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x - \frac{\pi}{6} = x + k2\pi \\ 9x - \frac{\pi}{6} = -x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{48} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{60} + k\frac{\pi}{5} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

- **TH1**: $x = \frac{\pi}{48} + k\frac{\pi}{4}$. Chọn $k = \{0;1\} \Rightarrow x = \left\{\frac{\pi}{48};\frac{13\pi}{48}\right\} \subset \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

- **TH2:** $x = \frac{\pi}{60} + k\frac{\pi}{5}$. Chọn $k = \{0;1;2\} \Rightarrow x = \left\{\frac{\pi}{60};\frac{13\pi}{60};\frac{5\pi}{12}\right\} \subset \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Vậy phương trình có 5 nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

DẠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP

Là phương trình dạng $f(\sin x;\cos x) = 0$ trong đó lũy thừa của $\sin x$ và $\cos x$ cùng bậc chẵn hoặc lẻ.

Phương pháp giải:

- Bước 1: Xét $\cos x = 0 \Rightarrow$ Kết luận nghiệm
- Bước 2: Xét $\cos x \neq 0$, ta chia 2 vế của phương trình cho $\cos^n x$ (n là bậc cao nhất) đưa về phương trình bậc cao của tanx.

Ví dụ 1. Nghiệm của phương trình $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - \cos^2 x = 2(1)$ là:

A. $x = \arctan\left(-\frac{3}{5}\right) + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \arctan\left(-\frac{3}{5}\right) + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{3}{5}\right) + k\pi \end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z})$.

D. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{3}{5}\right) + k2\pi \end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải:

Chọn C.

+ Với $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1$. Thay vào phương trình $(1) \Leftrightarrow 2 = 2$ luôn đúng

$\Rightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ là nghiệm của (1)

+ Với $\cos x \neq 0$, chia 2 vế cho $\cos^2 x$ ta được:

$(1) \Leftrightarrow 2\tan^2 x - 5\tan x - 1 = 2.\frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 2\tan^2 x - 5\tan x - 1 = 2\left(1 + \tan^2 x\right)$

$\Leftrightarrow \tan x = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow x = \arctan x\left(-\frac{3}{5}\right) + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Kết luận: Nghiệm của phương trình (1) là $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{3}{5}\right) + k\pi \end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z})$

LƯU Ý:

- Khi nhìn các phương án trả lời của bài này bạn phải chia 2 vế cho $\cos^2 x \neq 0$ để đưa về phương trình bậc 2 theo tan x.
- Tuy nhiên đối với các phương án trả lời có nghiệm biểu diễn dạng khác. Bạn đọc có thể giải theo các cách sau:

  + Xét $\sin x = 0$ không thỏa mãn phương trình (1)

  + Với $\sin x \neq 0$, chia 2 vế cho $\sin^2 x$ đưa về phương trình bậc 2 theo $\cot x$.

Hoặc dùng công thức hạ bậc để đưa về phương trình bậc nhất với sin và cos:

$(1) \Leftrightarrow 2\frac{1 - \cos 2x}{2} - 5.\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1 + \cos 2x}{2} = 2$

$\Leftrightarrow 5\sin 2x + 3\cos 2x = -3$ (đây là phương trình bậc nhất đối với $\sin 2x$, $\cos 2x$ đã học trong phần trước)

Hoặc $(1) \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - \cos^2 x = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$

$\Leftrightarrow 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$ (đây là phương trình đẳng cấp bậc 2)

Ví dụ 2. Tổng 2 nghiệm âm liên tiếp lớn nhất của phương trình $4\sin^3 x - \sin x - \cos x = 0$ bằng:

A. $\dfrac{5\pi}{2}$. **B.** $-\dfrac{5\pi}{2}$. **C.** $-\dfrac{5\pi}{4}$. **D.** $-\pi$.

Lời giải

Chọn B.

Trường hợp 1: $\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{array}\right.$

Với $\sin x = 1$ $\Rightarrow$ phương trình $\Leftrightarrow 3 = 0$ (vô nghiệm).

Với $\sin x = -1$ $\Rightarrow$ phương trình $\Leftrightarrow 5 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy $\cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình.

Trường hợp 2: $\cos x \neq 0$, chia 2 vế cho $\cos^2 x$ ta được:

Phương trình $\Leftrightarrow 4.\dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x} - \dfrac{\sin x}{\cos x}.\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x} = 0$

$\Leftrightarrow 4\tan^3 x - \tan x\left(1 + \tan^2 x\right) - \left(1 + \tan^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x - \tan^2 x - \tan x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ 3\tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0 (VN) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

Với $k = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{3\pi}{4}$. Với $k = -2 \Rightarrow x = -\dfrac{7\pi}{4}$.

Vậy tổng 2 nghiệm âm lớn nhất là $-\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{7\pi}{4} = -\dfrac{5\pi}{2}$.

Nhận xét: Đây là phương trình cùng bậc lẻ do đó có biến đổi sau:

$4\sin^3 x - \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow 4\sin^3 x - \sin x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) - \cos x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3\sin^3 x - \sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0$ là phương trình đẳng cấp bậc 3 đối với $\sin x$, $\cos x$.

STUDY TIP

Có thể sử dụng đường tròn lượng giác để xác định nghiệm âm lớn nhất.
Cách biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác:

Đuôi $k2\pi$ có 1 điểm. Đuôi $\dfrac{k2\pi}{2} = k\pi$ có 2 điểm. Đuôi $\dfrac{k2\pi}{3}$ có 3 điểm.

Đuôi $\frac{k2\pi}{4}=\frac{k\pi}{2}$ có 4 điểm.	Đuôi $\frac{k2\pi}{n}$ có n điểm.

Ví dụ 3. Phương trình $1+3\tan x-2\sin 2x$ có số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Phương trình $\Leftrightarrow 1+3\frac{\sin x}{\cos x}=4\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x+3\sin x=4\sin x\cos^2 x$ (*)

Đến đây ta thấy phương trình (*) có cùng bậc lẻ cao nhất là 3, ta chia 2 vế cho $\cos^3 x\neq 0$ (do điều kiện)

$(*)\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x}+3\tan x.\frac{1}{\cos^2 x}=4\tan x$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x+\tan^2 x-\tan x+1=0$

$\Leftrightarrow \left(\tan x+1\right)\left(3\tan^2 x-2\tan x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \tan x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ (TMĐK)

$\Rightarrow$ Số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là 2.

STUDY TIP

Ở đây ta có thể từ phương trình đầu chia ngay cho $\cos^2 x$ sẽ nhanh hơn. Tuy nhiên nó sẽ không tự nhiên bởi bạn chưa nhận ra dạng quen thuộc của bài toán.

Ví dụ 4. Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $8\sin x=\frac{\sqrt{3}}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$ ở cung phần tư thứ I và thứ III của đường tròn lượng giác là:

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Phương trình $\Leftrightarrow 8\sin^2 x\cos x=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ (cùng bậc lẻ)

Chia 2 vế cho $\cos^3 x\neq 0$ (do điều kiện)

Phương trình $\Leftrightarrow 8\tan^2 x=\sqrt{3}\tan x.\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow 8\tan^2 x=\sqrt{3}\tan x\left(1+\tan^2 x\right)+\left(1+\tan^2 x\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\tan^3 x-7\tan^2 x+\sqrt{3}\tan x+1=0$

$\Leftrightarrow \left(\tan x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}\tan^2 x-6\tan x-\sqrt{3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \tan x=\sqrt{3}+2\\ \tan x=\sqrt{3}-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\arctan\left(\sqrt{3}+2\right)+k\pi\\ x=\arctan\left(\sqrt{3}-2\right)+k\pi\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Dựa vào việc biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta thấy số điểm biểu diễn nghiệm cần tìm là $4\ \Rightarrow$ Đáp án B.

Ví dụ 18. Các nghiệm của phương trình $\tan x+\cot x=2\sin 2x+\cos 2x$ là:

A. $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\\ x=\dfrac{1}{2}arc\cot\dfrac{1}{2}+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

B. $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{1}{2}arc\cot\dfrac{1}{2}+k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

C. $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\\ x=\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{1}{2}+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

D. $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\\ x=\arctan\dfrac{1}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq k\dfrac{\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}=2\sin 2x+\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2 x=2\sin x\cos x\sin 2x+\sin x\cos x\cos 2x$

$\Leftrightarrow 1=\sin^2 2x+\dfrac{1}{2}\sin 2x\cos 2x$ (*)(đây là phương trình bậc 2)

Chia 2 vế cho $\sin^2 2x\neq 0$ (do điều kiện) ta được:

Phương trình (*) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sin^2 2x}=1+\dfrac{1}{2}\cot 2x$

$$\Leftrightarrow 1+\cot^2 2x = 1+\frac{1}{2}\cot 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot 2x = 0\\ \cot 2x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \frac{\pi}{2}+k\pi\\ 2x = arc\cot\frac{1}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\\ x = \frac{1}{2}arc\cot\frac{1}{2}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})\ \text{(TMĐK)}$$

STUDY TIP (nếu có)

Với $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}$, ta chia luôn 2 vế cho $\sin^2 2x$ để khỏi phải chia 2 trường hợp, bài giải sẽ ngắn gọn hơn.

Khi giải mà kết quả nghiệm có $arc\cot\alpha$ thì chia 2 vế cho $\sin^2 x$ và nếu kết quả nghiệm có $\arctan\alpha$ thì chia 2 vế cho $\cos^2\alpha$.

DẠNG 5. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG VỚI $SINX$ VÀ $COSX$.

Dạng: $a(\sin x+\cos x)+b\sin x\cos x = c(1)$ trong đó $\begin{cases}a,b,c\in\mathbb{R}\\ a.b\neq 0\end{cases}$.

Phương pháp chung:

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ (vì $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1;1]\forall x\in\mathbb{R}$).

$t^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x = 1+2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow at+b\frac{t^2-1}{2}=c$ (là phương trình bậc 2 theo t)

Ví dụ 1. Phương trình $\sin x+\cos x-1=2\sin x\cos x$ có bao nhiêu nghiệm trên $[0;2\pi]$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4 . **D.** 6.

Lời giải

Chọn C.

$\sin x+\cos x-1=2\sin x\cos x$ (1)

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$t^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x = 1+2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow t-1=2\frac{t^2-1}{2}\Leftrightarrow t^2-t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=1\end{array}\right.$ (TMĐK)

Với $t=0 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Với $t=1 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Kết luận: phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Rightarrow$ có 4 nghiệm trên $[0;2\pi]$.

STUDY TIP

Có bao nhiêu điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác các nghiệm của phương trình thì phương trình đó có bấy nhiêu nghiệm trên $[0;2\pi]$.

Chú ý: Với phương trình: $a(\sin x-\cos x)+b\sin x\cos x=c\,(2)$.

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ (vì $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in[-1;1]\,\forall x\in\mathbb{R}$).

$t^2=\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cos x=1-2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow at+b\frac{1-t^2}{2}=c$ (là phương trình bậc 2 theo t)

Một số sách gọi phương trình này là phản đối xứng với $\sin x$, $\cos x$.

Ví dụ 2. Phương trình $1+\sin x-\cos x-\sin 2x=0$ có bao nhiêu nghiệm trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$?

A. 1 . **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 4 .

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện: $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$t^2=\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cos x=1-\sin 2x \Rightarrow \sin 2x=1-t^2$.

Phương trình $\Leftrightarrow 1+t-\left(1-t^2\right)=0 \Leftrightarrow t^2+t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1 \end{array}\right.$ (TMĐK)

Với $t=0 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Với $t=-1 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$\Rightarrow$ có 2 nghiệm thuộc $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ là $x=0$ và $x=\frac{\pi}{4}$.

STUDY TIP

Dạng: $a\left(\sin x-\cos x\right)+b\sin x\cos x+c=0$.

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]. \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Cách 2: Nhận thấy phương trình có $\sin x-\cos x$ và $1-\sin 2x$ có nhân tử chung là $\sin x-\cos x$ nên ta có:

$1+\sin x-\cos x-\sin 2x=0 \Leftrightarrow \sin x-\cos x+\left(\sin x-\cos x\right)^2=0$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x-\cos x\right)\left(1+\sin x-\cos x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x-\cos x=0 \\ 1+\sin x-\cos x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ 1+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

STUDY TIP

$1-\sin 2x=\left(\sin x-\cos x\right)^2$. $\quad 1+\sin 2x=\left(\sin x+\cos x\right)^2$.

Ví dụ 3. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x\cos x+\left|\cos x+\sin x\right|=1$ trên $\left(0;2\pi\right)$ là:

A. π. **B.** 2π. **C.** 3π. **D.** 4π.

Lời giải

Chọn C.

$\sin x\cos x+\left|\cos x+\sin x\right|=1$ (3)

Đặt $t=\left|\sin x+\cos x\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Rightarrow t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

$t^2=1+2\sin x\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}\Rightarrow(3)\Rightarrow\frac{t^2-1}{2}+t=1\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3(l)\end{array}\right.$

Với $t=1:\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\x+\frac{\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\x=\pi+k2\pi\end{array}\right.$$

Suy ra phương trình có 3 nghiệm trên $(0;2\pi)$ là $x=\frac{\pi}{2};x=\pi;x=\frac{3\pi}{2}$

Vậy tổng 3 nghiệm là $\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{3\pi}{2}=3\pi$.

Ví dụ 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình: $\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-m=0$ có nghiệm.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B.

$\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-m=0\Leftrightarrow\sin 2x+\sin x-cosx-m=0$

Đặt $t=\sin x-cosx=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right],\forall x\in\mathbb{R}$

$t^2=1-2\sin xcosx\Rightarrow\sin 2x=1-t^2$

Ta đi tìm m để phương trình $1-t^2+t-m=0$ có nghiệm $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$\Leftrightarrow 1-t^2+t=m$ có nghiệm $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Xét $f(t)=1-t^2+t$ trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

t	$-\sqrt{2}$		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{2}$
$f(t)$			$\frac{5}{4}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-1-\sqrt{2}$				$-1+\sqrt{2}$

Suy ra $-1-\sqrt{2} \le f(t) \le \frac{5}{4}, \forall t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m = f(t)$ có nghiệm trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$\Leftrightarrow m \in \left[-1-\sqrt{2};\frac{5}{4}\right]$ mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2;-1;0;1\}$

Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn.

STUDY TIP

Bảng biến thiên

+) $a<0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
ax^2+bx+c			$-\frac{\Delta}{4a}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

+) $a>0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
ax^2+bx+c	$+\infty$				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$	
			$-\frac{\Delta}{4a}$		

Ví dụ 5. Phương trình $cos^3x+\sin^3 x=cos2x$ có tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất là:

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{5\pi}{4}$. **C.** $\frac{7\pi}{2}$. **D.** $-\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

$\cos^3 x+\sin^3 x=\cos 2x \Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(\cos^2 x-\cos x\sin x+\sin^2 x)=\cos^2 x-\sin^2 x$

$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(1-\cos x\sin x)=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x+\sin x=0 & (1)\\ 1-\cos x\sin x=\cos x-\sin x & (2)\end{array}\right.$

Giải $(1)\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Giải $(2):1-\cos x\sin x+\sin x+\cos x=0$

Đặt $t=\sin x-cosx=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right],\forall x\in\mathbb{R}$

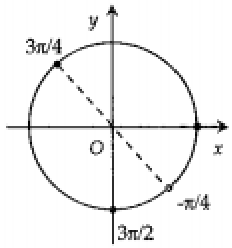
$t^2=1-2\sin xcosx\Rightarrow \sin 2x=1-t^2$

$(2)\Rightarrow 1-\frac{1-t^2}{2}+t=0\Leftrightarrow t^2+2t+1=0\Leftrightarrow t=-1$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$

Biểu diễn nghiệm này trên vòng tròn lượng giác



ta suy ra nghiệm lớn nhất là $x_1=-\frac{\pi}{4}$ và nghiệm bé nhất là $x_2=\frac{3\pi}{4}$

Vậy $x_1+x_2=\frac{\pi}{2}$.

STUDY TIP

+) $\cos^3 x+\sin^3 x=(\cos x+\sin x)(1-\cos x\sin x)$

+) $\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$

+) $1+\sin 2x=(\cos x+\sin x)^2$

Ba biểu thức trên cùng có nhân tử chung là $\cos x+\sin x$.

DẠNG IV. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG MẪU MỰC

Ví dụ 1. **Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích**

Phương trình $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$ có số điểm biểu diễn trên vòng tròn lượng giác là:

A. 2 . **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

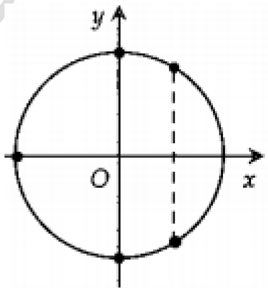
Chọn D.

Phương trình $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0 \Leftrightarrow (\cos 3x+\cos x)+(1+\cos 2x)=0$

$\Leftrightarrow 2cos2x\cos x+2cos^2x=0 \Leftrightarrow 2cosx(cos2x+cosx)=0$

$$\Leftrightarrow 4cosxcos\frac{3x}{2}cos\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} cosx=0 \\ cos\frac{3x}{2}=0 \\ cos\frac{x}{2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ \frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Dựa vào điểm biểu diễn trên vòng tròn lượng giác



Vậy ta có 5 điểm.

Ví dụ 2. **Sử dụng công thức hạ bậc**

Phương trình $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$ không phải là phương trình hệ quả của phương trình nào sau đây ?

A. $\sin x=0$. **B.** $\cos x=0$. **C.** $\sin 9x=0$. **D.** $\cos 2x=0$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình

$\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x \Leftrightarrow \frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{1-\cos 10x}{2}-\frac{1-\cos 12x}{2}$

$\Leftrightarrow (\cos 12x+\cos 10x)-(\cos 8x+\cos 6x)=0 \Leftrightarrow 2\cos 11x\cos x-\cos 7x\cos x=0$ hông

$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos 11x-\cos 7x)=0 \Leftrightarrow -4\cos x\sin 9x\sin 2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin 9x=0 \Rightarrow \cos 2x=0\\ \sin 2x=0\end{array}\right.$

phải là phương trình hệ quả của phương trình đã cho.

Chú ý: Bạn đọc có thể giải các phương trình đơn giản ở các phương án rồi thay vào phương trình ban đầu để kiểm tra.

STUDY TIP

+) Phương trình (1) được gọi là phương trình hệ quả của phương trình (2) nếu tập nghiệm của phương trình (1) chứa tập nghiệm của phương trình (2).

+) $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$; $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$; $\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a$.

Ví dụ 3. Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng

Cho phương trình $\cos x\cos 5x=\cos 2x\cos 4x$ số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là:

A. 3 . **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình $\cos x\cos 5x=\cos 2x\cos 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\cos 6x+\cos 4x]=\frac{1}{2}[\cos 6x+\cos 2x]$

$\Leftrightarrow \cos 4x=\cos 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=2x+k2\pi\\ 4x=-2x+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=k\frac{\pi}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{3}=\frac{k2\pi}{6}\ (k\in\mathbb{Z})$

Vậy số điểm biểu diễn nghiệm là 6.

STUDY TIP

+) $cosa.\cos b=\frac{1}{2}[cos(a-b)+cos(a+b)]$

+) $\sin a.\sin b=\frac{1}{2}[cos(a-b)-cos(a+b)]$

+) $\sin a.\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

Ví dụ 4. **Sử dụng công thức nhân ba**

Cho phương trình $\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0$ có bao nhiêu nghiệm trên $[0;14]$?

A. 3 . **B.** 4 . **C.** 5 . **D.** 6 .

Lời giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow 4cos^3x-3\cos x-4\left(2cos^2x-1\right)+3\cos x-4=0$

$\Leftrightarrow 4cos^3x-8cos^2x=0 \Leftrightarrow cosx=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Mà $x\in[0;14]\Rightarrow 0\le\dfrac{\pi}{2}+k\pi\le 14 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\le k\le\dfrac{14}{\pi}-\dfrac{1}{2}\Rightarrow k\in\{0;1;2;3\}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm thuộc $[0;14]$.

STUDY TIP

$+)\ cos3a=4cos^3a-3cosa$

$+)\ \sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$

Ví dụ 5. **Sử dụng công thức các cung có liên quan đặc biệt**

Phương trình $\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\dfrac{7\pi}{2}\right)=1+2\sin x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $\left(\dfrac{\pi}{2};3\pi\right)$?

A. 4 . **B.** 5 . **C.** 6 . **D.** 7 .

Lời giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow \sin\left[\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)+2\pi\right]-3\cos\left[\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)-4\pi\right]=1+2\sin x$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)-3cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=1+2\sin x \Leftrightarrow cos2x+3\sin x=1+2\sin x$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+3\sin x=1+2\sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\quad (k\in\mathbb{Z})\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$$

Mà $x\in\left(\dfrac{\pi}{2};3\pi\right)$ nên $x\in\left\{\pi;2\pi;\dfrac{13\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{17\pi}{6}\right\}$

Vậy phương trình có 5 nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)$.

Ví dụ 6. **Sử dụng công thức hạ bậc cao**

Cho các phương trình sau:

$$(1)\ \sin^8 x+cos^8x=\frac{17}{16}cos^2 2x$$

$$(2)\ \sin^8 x+cos^8x=\frac{17}{32}$$

$$(3)\ \sin^8 x+cos^8x=\frac{97}{128}$$

$$(4)\ \sin^8 2x+cos^8 2x=\frac{1}{8}$$

Phương trình không tương đương với một trong các phương trình còn lại là:

A. (1) . **B.** (2). **C.** (3). **D.** (4).

Lời giải

Chọn C.

Ta có

$$\sin^8 x+cos^8x=\left(\sin^2 x\right)^4+\left(cos^2 x\right)^4=\left(\frac{1-cos2x}{2}\right)^4+\left(\frac{1+cos2x}{2}\right)^4=\frac{1}{8}\left(cos^4 2x+6cos^2 2x+1\right)$$

Giải (1): $\frac{1}{8}\left(cos^4 2x+6cos^2 2x+1\right)=\frac{17}{16}cos^2 2x \Leftrightarrow 2cos^4 2x-5cos^2 2x+2=0 \Leftrightarrow cos^2 2x=\frac{1}{2}$

Giải (2): $\frac{1}{8}\left(cos^4 2x+6cos^2 2x+1\right)=\frac{17}{32} \Leftrightarrow 4cos^4 2x+24cos^2 2x-13=0 \Leftrightarrow cos^2 2x=\frac{1}{2}$

Giải (3): $\frac{1}{8}\left(cos^4 2x+6cos^2 2x+1\right)=\frac{97}{128} \Leftrightarrow 2cos^4 2x-12cos^2 2x-\frac{81}{8}=0 \Leftrightarrow cos^2 2x=\frac{3}{4}$

Giải (4): $\frac{1}{8}\left(cos^4 4x+6cos^2 4x+1\right)=\frac{1}{8} \Leftrightarrow 2cos^4 4x+12cos^2 4x=0 \Leftrightarrow cos^2 4x=0$

$\Leftrightarrow \left(2\cos^2 2x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \cos^2 2x=\frac{1}{2}$.

Vậy phương trình (3) không tương đương với các phương trình còn lại.

STUDY TIP

$+)\ \sin^8 x+cos^8x=\frac{1}{8}\left(cos^4 2x+6cos^2 2x+1\right)$

$+)\ (t+1)^4+(t-1)^4=2t^4+12t^2+2$

Ví dụ 7. ***Biểu diễn tổng của các đại lượng không âm***

Phương trình $\cos 2x - \cos 6x + 4\left(3\sin x - 4\sin^3 x + 1\right) = 0$ có phương trình tương đương là:

A. $\cos x = 0$.
B. $\sin 3x + 1 = 0$.
C. $\cos x(\sin 3x + 1) = 0$.
D. $\sin x - 1 = 0$.

Lời giải

Chọn D.

$\Rightarrow$ Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 - \left(1 - 2\sin^2 3x\right) + 4\left(\sin 3x + 1\right) = 0.$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\sin^2 3x + 4\sin 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x + 2\left(\sin 3x + 1\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \\ -4\sin^3 x + \sin 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x - 1 = 0.$$

__Lưu ý:__ Có thể thử các nghiệm trong các đáp án vào phương trình đã cho nếu thỏa mãn thì 2 phương trình tương đương.

STUDY TIP

$$\begin{cases} A \ge 0 \\ B \ge 0 \end{cases} \Rightarrow A + B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 8. ***Đặt ẩn phụ - công thức nhân ba***

Phương trình $\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right)$ có tổng các nghiệm trên $\left[0; 2\pi\right]$ là:

A. $\frac{9\pi}{5}$.
B. $\frac{9\pi}{15}$.
C. $\frac{10\pi}{3}$.
D. $\frac{10\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $t = \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{10} - t \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{9\pi}{10} - 3t$

$\Rightarrow$ Phương trình $\Leftrightarrow \sin t = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{9\pi}{10} - 3t\right) \Leftrightarrow \sin t = \frac{1}{2}\sin\left(\pi - 3t\right) \Leftrightarrow \sin t = \frac{1}{2}\sin\left(3t\right)$

$$\Leftrightarrow 2\sin t = 3\sin t - 4\sin^3 t \Leftrightarrow \sin t\left(1-4\sin^2 t\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t = 0 \\ \sin^2 t = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = k\pi (k\in\mathbb{Z}) \\ \cos 2t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = k\pi \\ t = \pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{5} - k2\pi \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{5} \in [0;2\pi] \\ x = \dfrac{14\pi}{15} - k2\pi \Rightarrow x = \dfrac{14\pi}{15} \in [0;2\pi] \\ x = \dfrac{4\pi}{15} - k2\pi \Rightarrow x = \dfrac{4\pi}{15} \in [0;2\pi] \end{array}\right.$$

Vậy tổng các nghiệm trên $[0;2\pi]$ của phương trình là: $\dfrac{3\pi}{5}+\dfrac{14\pi}{15}+\dfrac{14\pi}{15}=\dfrac{9\pi}{5}$.

Ví dụ 9. ***Đặt ẩn phụ không hoàn toàn***

Phương trình $\sin^4\left(\dfrac{x}{2}\right)-\sin^2\dfrac{x}{2}(\sin x+3)+\sin x+2=0$ có các nghiệm là:

A. $x=k2\pi;k\in\mathbb{Z}.$. **B.** $x=k\pi;k\in\mathbb{Z}.$. **C.** $x=(2k+1)\pi;k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=k\dfrac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}.$.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t=\sin^2\dfrac{x}{2}\Rightarrow t\in[0;1],\forall x\in\mathbb{R}.$

Phương trình tương đương $t^2-(\sin x+3)t+\sin x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=1 & (1) \\ t=\sin x+2 & (2) \end{array}\right.$

+ Với $t=1 \Leftrightarrow \sin^2\dfrac{x}{2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{1-\cos x}{2}=1 \Leftrightarrow \cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+k2\pi \Leftrightarrow x=(2k+1)\pi,(k\in\mathbb{Z})$

+ Với $t=\sin x+2 \Leftrightarrow \sin^2\dfrac{x}{2}=\sin x+2$

$$\begin{cases} \sin^2\dfrac{x}{2}\le 1 \\ \sin x+2\ge 1 \end{cases} \Rightarrow \sin^2\dfrac{x}{2}=\sin x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2\dfrac{x}{2}=1 \\ \sin x+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x=-1 \\ \sin x=-1 \end{cases} \text{(vô nghiệm)}$$

Kết luận: Vậy nghiệm của phương trình là $x=(2k+1)\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Nhận xét:

+ Với phương trình này hoàn toàn có thể giải bằng phương pháp đưa về dạng tích

$$A.B=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array}\right..$$

+ Với phương trình $\sin^2\frac{x}{2}=\sin x+2$ (2) có thể giải cách khác như sau:

(2) $\Leftrightarrow \frac{1-\cos x}{2}=\sin x+2 \Leftrightarrow 2\sin x+\cos x=-3$, phương trình này vô nghiệm do $2^2+1^2<(-3)^2$.

STUDY TIP
$a\sin x+b\cos x=c$ có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+b^2\ge c^2$.

Ví dụ 10. ***Phương pháp đánh giá***

Với phương trình $3\cos 4x+(\cos 2x-\sin x)^2=7$ (*) thì:

A. trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 1 nghiệm.

B. trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 2 nghiệm

C. trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 3 nghiệm.

D. trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 4nghiệm.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $3\cos 4x\le 3$

$(\cos 2x-\sin x)^2=|\cos 2x-\sin x|^2\le(|\cos 2x|+|\sin x|)^2\le 2^2$

$\Rightarrow(\cos 2x-\sin x)^2\le 4\Rightarrow 3\cos 4x+(\cos 2x-\sin x)^2\le 7$

Phương trình (*) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}3\cos 4x=3\\(\cos 2x-\sin x)^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 4x=1\\ \cos 2x-\sin x=2(1)\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 4x=1\\ \cos 2x-\sin x=-2(2)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 4x=1\\ \cos 2x=1 \ \text{(I)}\\ \sin x=-1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 4x=1\\ \cos 2x=-1 \quad \text{(II)}\\ \sin x=1\end{cases}\end{array}\right.$

+ Giải (I): $\begin{cases}2\cos^2 2x-1=1\\ \cos 2x=1\\ \sin x=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos^2 2x=1\\ \cos 2x=1\\ \sin x=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x=1\\ \sin x=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-2\sin^2 x=1\\ \sin x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=0\\ \sin x=1\end{cases}$

(vô nghiệm)

+ Giải (II): $\begin{cases}\cos^2 2x=1\\ \cos 2x=-1\\ \sin x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x=-1\\ \sin x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-2\sin^2 x=-1\\ \sin x=1\end{cases} \Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi (k\in\mathbb{Z})$

Vậy phương trình ban đầu có 1 nghiệm thuộc $[0;2\pi]$.

Chú ý: Có thể giải phương trình này bằng cách đưa về phương trình bậc 4 với $\sin x$ sẽ tự nhiên hơn. Tuy nhiên với ví dụ này tôi muốn minh họa thêm cho các bạn một phương pháp giải khác để linh hoạt khi làm bài.

STUDY TIP

(1) $\cos 2x - \sin x = 2 \Leftrightarrow \cos 2x = \sin x + 2$. Mà $\begin{cases} \cos 2x \le 1 \\ \sin x + 2 \ge 1 \end{cases}$

+ suy ra (1) xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \sin x + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases}$

+ suy ra (1) xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \sin x + 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \sin x = 1 \end{cases}$

Lưu ý: Đối với phương trình (1) và (2) ta có thể đưa ngay cách giải ngay bằng cách đưa về phương trình bậc 2 đối với $\sin x$ bằng cách sử dụng công thức $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Tuy nhiên một số phương trình không đưa về được như vậy. Ví dụ $\sin x + \sin 5x = 2$ (bạn đọc tự giải)

Ví dụ 11. ***Phương pháp hàm số***

Phương trình $\sqrt{\sin^2 x + 1} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{\cos^2 x + 1}$ (*) có tổng các nghiệm trong khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. 0. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$ **D.** $\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 x + 1} = -\text{sinx} + \cos x + \sqrt{\cos^2 x + 1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 x + 1} + \text{sinx} = \cos x + \sqrt{\cos^2 x + 1}$ (1)

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2 + 1} + t$ trên $(0;1)$.

Với $\forall t_1, t_2 \in (0;1)$ *va* $t_1 \ne t_2$ ta xét biểu thức

$$\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{\sqrt{t_1^2 + 1} + t_1 - \sqrt{t_2^2 + 1} - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{t_1^2 - t_2^2}{\left(\sqrt{t_1^2 + 1} + \sqrt{t_2^2 + 1}\right)(t_1 - t_2)} + \frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_2} =$$

$$= \frac{t_1^2 - t_2^2}{\left(\sqrt{t_1^2 + 1} + \sqrt{t_2^2 + 1}\right)(t_1 - t_2)} + 1 > 0.$$

Suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $(0;1)$, Suy ra phương trình (1) tuuongw đương

$f(\text{sinx}) = f(\cos x) \Leftrightarrow \text{sinx} = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Vậy phương trình (*) có 1 nghiệm thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là $\frac{\pi}{4}$.

Lưu ý: Đối với việc chứng minh hàm số đồng biến trên $\left(a;b\right)$ của hàm số

$y = f(x), \begin{cases} \forall x_1, x_2 \in \left(a;b\right) \\ x_1 \neq x_2 \end{cases}$, xét tỉ số $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = m$

+ Nếu $m > 0 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\left(a;b\right)$.

+ Nếu $m < 0 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $\left(a;b\right)$.

+ Nếu $= 0 \Rightarrow$ Hàm số không đổi trên $\left(a;b\right)$.

STUDY TIP

+ Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\left(a;b\right)$ thì $\forall x_1, x_2 \in \left(a;b\right)$:

$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$

$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

V. Một số phương trình lượng giác đưa về dạng tích

Ví dụ 1. Phương trình $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$ có số nghiệm trên $\left(0;2\pi\right)$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C.

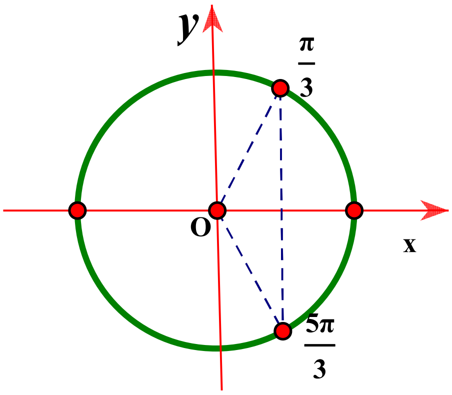
Phương trình $\Leftrightarrow \sin x + 4\cos x = 2 + 2\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow \sin x\left(1 - 2\cos x\right) - 2\left(1 - 2\cos x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x - 2\right)\left(1 - 2\cos x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - 2 = 0 \\ 1 - 2\cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 2 (VN) \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Vậy phương trình có 2 nghiệm trên $\left(0;2\pi\right)$ là $x = \frac{\pi}{3}$ và $x = \frac{5\pi}{3}$.



Ví dụ 2. Phương trình $1+\cos x+\sin x+\cos 2x+\sin 2x=0$ có các nghiệm dạng $x_1=a+k2\pi, x_2=b+k2\pi, x_3=c+k2\pi, x_4=d+k2\pi$. Với $0<a,b,c,d<2\pi$ thì $a+b+c+d$ là:

A. 0. **B.** $\frac{7\pi}{2}$. **C.** $\frac{5\pi}{4}$ **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình $\Leftrightarrow 1+\sin 2x+\cos x+\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)^2+(\cos x+\sin x)+(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(\cos x+\sin x+1+\cos x-\sin x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=0\\ 2\cos x+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Nghiệm trên biểu diễn trên đường tròn lượng giác ta viết lại các nghiệm phương trình là:

$$x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \text{ v } x=\frac{7\pi}{4}+k2\pi \text{ v } x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \text{ v } x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi \Rightarrow a+b+c+d=\frac{3\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}=\frac{9\pi}{2}.$$

Ví dụ 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để phương trình $\cos^3 2x-\cos^2 2x-a\sin^2 x=0$ có nghiệm $x\in\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2 **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow \cos^3 2x-\cos^2 2x-a\frac{1-\cos 2x}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^3 2x - 2\cos^2 2x + a\cos 2x - a = 0 \Leftrightarrow (\cos 2x - 1)(2\cos^2 2x - a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1(1)\\ \cos^2 2x = -\dfrac{a}{2}(2)\end{array}\right.$

-Giải (1) $\Rightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, các nghiệm này không thuộc $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$.

-Giải (2) có $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 2x \in \left(0;\dfrac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \dfrac{1}{2} < \cos 2x < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{4} < \cos^2 2x < 1$

Suy ra phương trình (2) có nghiệm thuộc $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} < \dfrac{-a}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < a < -\dfrac{1}{2}$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của a là -1.

Ví dụ 4. Phương trình $(2\sin x + 1)(4\cos 4x + 2\sin x) + 4\cos^3 x = 3$ nhận các giá trị $x = \arccos m + k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ làm nghiệm thì giá trị m là:

A. $m = \dfrac{1}{4}$. **B.** $-\dfrac{1}{4}$. **C.** $m = \dfrac{1}{16}$ **D.** $m = -\dfrac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(4\cos 4x + 2\sin x) + 4(1 - \sin^2 x) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(4\cos 4x + 2\sin x) + (1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(4\cos 4x + 1) = 0.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -\dfrac{1}{2}\\ \cos 4x = -\dfrac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{1}{4}\arccos(-\dfrac{1}{4}) + k\dfrac{\pi}{2}\\ x = -\dfrac{1}{4}\arccos(-\dfrac{1}{4}) + k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy $m = \dfrac{1}{4}$

STUDY TIP

$\cos^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$

$\sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$

Ví dụ 5. Phương trình $\sin 2x + 2\cos x = \cos 2x - \sin x$ là phương trình hệ quả của phương trình:

A. $\sin(x - \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{2}$ **B.** $\sin 2x = 0$ **C.** $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{2}$ **D.** $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Lời giải

Chọn C

pt $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\cos x=-2\sin x^2-\sin x+1$

$$\Leftrightarrow (\sin x+1)(2\cos x+2\sin x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \cos x+\sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Lưu ý: *Phương trình bậc hai* $at^2+bt+c=0(a\neq 0)$ *có hai nghiệm* t_1,t_2 *thì* $at^2+bt+c=a(t-t_1)(t-t_2)$

VI. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA ĐIỀU KIỆN

Ví dụ 1. Phương trình $\dfrac{\sin 5x}{5\sin x}=1$ có số nghiệm là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** vô số

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\sin x\neq 0\Leftrightarrow \cos x\neq \pm 1$

$Pt\Leftrightarrow \sin 5x-5\sin x=0\Leftrightarrow \sin 5x-\sin x-4\sin x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 3x.\sin 2x-4\sin x=0\Leftrightarrow 2\cos 3x.2\sin x\cos x-4\sin x=0$

$$\Leftrightarrow 4\sin x(\cos 3x\cos x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0(l)\\ \dfrac{1}{2}(\cos 2x+\cos 4x)-1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+2\cos^2 2x-1-2=0\Leftrightarrow 2\cos^2 2x+\cos 2x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=1\\ \cos 2x=-\dfrac{3}{2}(VN)\end{array}\right.$$

Với $\cos 2x=1\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x=1\Leftrightarrow \sin x=0$ (loại vì không TMĐK)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

Ví dụ 2. Phương trình $3\cot^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x=(2+3\sqrt{2})\cos x$ có các nghiệm dạng $x=\alpha+k2\pi; x=\beta+k2\pi, k\in Z, 0<\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{2}$ thì $\alpha.\beta$ bằng:

A. $\dfrac{\pi^2}{12}$ **B.** $-\dfrac{\pi^2}{12}$ **C.** $\dfrac{7\pi}{12}$ **D.** $\dfrac{\pi^2}{12^2}$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\sin x\neq 0\Leftrightarrow \cos x\neq \pm 1$

$Pt\Leftrightarrow 3\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin^4 x=2\cos x.\sin^2 x+3\sqrt{2}\cos x.\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 3\cos x(\cos x-\sqrt{2}\sin^2 x)-2\sin^2 x(\cos x-\sqrt{2}\sin^2 x)=0$

$\Leftrightarrow (\cos x-\sqrt{2}\sin^2 x)(3\cos x-2\sin^2 x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\cos^2 x+\cos x-\sqrt{2}=0(1)\\ 2\cos^2 x+3\cos x-2=0(2)\end{array}\right.$$

$$(1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos x=-\sqrt{2}(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$$

$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x = -2(VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Vậy $\alpha = \dfrac{\pi}{4}; \beta = \dfrac{\pi}{3}; \alpha.\beta = \dfrac{\pi^2}{12}$

Ví dụ 3. Phương trình $\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sin 2x} = \dfrac{1}{\sin 4x}$ có tổng các nghiệm trên $(0;\pi)$ là:

A. $\dfrac{\pi}{6}$ **B.** $\dfrac{\pi}{6}$ **C.** $\dfrac{2\pi}{3}$ **D.** π

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin x \neq \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq \pm 1 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin x \neq \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$Pt \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{2\sin x \cos x} = \dfrac{1}{4\sin x \cos x \cos 2x}$

$\Leftrightarrow 2\sin x \cos 2x + \cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(1 - 2\sin^2 x) + 1 - 2\sin^2 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(1 - 2\sin^2 x - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0(l) \\ 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1(l) \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}$

=>có 2 nghiệm trên $(0;\pi)$ là x=$\dfrac{\pi}{6}$ và x=$\dfrac{5\pi}{6}$

Vậy tổng các nghiệm trên $(0;\pi)$ là: $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{5\pi}{6} = \pi$

Ví dụ 4. Phương trình $\dfrac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0;3\pi)$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -\sqrt{3} \end{array}\right. (*)$

$Pt \Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cos x - \sin x + 2\cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}$

Kết hợp điều kiện (*)=>Nghiệm của phương trình là $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$

Vậy có hai nghiệm thuộc $(0;3\pi)$ là $x=\frac{\pi}{3}$ và $x=\frac{7\pi}{3}$

Ví dụ 5. Phương trình $\frac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin(x+\frac{\pi}{4})}{1+\tan x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ có các nghiệm dạng $x=\alpha+k2\pi; x=\beta+k2\pi, \alpha\neq\beta; k\in Z, -\pi<\alpha,\beta<\pi$ thì $\alpha^2+\beta^2$ là:

A. $\frac{\pi^2}{36}$ **B.** $\frac{35\pi^2}{36}$ **C.** $\frac{13\pi^2}{18}$ **D.** $\frac{15\pi^2}{18}$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}\cos x\neq 0\\ \tan x\neq -1\end{array}\right.(*)$

$$Pt\Leftrightarrow\frac{(1+\sin x+\cos 2x)\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}=\cos x$$

$$\Leftrightarrow\frac{(1+\sin x+1-2\sin^2 x)\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}=1$$

$$\Rightarrow 2+\sin x-2\sin^2 x=1\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện(*) ta có nghiệm của pt là $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. k\in\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow\alpha^2+\beta^2=\frac{\pi^2}{36}+\frac{25\pi^2}{36}=\frac{26\pi^2}{36}=\frac{13\pi^2}{18}$$

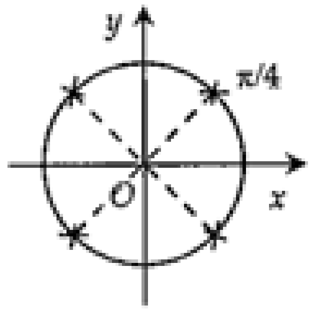
Ví dụ 6. Phương trình $\frac{\sin^4 2x+\cos^4 2x}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\cos^4 x\,(1)$ có số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là:

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} \sin(x+\frac{\pi}{4}) \neq 0 \\ \sin(\frac{\pi}{4}-x) \neq 0 \\ \cos(x+\frac{\pi}{4}) \neq 0 \\ \cos(\frac{\pi}{4}-x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4}+k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4}+k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{4}+k\pi \end{cases}$



Ta có: $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}.\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x} = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}.\frac{1+\tan x}{1-\tan x} = 1$

$(*) \Leftrightarrow \sin^4 2x+\cos^4 2x = \cos^4 4x \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 4x = 1-\sin^2 4x \Leftrightarrow \sin^2 4x = 0$.

$\Leftrightarrow \sin 4x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos x = 0\,(L) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow$ nghiệm của phương trình (1) là $x = k\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

Vậy số điểm biểu diễn cần tìm là 4.

Lưu ý: Ở bài nầy điều kiện bài toán có thể gộp thành $x = \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

Bài tập rèn luyện kỹ năng
Phương trình lượng giác cơ bản

Câu 1. Phương trình $\sin(x+10^0) = \frac{1}{2}\ (0^0 < x < 180^0)$ có nghiệm là:

A. $x = 30^0$ và $x = 150^0$
B. $x = 20^0$ và $x = 140^0$
C. $x = 40^0$ và $x = 160^0$
D. $x = 30^0$ và $x = 140^0$

Câu 2. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4}) = 1$ với $0 \le x \le 2\pi$ là:

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3

Câu 3. Phương trình $\sin(5x+\frac{\pi}{2}) = m-2$ có nghiệm khi:

A. $m\in[1;3]$
B. $m\in[-1;1]$
C. $m\in R$
D. $m\in(1;3)$

Câu 4. Phương trình $\tan(3x+60^0) = m^2$ có nghiệm khi:

A. $m\in[-1;1]$
B. $m\in[0;1]$
C. $m\in R$
D. $m\in\varnothing$

Câu 5. Phương trình có nghiệm $\tan(x-1) = 2$ là:

A. $x = -1+\arctan(2)+k\pi(k\in Z)$
B. $x = 1+\arctan(2)+k\pi(k\in Z)$
C. $x = \arctan(2)+k2\pi(k\in Z)$
D. $x = 1+\arctan(2)+k\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

Câu 6. Tổng các nghiệm của phương trình $\tan x = 1$ trên khoảng $(0;10)$ là:

A. $\frac{15\pi}{4}$ **B.** $\frac{3\pi}{2}$ **C.** $\frac{7\pi}{2}$ **D.** 8π

Câu 7. Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình $\cos x = 0$?

A. $\sin x = 1$ **B.** $\sin x = -1$ **C.** $\tan x = 0$ **D.** $\cot x = 0$

Câu 8. Phương trình $\cos(x+\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{6}$ Có các nghiệm dạng $x = \alpha + k2\pi$ và $x = -\beta + k2\pi$ $(0 \le \alpha; \beta \le \pi)$ Khi đó $\alpha + \beta$ bằng

A. 0 **B.** $-\frac{\pi}{6}$ **C.** $\frac{2\pi}{3}$ **D.** $-\frac{2\pi}{3}$

Câu 9. Phương trình $\cos 2x = -\cos(x+\frac{\pi}{2})$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $(0;10\pi)$

A. 14 **B.** 15 **C.** 16 **D.** 17

Câu 10. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cot x = \tan(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2})$

A. $-\frac{2\pi}{3}$ **B.** $-\frac{\pi}{3}$ **C.** $-\frac{4\pi}{3}$ **D.** 0

Câu 11. Trong các phương trình sau, phương trình nào vô nghiệm?

A. $\tan x = 99$ **B.** $\cot 2018x = 2017$

C. $\sin 2x = -\frac{3}{4}$ **D.** $\cos(2x - \frac{\pi}{2}) = \frac{2\pi}{3}$

Một số phương trình lượng giác thường gặp

Câu 12. Số nghiệm của phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ Trên đoạn $[0; 2\pi]$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 13. Phương trình $m\tan x - \sqrt{3} = 0$ Có nghiệm khi

A. $m \ne 0$. $m \in R$ **C.** $-1 \le \frac{\sqrt{3}}{m} \le 1$ **D.** $-1 < \frac{\sqrt{3}}{m} < 1$

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2\cos^2 x + m - 1 = 0$ Có nghiệm?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** Vô số

Câu 15. Tổng các nghiệm của phương trình $2\sin(x+20^0) - 1 = 0$ trên khoảng $(0^0, 180^0)$

A. 210^0 **B.** 200^0 **C.** 170^0 **D.** 140^0

Câu 16. Phương trình $\sin x - 3\cos x = 0$ có nghiệm dạng $x = \operatorname{arccot} m + k\pi, k \in Z$ thì giá trị m là:

A. $m = \frac{1}{3}$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = -3$ **D.** $m = -\frac{1}{3}$

Câu 17. Tổng 2 nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất của phương trình: $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0$ là:

A. $x = \frac{\pi}{6}$ **B.** $\frac{4\pi}{3}$ **C.** $\frac{\pi}{6}$ **D.** $\frac{5\pi}{6}$

Câu 18. Nghiệm của phương trình $\frac{\tan x - \sqrt{3}}{2\cos x + 1} = 0$ là:

A. $S=\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in Z\right\}$ **B.** $S=\left\{\frac{\pi}{3}+(2k+1)\pi,k\in Z\right\}$

C. $S=\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi,k\in Z\right\}$ **D.** $S=\left\{\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$

Câu 19. Nghiệm của phương trình $2\tan^2 x+\frac{3}{\cos x}=-3$ là:

A. $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

C. $x=k3\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x=k\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 20: Phương trình $\cos^6 x-\sin^6 x=\frac{13}{8}\cos^2 2x$ có bao nhiêu điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác?

A. 3. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\sin^2 x+\left(m^2-3\right)\sin x+m^2-4$ có hai nghiệm thuộc $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** Không có m.

Câu 22: Giá trị của m để phương trình $\cos 2x-(2m+1)\cos x+m+1=0$ có nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ là $m\in[a;b)$ thì $a+b$ là:

A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 23: Phương trình $\cos^4 x+\sin^4 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3}{2}=0$ có tổng 2 nghiệm âm lớn nhất liên tiếp là:

A. $-\frac{3\pi}{2}$. **B.** $-\pi$. **C.** $-\frac{\pi}{2}$. **D.** $-\frac{5\pi}{2}$.

Câu 24: Phương trình $\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin x\cos x-m+2=0$ có nghiệm khi $m\in[a;b]$ thì tích $a.b$ bằng:

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{75}{16}$. **D.** $\frac{15}{4}$.

Câu 25: Phương trình $\tan x+2\cot x-3=0$ có các nghiệm dạng $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$ và $x=\arctan m+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ thì:

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=-2$.

Câu 26: Cho các phương trình sau:.

$(1)\ 2\sin x-\sqrt{5}=0$.

$(2)\ \sin^2 2x+5\cos 2x-7=0$.

$(3)\ \sin^8 3x+\cos^8 3x=\dfrac{5}{4}$.

Trong các phương trình trên, phương trình nào vô nghiệm

A. Chỉ phương trình (1) vô nghiệm. **B.** Chỉ phương trình (2) vô nghiệm.

C. Chỉ phương trình (3) vô nghiệm. **D.** Cả 3 phương trình vô nghiệm.

Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$, $\cos x$.

Câu 27: Phương trình $\sin x+m\cos x=\sqrt{10}$ có nghiệm khi:

A. $\left[\begin{array}{l} m\ge 3 \\ m\le -3 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m> 3 \\ m< -3 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 3 \\ m< -3 \end{array}\right.$. **D.** $-3\le m\le 3$.

Câu 28: Phương trình $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ có các nghiệm dạng $x=\alpha+k2\pi$ và $x=\beta+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ với $-\pi<\alpha,\ \beta<\pi$ thì $\alpha.\beta$ là:

A. $-\dfrac{\pi^2}{6}$. **B.** $-\dfrac{\pi^2}{2}$. **C.** $-\dfrac{\pi^2}{12}$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{12}$.

Câu 29: Phương trình $\cos 2x+\sin x=\sqrt{3}\left(\cos x-\sin 2x\right)$ có các nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3} \\ x=-\dfrac{3\pi}{2}-k2\pi \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$. **D.** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+k2\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu 30: Phương trình $\sin x+\cos x.\sin x+\sqrt{3}\cos 3x=2\left(\cos 4x+\sin^3 x\right)$ có tổng hai nghiệm dương nhỏ nhất liên tiếp là:

A. $\dfrac{\pi}{42}$. **B.** $\dfrac{13\pi}{42}$. **C.** $\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 31: Phương trình $\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$ có nghiệm dương nhỏ nhất là a và nghiệm âm lớn nhất là b thì $a+b$ là:

A. π. **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi}{3}$. **D.** $-\dfrac{\pi}{3}$.

Phương trình đẳng cấp bậc hai.

Câu 32: Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin^2 x$ trên đường tròn lượng giác là:

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 33: Cho phương trình $2\cos^2 x+5\sin x\cos x+6\sin^2 x-m-1=0\ (1)$ số giá trị $m\in\mathbb{Z}$ để phương trình (1) có nghiệm là:

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 34: Phương trình $\sin x+\cos x-4\sin^3 x=0$ tương đương với phương trình:

A. $\tan x=-1$. **B.** $\sin x-\cos x=0$. **C.** $2\cos^2 x-1=0$. **D.** $\sqrt{2}\sin x-1=0$.

Câu 35: Phương trình $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\cos x}$ có bào nhiêu nghiệm trên $(0;2\pi)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 36: Số giá trị nguyên của m để phương trình $2\sin^2 x-\sin x\cos x-m\cos^2 x=1$ có nghiệm trên $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Phương trình đối xứng và các phương trình lượng giác không mẫu mực.

Câu 37: Phương trình $\sin x+\cos x+\sqrt{2}\sin 2x=0$ có số điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-m-1$ có nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 39: Cho phương trình $\cot x-\tan x=\sin x+\cos x$. Khi đặt $t=\sin x-\cos x$ thì:

A. $t=1-\sqrt{2}$. **B.** $t=\sqrt{2}-1$. **C.** $t=0$. **D.** $t=-1-\sqrt{2}$.

Câu 40: Phương trình $\tan x+\cot x=t$ có nghiệm khi:

A. $\left[\begin{array}{l}t\ge 2\\ t\le -2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}t> 2\\ t< -2\end{array}\right.$. **C.** $\forall t\in\mathbb{R}$. **D.** $t\in[-2;2]$.

Câu 41: Cho phương trình $3\tan^2 x+4\tan x+4\cot x+3\cot^2 x+2=0\ (1)$. Đặt $\tan x+\cot x=t$ với $t\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ thì phương trình (1) tương đương với phương trình:

A. $3t^2+4t+2=0$. **B.** $-3t^2+4t-4=0$. **C.** $3t^2+4t-4=0$. **D.** $3t^2-4t-4=0$.

Một số phương trình lượng giác khác.

Câu 42: Phương trình $\cos x+\cos 3x+2\cos 5x=0$ có các nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ và $x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos m+k\pi$. Giá trị của m là:

A. $m=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{8}$. **B.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{16}$. **C.** $m=\dfrac{\pm1+\sqrt{17}}{8}$. **D.** $m=\dfrac{\pm1+\sqrt{17}}{16}$.

Câu 43: Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $\sin 3x-\sin x+\sin 2x=0$ trên đường tròn lượng giác là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 44: Phương trình $\sin^4 x+\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$ có bao nghiêu nghiệm trên $(2\pi;3\pi)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 45: Phương trình $\cos^3 x.\cos 3x+\sin^3 x.\cos 3x=\sin^3 4x$ có bao nhiêu nghiệm trên $[0;2\pi]$?

A. 1. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 2.

Câu 46: Phương trình $\cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{3x}{2}-\sin x.\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{2}$ có tích các nghiệm trên $(-\pi;0)$ là:

A. $-\frac{\pi^2}{8}$. **B.** $\frac{\pi^2}{8}$. **C.** $\frac{5\pi^2}{72}$. **D.** $-\frac{\pi^2}{32}$.

Câu 47: Phương trình $\sin 5x.\cos 3x=\sin 7x.\cos 5x$ có tập nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l}x=k\frac{\pi}{2}\\x=\frac{\pi}{20}+k\frac{\pi}{10}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$. **B.** $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=\frac{\pi}{20}+k\frac{\pi}{10}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{10}\\x=\frac{\pi}{20}+k\frac{\pi}{10}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$. **D.** $\left[\begin{array}{l}x=k\frac{\pi}{2}\\x=\frac{\pi}{20}+k\frac{\pi}{5}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 48: Phương trình $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)$ có tổng 3 nghiệm âm liên tiếp lớn nhất là:

A. $-\frac{\pi}{2}$. **B.** $-\frac{5\pi}{8}$. **C.** $-\frac{3\pi}{8}$. **D.** $-\frac{3\pi}{4}$.

Câu 49: Số nghiệm của phương trình $\sin^8 x-\cos^8 x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ trên $[0;2\pi]$ là:

A. 0. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 50: Phương trình $\tan^2 x+2\sin^2 x-2\tan x-2\sqrt{2}\sin x+2=0$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0;2\pi)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 51: Phương trình $\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0;2\pi)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 52: Phương trình $\sqrt{2}(\sin x-2\cos x)=2-\sin 2x$ có tập nghiệm là:

A. $S=\left\{\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $S=\left\{\pm\frac{3\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $S=\left\{\pm\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
D. $S=\left\{\frac{5\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 53: Phương trình $\cot x-1=\frac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x$ có các nghiệm là:

A. $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.
B. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.
C. $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.
D. $x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu 54: Phương trình $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0;2\pi)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 55: Phương trình $2\sin^2 2x+\sin 7x-1=\sin x$ đưa về phương trình tích được phương trình tương đương là:

A. $\cos 4x(1-\sin 3x)=0$.
B. $2\cos 4x(1-\sin 3x)=0$.
C. $\cos 4x(1+\sin 3x)=0$.
D. $\cos 2x(1+\sin 3x)=0$.

Câu 56: Phương trình $2\sin x(1+\cos 2x)+\sin 2x=1+2\cos x$ là phương trình hệ quả của phương trình:

A. $\cos 2x=0$. **B.** $2\cos x-1=0$. **C.** $\sin 2x+1=0$. **D.** $\sin 2x-1=0$.

Câu 57: Phương trình $6\sin x-2\cos^3 x=\frac{5\sin x.\cos x}{2\cos 2x}$ có số nghiệm trên $(0;2\pi)$ là:

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 58: Phương trình $\sin 4x=\tan x$ có nghiệm dạng $x=k\pi$ và $x=\pm m\arccos n+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ thì $m+n$ bằng:

A. $m+n=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m+n=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m+n=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. **D.** $m+n=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 59: Phương trình $\cos 2x-\tan^2 x=\frac{\cos^2 x-\cos^3 x-1}{\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm trên $[1;70]$?

A. 32. **B.** 33. **C.** 34. **D.** 35.

Phương trình lượng giác chứa tham số.

Câu 60: Phương trình $(2\sin x+1)(\sin x-m)=0$ (m là tham số) có nghiệm trên $(0;\pi)$ khi:

A. $\forall m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $m\in(0;1]$. **D.** $m\in(0;1)$.

Câu 61: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm lớn hơn -10 của m để phương trình $(2\cos x-1)(2\cos 2x+2\cos x-m)=3-4\sin^2 x$ có hai nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 62: Các giá trị của $m\in[a;b]$ để phương trình $\cos 2x+\sin^2 x+3\cos x-m=5$ có nghiệm thì:

A. $a+b=2$. **B.** $a+b=12$. **C.** $a.b=-8$. **D.** $a.b=8$.

Câu 63: Cho phương trình $m\sin x+(m+1)\cos x=\dfrac{m}{\cos x}$. Số các giá trị nguyên dương của m nhỏ hơn 10 để phương trình có nghiệm là:

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 7.

Câu 64: Phương trình $\cos 2x+(2m+1)\sin x-m-1=0$ có nghiệm trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ khi tất cả các giá trị thỏa mãn:

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m\in[-1;1]$. **D.** $m\in(-1;1)$.

Câu 65: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m nhỏ hơn 2018 để phương trình $\dfrac{3}{\sin^2 x}+3\tan^2 x+\tan x+\cot x=m$ có nghiệm ?

A. 2000. **B.** 2001. **C.** 2010. **D.** 2011.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Phương trình lượng giác cơ bản

Câu 1: Đáp án B.

$\sin\left(x+10^o\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin\left(x+10^o\right)=\sin 30^o$

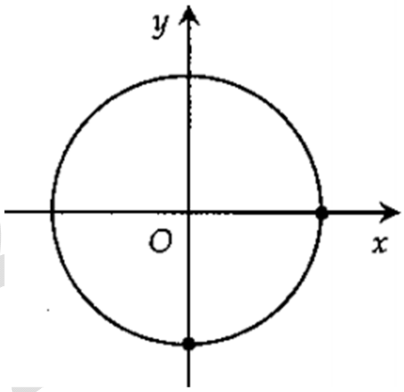
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+10^o=30^o+k360^o\\ x+10^o=180^o-30^o+k360^o\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=20^o+k360^o\\ x=140^o+k360^o\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Mà $x\in\left(0^o;180^o\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=20^o\\ x=140^o\end{array}\right.$.

Câu 2: Đáp án C.

$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Biểu diễn trên đường trong lượng giác:



Vậy có 2 họ nghiệm thuộc $[0;2\pi]$.

Câu 3: Đáp án A.

Phương trình $\sin\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)=m-2$ có nghiệm khi $|m-2|\le 1\Leftrightarrow -1\le m-2\le 1\Leftrightarrow 1\le m\le 3$.

Câu 4: Đáp án C.

Phương trình $\tan\left(x+60^o\right)=m^2$ có nghiệm khi $m\in\mathbb{R}$.

Câu 5: Đáp án B.

Phương trình $\tan\left(x-1\right)=2\Leftrightarrow x-1=\mathrm{rac}\tan 2+k\pi\Leftrightarrow x=1+\mathrm{rac}\tan 2+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Câu 6: Đáp án A.

$\tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Mà $x\in\left(0;10\right)\Leftrightarrow 0<\frac{\pi}{4}+k\pi<10\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<k<\frac{10}{\pi}-\frac{1}{4}$

Do $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0;1;2\} \Leftrightarrow 3$ nghiệm $\in (0;10)$ là $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi$, $x_3 = \frac{\pi}{4} + 2\pi$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = \frac{15\pi}{4}$.

Câu 7: Đáp án D.

Ta có $\cot x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$

Câu 8: Đáp án D.

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

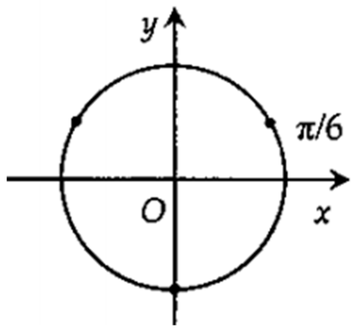
Vậy $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -\frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{2\pi}{3}$.

Câu 9: Đáp án B.

$$\cos 2x = -\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left[\pi - \left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right] \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2}-x+k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2}+x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}$$

(Chú ý gộp nghiệm trên đường tròn lượng giác)



Ta có: $0 < x < 10\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} < 10\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{59}{4}$

Mà $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0;1;2;3;...;14\}$

Vậy có 15 giá trị $k \Rightarrow$ có 15 nghiệm $\in (0;10\pi)$.

Câu 10: Đáp án A.

$\cot x = \tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \cot x = \cot\left(\pi - \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow x = \pi - \frac{x}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = (k+1)\frac{2\pi}{3}$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm âm lớn nhất là $x = -\frac{2\pi}{3}$.

Câu 11: Đáp án D.

Vì $\frac{2\pi}{3} > 1$.

Một số phương trình lượng giác thường gặp

Câu 12: Đáp án B.

$$2\sin x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm thuộc $\left[0;2\pi\right]$ là $x=\frac{\pi}{3}$ và $x=\frac{2\pi}{3}$.

Câu 13: Đáp án A.

+ Với $m=0$: Phương trình $\Leftrightarrow -\sqrt{3}=0$ (vô nghiệm) $\Rightarrow m=0$ không thỏa mãn.

+ Với $m\neq 0$: Phương trình $\Leftrightarrow \tan x=\frac{\sqrt{3}}{m}$ xác định với mọi giá trị $\frac{\sqrt{3}}{m}\in\mathbb{R}$.

Câu 14: Đáp án C.

$2\cos^2 x+m-1=0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{1-m}{2}$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow 0\leq \frac{1-m}{2}\leq 1\Leftrightarrow 0\leq 1-m\leq 2\Leftrightarrow -1\leq m\leq 1$$

Vậy có 3 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 15: Đáp án D.

$$2\sin\left(x+20^o\right)-1=0\Leftrightarrow \sin\left(x+20^o\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin\left(x+20^o\right)=\sin 30^0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+20^o=30^o+k360^0 \\ x+20^o=180^o-30^o+k360^0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10^o+k360^0 \\ x=130^o+k360^0 \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy tổng các nghiệm trên $\left(0^o;180^o\right)$ là: $10^o+130^o=140^o$.

Câu 16: Đáp án B.

$\sin x-3\cos x=0\Leftrightarrow 3\cos x=\sin x\Leftrightarrow \cot x=3\Leftrightarrow x=\operatorname{arccot}3+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

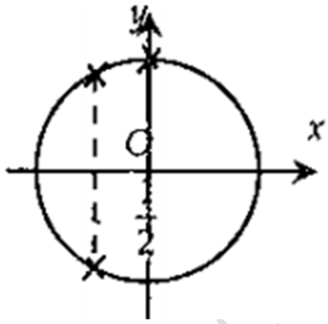
Vậy $m=3$.

Câu 17: Đáp án A.

$$2\sin^2 x+7\sin x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=\frac{1}{2} \\ \sin x=-4\left(VN\right) \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Vậy tổng 2 nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất là: $\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}=\pi$.

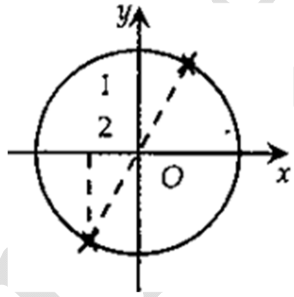
Câu 18: Đáp án C



$$\frac{\tan x-\sqrt{3}}{2\cos x+1}=0$$

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq -\dfrac{1}{2}\\ \cos x\neq 0\end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \tan x=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$



Kết hợp điều kiện suy ra nghiệm của phương trình là

$x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ \ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Câu 19: Đáp án B.

Điều kiện: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ta có: $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow \tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$

Phương trình $\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)+\dfrac{3}{\cos^2 x}=-3\Leftrightarrow 2.\dfrac{1}{\cos^2 x}+3.\dfrac{1}{\cos x}+1=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{\cos x}=-1\\ \dfrac{1}{\cos x}=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-1\ (TM)\\ \cos x=-2\ (l)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

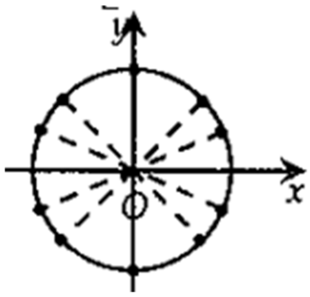
Câu 20: Đáp án C.

$$\cos^6 x-\sin^6 x=\frac{13}{8}\cos^2 2x\Leftrightarrow\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^4 x+\sin^2 x.\cos^2 x+\cos^4 x\right)=\frac{13}{8}\cos^2 2x$$

$$\cos 2x\left[\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)-\sin^2 x.\cos^2 x\right]=\frac{13}{8}\cos^2 2x\Leftrightarrow\cos 2x\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2x\right)-\frac{13}{8}\cos^2 2x=0$$

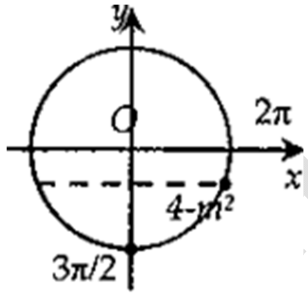
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ 1-\dfrac{1}{4}\left(1-\cos^2 2x\right)-\dfrac{13}{8}\cos 2x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ 2\cos^2 2x-13\cos 2x+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos 2x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right. \ (k\in\mathbb{Z})$$

Câu 21: Đáp án D.



$\sin^2 x+\left(m^2-3\right)\sin x+m^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1 \\ \sin x=4-m^2\end{array}\right.$

+ Với $\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$

có 1 nghiệm $x=\frac{3\pi}{2}\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$

+ Phương trình có 2 nghiệm $\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right) \Leftrightarrow \sin x=m^2-4$ có 1 nghiệm $\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$ khác $\frac{3\pi}{2}$.

Câu 22. Đáp án B.

$\cos 2x-(2m+1)\cos x+m+1=0 \ \Leftrightarrow 2\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m=0 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2} \\ \cos x=m\end{array}\right.$

$x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x\in[-1;0) \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}$ không có nghiệm thỏa mãn $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

Phương trình có nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -1\le m<0 \Rightarrow a+b=1$.

Câu 23. Đáp án D.

$\cos^4 x+\sin^4 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x.\cos^2 x+\frac{1}{2}\left[\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin 2x\right]-\frac{3}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2-\sin^2 2x-\cos 4x+\sin 2x-3=0$

$\Leftrightarrow 2-\sin^2 2x-\left(1-2\sin^2 2x\right)+\sin 2x-3=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x+\sin 2x-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=-2(vn) \\ \sin 2x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy tổng hai nghiệm âm lớn nhất là $-\frac{3\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}=-\frac{5\pi}{2}$.

Câu 24. Đáp án C.

$\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin x.\cos x-m+2=0$

$\Leftrightarrow 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x+\frac{3}{2}\sin 2x-m+2=0$ (*)

$\Leftrightarrow 4m=-3\sin^2 2x+6\sin 2x+12$

Đặt $t=\sin 2x, t\in[-1;1]$. Xét $f(t)=-3t^2+6t+12$ trên $[-1;1]$.

t	-1	1
$f(t)$		15
	3 ↗	

Suy ra (*) có nghiệm $\Leftrightarrow 3\le 4m\le 15 \Leftrightarrow \frac{3}{4}\le m\le \frac{15}{4}$.

Vậy $ab=\frac{75}{16}$.

Câu 25. Đáp án B.

Điều kiện $\begin{cases}\sin x\ne 0\\ \cos x\ne 0\end{cases}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \tan x+\frac{2}{\tan x}-3=0 \Leftrightarrow \tan^2 x-3\tan x+2=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\arctan 2+k\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy $m=2$.

Câu 26. Đáp án D.

Phương trình bậc nhất đối với $\sin x,\cos x$

Câu 27. Đáp án A.

Phương trình có nghiệm $1^2+m^2\ge 10 \Leftrightarrow m^2\ge 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\ge 3\\ m\le -3\end{array}\right.$.

Câu 28. Đáp án C.

$\sin x+\sqrt{3}\cos x=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

$\Rightarrow \alpha.\beta=-\frac{\pi}{6}.\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

Câu 29. Đáp án A.

$\cos 2x+\sin x=\sqrt{3}(\cos x-\sin 2x)$

$\Leftrightarrow \sin x-\sqrt{3}\cos x=-\left(\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin x-\sin\frac{\pi}{3}\cos x=-\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x+\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)$

$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-2x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{3}=-2x-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{3}=\pi+2x+\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=-\frac{3\pi}{2}-k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Câu 30. Đáp án C.

$$\sin x+\cos x.\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\left(\cos 4x+\sin^3 x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(1-2\sin^2 x\right)\sin x+\cos x.\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x.$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos 2x+\cos x.\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x=\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{6}\sin 3x+\cos\frac{\pi}{6}\cos 3x=\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=3x-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 4x=-3x+\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{42}+k\frac{2\pi}{7} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Hai nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất là $x_1=\frac{\pi}{42}, x_2=\frac{13\pi}{42} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{\pi}{3}$.

Câu 31. Đáp án C.

$$\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$$

$$\Leftrightarrow 1+2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos x=2$$

$$\Leftrightarrow \sin x+\sqrt{3}\cos x=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

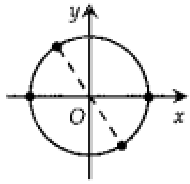
Nghiệm dương nhỏ nhất là $\frac{\pi}{2}$, nghiệm âm lớn nhất là $-\frac{\pi}{6}$.

Vậy $a+b=\frac{\pi}{3}$.

Phương trình đẳng cấp bậc 2.

Câu 32. Đáp án D.

$\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x\,(1) \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x.\cos x - \cos^2 x = -1$



- Với $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 1 = -1$ vô lí.
- Với $\cos x \neq 0$ chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ ta được:

$(1) \Leftrightarrow \tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x - 1 = -\left(1 + \tan^2 x\right) \Leftrightarrow 2\tan^2 x + 2\sqrt{3}\,\mathrm{t} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 0 \\ \tan x = -\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.(k \in \mathbb{Z})$$

Vậy số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là 4.

Câu 33. **Đáp án C.**

$2\cos^2 x + 5\sin x.\cos x + \cos^2 x - m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 5\sin x.\cos x + 6\dfrac{1 - \cos 2x}{2} = m$

$\Leftrightarrow \cos 2x + \dfrac{5}{2}\sin 2x + 3 - 3\cos 2x = m \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}\sin 2x - 2\cos 2x = m - 3$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + (-2)^2 \geq (m-3)^2$

$\Leftrightarrow (m-3)^2 \leq \dfrac{41}{4} \Leftrightarrow |m-3| \leq \dfrac{\sqrt{41}}{2}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{41}}{2} \leq m - 3 \leq \dfrac{\sqrt{41}}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{41}}{2} + 3 \leq m \leq \dfrac{\sqrt{41}}{2} + 3$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$.

Vậy có 7 giá trị m thỏa mãn.

Câu 34. **Đáp án B.**

Phương trình $\sin x + \cos x - 4\sin^3 x = 0\,(*)$

-Với $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \pm 1$ không thỏa mãn phương trình.

-Với $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ ta được

$(*) \Leftrightarrow \tan x\left(1 + \tan^2 x\right) + 1 + \tan^2 x - 4\tan^3 x = 0$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x - \tan^2 x - \tan x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0$

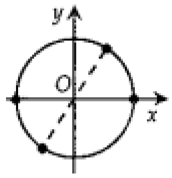
Câu 35. **Chọn đáp án B.**

Điều kiện $\cos x \neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3}\tan x + 1 = 1 + \tan^2 x \Leftrightarrow \tan^2 x - \sqrt{3}\tan x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 0 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.(k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy só nghiệm trên $(0;2\pi)$ là 3.



Câu 36. Đáp án C.

$2\sin^2 x - \sin x.\cos x - m\cos^2 x = 1(1)$

Trên $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \cos x \neq 0$

$(1) \Leftrightarrow 2\tan^2 x - \tan x - m = \tan^2 x + 1 \Leftrightarrow m = \tan^2 x - \tan x - 1$

Đặt $\tan x = t \Rightarrow t \in [-1;1] \forall x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

Yêu cầu bài toán tìm m để phương trình $m = f(t) = t^2 - t - 1$ có nghiệm trên $[-1;1]$

t	-1		$\frac{1}{2}$		1
$f(t)$	1	↘	$-\frac{5}{4}$	↗	-1

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m \in \left[-\frac{5}{4};1\right]$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Phương trình đối xứng và các phương trình lượng giác không mẫu mực.

Câu 37. Đáp án C.

$\sin x + \cos x + \sqrt{2}\sin 2x = 0(1)$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sqrt{2}\sin x.\cos x = 0$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$t^2 = 1 + 2\sin x.\cos x \Rightarrow 2\sin x.\cos x = t^2 - 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow t + \sqrt{2}\left(t^2 - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ t = -\sqrt{2} \end{array}\right.$$

+ Với $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

+ Với $t = -\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Vậy có 3 điểm biểu diễn các nghiệm.

Câu 38. Đáp án D.

$\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-m-1=0 \;\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x+\sin x-\cos x-m-1=0$

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$2\sin x.\cos x=-t^2+1$

Phương trình $\Leftrightarrow m=-t^2+t(*)$ có nghiệm trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Xét hàm số $f(t)=-t^2+t$ trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

t	$-\sqrt{2}$		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{2}$
$-t^2+t$	$-\sqrt{2}-2$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\sqrt{2}-2$

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow m\in\left[-\sqrt{2}-2;\frac{1}{4}\right]$

Vậy các giá trị $m\in\{-3;-2;-1;0\}$ thỏa mãn.

Câu 39. Đáp án A.

Điều kiện $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x=\sin x.\cos x\left(\sin x+\cos x\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin x.\cos x+\sin x-\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0(1)\\ \sin x.\cos x+\sin x-\cos x=0(2)\end{array}\right.$

Giải (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Giải (2). Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$, $\sin x.\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

$(2)\Leftrightarrow \frac{1-t^2}{2}+t=0\Leftrightarrow t^2-2t-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1-\sqrt{2}\,(tm)\\ t=1+\sqrt{2}\,(l)\end{array}\right.$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$. Vậy $t=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Câu 40. Chọn đáp án B.

Cách 1: Điều kiện để phương tình $\tan x+\cot x=t$ có nghiệm:

$|t|=|\tan x+\cot x|=|\tan x|+|\cot x|\ge 2\sqrt{|\tan x.\cot x|}=2\ \Rightarrow t\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

Cách 2: Phương trình $\tan x+\dfrac{1}{\tan x}=t\left(\tan x\ne 0\right)$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \tan^2 x-t.\tan x+1=0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\ge 0\\ 0^2-t.0+1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow t^2-4\ge 0\Leftrightarrow |t|\ge 2$.

Câu 41. **Đáp án C.**

$3\tan^2 x+4\tan x+4\cot x+3\cot^2 x+2=0$

$\Leftrightarrow 4\left(\tan x+\cot x\right)+3\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)+2=0$

$\Leftrightarrow 4t+3\left(t^2-2\right)+2=0\Leftrightarrow 3t^2+4t-4=0$.

Câu 42. **Đáp án A.**

$\cos x+\cos 3x+2\cos 5x=0$

$\Leftrightarrow\left(\cos 5x+\cos x\right)+\left(\cos 5x+\cos 3x\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 3x.\cos 2x+2\cos 4x.\cos x=0$

$\Leftrightarrow\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)\cos 2x+\cos 4x.\cos x=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left[\left(4\cos^2 x-3\cos x\right)\cos 2x+\cos 4x\right]=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left[\left(2\cos 2x-1\right)\cos 2x+2\cos^2 2x-1\right]=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(4\cos^2 2x-\cos 2x-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos 2x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{8}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{8}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Vậy $m=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{8}$.

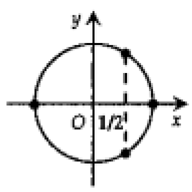
Câu 43. **Đáp án C.**

$\sin 3x-\sin x+\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x.\sin x+2\sin x.\cos x=0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos^2 x+\cos x-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=-1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\pi+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\quad\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$



Vậy có 4 điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 44. **Đáp án A.**

$$\sin^4 x+\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow(1-\cos 2x)^2+\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-(-2x)\right)\right]^2=1$$

$$\Leftrightarrow(1-\cos 2x)^2+(1-\sin 2x)^2=1$$

$$\Leftrightarrow 1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1-2\sin 2x+\sin^2 2x=1$$

$$\Leftrightarrow 3-2\cos 2x-2\sin 2x=1$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x=1 \;\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm thuộc $(2\pi;3\pi)$.

Câu 45. **Đáp án B.**

$$\cos^3 x.\sin 3x+\sin^3 x.\cos 3x=\sin^3 4x$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}.\sin 3x+\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}.\cos 3x=\sin^3 4x$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{4}(\sin 3x.\cos x+\sin x.\cos 3x)=\sin^3 4x$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{4}\sin 4x=\sin^3 4x\Leftrightarrow\sin 12x=0\Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{12}(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 24 nghiệm trên $[0;2\pi]$.

Câu 46. **Đáp án B.**

$$\cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{3x}{2}-\sin x.\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos x.\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos x)-\sin x.\frac{1}{2}(\cos x-\cos 2x)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos x(\cos 2x+\cos x)+1-\sin^2 x-\sin x.\cos x=1$$

$$\Leftrightarrow\cos 2x(\sin x+\cos x)-\sin x(\sin x+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(1-2\sin^2 x-\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x+\cos x=0 \\ 2\sin^2 x+\sin x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=-1 \\ \sin x=-1 \\ \sin x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Suy ra có hai nghiệm thuộc $(-\pi;0)$ là $-\dfrac{\pi}{4}$ và $-\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy tích hai nghiệm là $\dfrac{\pi^2}{8}$.

Câu 47. Đáp án A.

$\sin 5x.\cos 3x=\sin 7x.\cos 5x \Leftrightarrow \sin 8x+\sin 2x=\sin 12x+\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \sin 8x=\sin 12x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 12x=8x+k2\pi \\ 12x=\pi-8x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{k\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{20}+k\dfrac{\pi}{10} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Câu 48. Đáp án D.

Điều kiện $\begin{cases} \sin x\neq 0 \\ \sin\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq k\pi \\ x\neq \dfrac{3\pi}{2}+k\pi \end{cases} (k\in\mathbb{Z}).$

Ta có

$$\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(x-\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}-x\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x).$$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}=-2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)\left(\frac{1}{\sin x.\cos x}+2\sqrt{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x+\cos x=0 \\ \sin x.\cos x=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0 \\ \sin 2x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{8}+k\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{8}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy tổng các nghiệm âm liên tiếp lớn nhất là $-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{3\pi}{8}=-\dfrac{3\pi}{4}$.

Câu 49. Đáp án A.

Ta có $\begin{cases} \sin^8 x\leq 1 \\ -\cos^8 x\leq 0 \end{cases} \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \sin^8 x-\cos^8 x\leq 1$, mà $\dfrac{2}{\sqrt{3}}>1$.

Vậy phương tình đã cho vô nghiệm.

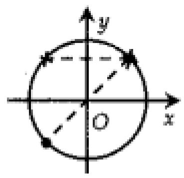
Câu 50. Đáp án A.

$\tan^2 x + 2\sin^2 x - 2\tan x - 2\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\tan^2 x - 2\tan x + 1\right) + \left(2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\tan x - 1\right)^2 + \left(\sqrt{2}\sin x - 1\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$



Vậy phương trình có 1 nghiệm trên $\left(0;2\pi\right)$.

Câu 51. Đáp án C.

Đặt $t = \dfrac{3\pi}{10} - \dfrac{x}{2} \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{3\pi}{10} - t \Leftrightarrow \dfrac{3x}{2} = \dfrac{9\pi}{10} - 3t$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin t = \dfrac{1}{2}\sin\left(\pi - 3t\right) \Leftrightarrow 2\sin t = \sin 3t$

$\Leftrightarrow 2\sin t = 3\sin t - 4\sin^3 t \Leftrightarrow \sin t\left(2\cos 2t - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t = 0 \\ \cos 2t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = k\pi \\ t = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{5} - k2\pi \\ x = \dfrac{14\pi}{5} + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right) \\ x = \dfrac{4\pi}{5} + k2\pi \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 3 nghiệm thuộc $\left(0;2\pi\right)$.

Câu 52. Đáp án B.

$\sqrt{2}\left(\sin x - 2\cos x\right) = 2 - \sin 2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x - 2\sqrt{2}\cos x = 2 - 2\sin x.\cos x$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\sin x - 2\right)\left(\sqrt{2}\cos x + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \sqrt{2}\left(vn\right) \\ \cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right).$

Câu 53. Đáp án B.

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x}} + \sin x\left(\sin x - \cos x\right)$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = \sin x.\cos x\left(\cos x - \sin x\right) + \sin x\left(\cos x - \sin x\right)$

$\Leftrightarrow \left(\cos x - \sin x\right)\left(1 - \sin x\cos x + \sin^2 x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1-\cos 2x}{2} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1(tm) \\ \sin x + \cos x = 3(vn) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Câu 54. Đáp án B.

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq \pm 1$.

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x + 4\sin^2 2x = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1(l) \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm trên $\left(0; 2\pi\right)$

Câu 55. Đáp án C.

$$2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x - 1 + \sin 7x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 4x + 2\cos 4x.\sin\ 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 4x\left(1 + \sin 3x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ 1 + \sin 3x = 0 \end{array}\right.$$

Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 56. Đáp án D.

$$2\sin x\left(1 + \cos 2x\right) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\left(1 + \cos^2 x - 1\right) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$$

$$\Leftrightarrow 4\sin x.\cos^2 x + \sin 2x = 1 + 2\cos x$$

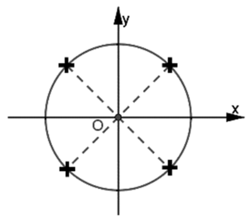
$$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos x + \sin 2x = 1 + 2\cos x$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos x + 1\right)\left(\sin 2x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x + 1 = 0 \\ \sin 2x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Vậy ta chọn đáp án D**.**

Câu 57. Đáp án A.



Điều kiện: $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow 6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x.\cos x$

$\Leftrightarrow 3\sin x - \cos^3 x - 5\sin x.\cos^3 x = 0\,(*)$

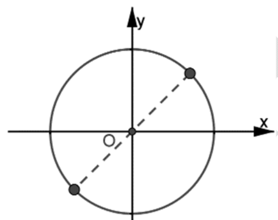
- Với $\cos x = 0$: Không thỏa mãn phương trình $(*)$

- Với $\cos x \neq 0$: Chia hai vế cho $\cos^3 x$ ta được:

$(*) \Leftrightarrow 3\tan x\left(1+\tan^2 x\right) - 1 - 5\tan x = 0$

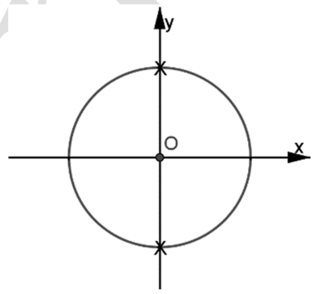
$\Leftrightarrow 3\tan^3 x - 2\tan x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$



Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm

Câu 58. Đáp án A.



Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin 4x.\cos x = \sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x.\cos x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin x.\cos^2 x.\cos 2x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \left(4\cos^2 x.\cos 2x - 1\right)\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 2\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos 2x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \cos 2x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\,(VN) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

$\Rightarrow m + n = \frac{1}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 59. Đáp án B.

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

PT: $\Leftrightarrow \cos 2x - \tan^2 x = 1 - \cos x - \left(1 + \tan^2 x\right)$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi+k2\pi \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\,(k\in\mathbb{Z})$$

Mà $x\in[1;70]\Leftrightarrow 1\le\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\le 70$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2\pi}-\frac{1}{2}\le k\le\frac{105}{\pi}-\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow k\in\{0;1;2;...;32\}$

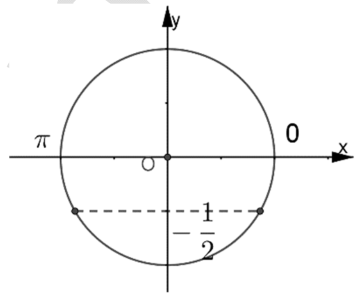
Vậy PT có 33 nghiệm trên $[1;70]$

Phương trình lượng giác chứa tham số

Câu 60. **Đáp án C.**

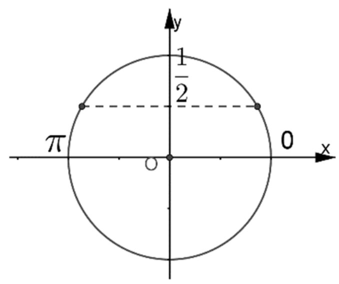
$(2\sin x+1)(\sin x-m)=0(*)$ có nghiệm thuộc $(0;\pi)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=-\dfrac{1}{2}(1) \\ \sin x=m(2) \end{array}\right.$$



Giải $(1)\Rightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$



$\Rightarrow$ PT (1) không có nghiệm nào thuộc $(0;\pi)$

$\Rightarrow(*)$ có nghiệm $\in(0;\pi)$

$\Leftrightarrow \sin x=m$ có nghiệm $\in(0;\pi)\Leftrightarrow m\in(0;1]$.

Chú ý: Độc giả có thể giải cách khác như sau:

Có $\sin x\in(0;1]\,\forall x\in(0;\pi)$

$\Rightarrow \sin x=m$

$\Leftrightarrow m\in(0;1]$

Câu 61. **Đáp án A.**

PT $(2\cos x-1)(2\cos 2x+2\cos x-m)=3-4\sin^2 x$ có đúng hai nghiệm $\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(4\cos^2 x-2+2\cos x-m)$

$=(2\cos x-1)(2\cos x+1)$

$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(4\cos^2 x-3-m)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x-1=0 \\ 4\cos^2 x--3-m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=\dfrac{1}{2}(1) \\ \cos^2 x=\dfrac{m+3}{4}(2) \end{array}\right.$$

Giải (1): $\cos x=\dfrac{1}{2}$ có hai nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

=> Phương trình có hai nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm hoặc (2) $\Leftrightarrow \cos x=\pm\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m+3}{4}>1 \\ \dfrac{m+3}{4}<0 \\ \dfrac{m+3}{4}=\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-3 \\ m=2 \end{array}\right.$$

Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn.

Chú ý: $\cos^2 x\in[0;1]\forall x\in R$

Câu 62. **Đáp án C**

$\cos 2x+\sin^2 x+3\cos x-m=5(*)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1+1-\cos^2 x+3\cos x-m-5=0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x+3\cos x=m+5$

Đặt $\cos x=t\in[-1;1]$, phương trình $\Leftrightarrow t^2+3t=m+5$

Bảng biến thiên:

t	-1	1
t^2+3t	-2	4

=> Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow -2\le m+5\le 4$

$\Leftrightarrow -7\le m\le -1$. Vậy a + b = -8

Câu 63. **Đáp án B**

$m\sin x+(m+1)\cos x=\dfrac{m}{\cos x}(*)$

Điều kiện: $\cos x\neq 0$

$(*) \Leftrightarrow m\sin x\cos x + (m+1)\cos^2 x = m$

$\Leftrightarrow \frac{m}{2}\sin 2x + \frac{m+1}{2}(1+\cos 2x) = m$

$\Leftrightarrow m\sin 2x + (m+1)\cos 2x = m-1 (1)$

+ Từ m = 0 $(*) \Leftrightarrow \cos x = 0$ loại do điều kiện $\Rightarrow m = 0$ phương trình (*) vô nghiệm.

+ Với $m \neq 0$

=> (*) có nghiệm khi (1)

$\Leftrightarrow m^2 + (m+1)^2 \geq (m-1)^2$

$\Leftrightarrow m^2 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -4 \\ m \geq 0 \end{array}\right.$

Vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 64. **Đáp án B**

$\cos 2x + (2m+1)\sin - m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 2m\sin x + \sin x - m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(m - \sin x) - (m - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - m)(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} (1) \\ \sin x = m (2) \end{array}\right.$

Giải (1): $\sin x = \frac{1}{2}$ luôn có 2 nghiệm $\in \left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

$\Rightarrow \forall m$ phương trình có nghiệm.

Câu 65. **Đáp án D**

$\frac{3}{\sin^2 x} + 3\tan^2 x + \tan x + \cot x = m$

$\Leftrightarrow 3(1+\cot^2 x) + 3\tan^2 x + \tan x + \cot x + 3 - m = 0$ Đặt $t = \tan x + \cot x \Rightarrow t^2 - 2 = \tan^2 x + \cot^2 x$

$\Leftrightarrow 3(\tan^2 x + \cot^2 x) + \tan x + \cot x + 3 - m = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 2 \\ t \leq -2 \end{array}\right.$ => Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình $3(t^2 - 2) + t + 3 - m = 0$ có nghiệm $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty) \Leftrightarrow m = 3t^2 + t - 3$

có nghiệm $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{6}$	2	$+\infty$
$3t^2 + t - 3$	$+\infty$ ↘	7		11	↗ $+\infty$

=> Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq 7$

Vậy có 2011 giá trị của m nhỏ hơn 2018

+ Với $\cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 2\sin x\cos x = 0 \\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = -1 \end{cases}$ thì $(1) \Rightarrow -m-1 = m-1 \Leftrightarrow m = 0$