CHỦ ĐỀ: GIỚI HẠN
GIỚI HẠN DÃY SỐ

A. LÝ THUYẾT
I. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0.

1. Định nghĩa

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0 (hay có giới hạn là 0) nếu với mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.
Kí hiệu: $\lim u_n = 0$.

Nói một cách ngắn gọn, $\lim u_n = 0$ nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Từ định nghĩa suy ra rằng:

a) $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \lim |u_n| = 0$.

b) Dãy số không đổi (u_n), với $u_n = 0$, có giới hạn là 0.

c) Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 nếu u_n có thể gần 0 bao nhiêu cũng được, miễn là n đủ lớn.

2. Một số dãy số có giới hạn 0

Định lí 4.1

Cho hai dãy số (u_n) và (v_n).

Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

STUDY TIP

Định lí 4.1 thường được sử dụng để chứng minh một dãy số có giới hạn là 0.

Định lí 4.2

Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

Người ta chứng minh được rằng

a) $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

b) $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$

c) $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ với mọi số nguyên dương k cho trước.

Trường hợp đặc biệt : $\lim \frac{1}{n} = 0$.

d) $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ và mọi $a > 1$ cho trước.

STUDY TIP

Cách ghi nhớ các kết quả bên như sau: Khi tử số không đổi, mẫu số càng lớn (dần đến dương vô cực) thì phân số càng nhỏ (dần về 0)

II. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN.

1. Định nghĩa

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L nếu $\lim(u_n - L) = 0$.

Kí hiệu: $\lim u_n = L$.

Dãy số có giới hạn là một số thực gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

STUDY TIP

a) Dãy số không đổi (u_n) với $u_n = c$, có giới hạn là c.

b) $\lim u_n = L$ khi và chỉ khi khoảng cách $|u_n - L|$ trên trục số thực từ điểm u_n đến L trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được miễn là n đủ lớn; nói một cách hình ảnh, khi n tăng thì các điểm u_n " chụm lại" quanh điểm L.

c) Không phải mọi dãy số đều có giới hạn hữu hạn.

2. Một số định lí

Định lí 4.3

Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó

a) $\lim|u_n| = |L|$ và $\lim\sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$.

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n thì $L \geq 0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

Định lí 4.4

Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ và c là một hằng số. Khi đó

a) $\lim(u_n + v_n) = L + M$.

b) $\lim(u_n - v_n) = L - M$.

c) $\lim(u_n v_n) = LM$.

D) $\lim(cu_n) = cL$.

e) $\lim\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Định nghĩa

Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân có công bội q thỏa $|q| < 1$.

Công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

$$S = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + ... = \frac{u_1}{1-q}$$

III. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC.

1. Dãy số có giới hạn $+\infty$

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ nếu với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$.

Nói một cách ngắn gọn, $\lim u_n = +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Người ta chứng minh được rằng:

a) $\lim \sqrt{u_n} = +\infty$.

b) $\lim \sqrt[3]{u_n} = +\infty$

c) $\lim n^k = +\infty$ với một số nguyên dương k cho trước.

Trường hợp đặc biệt : $\lim n = +\infty$.

d) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

2. Dãy số có giới hạn $-\infty$

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ nếu với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó. Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$.

Nói một cách ngắn gọn, $\lim u_n = -\infty$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số âm nhỏ tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Nhận xét:

a) $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty$.

b) Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $|u_n|$ trở nên lớn bao nhiêu cũng được miễn n đủ lớn. Do đó $\left|\dfrac{1}{u_n}\right| = \dfrac{1}{|u_n|}$ trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được, miễn n đủ lớn. Nói cách khác, nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim \dfrac{1}{u_n} = 0$.

STUDY TIP

Các dãy số có giới hạn $+\infty$ hoặc $-\infty$ được gọi chung là các dãy số có giới hạn vô cực hay dần đến vô cực.

Định lí 4.5

Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim \dfrac{1}{u_n} = 0$.

STUDY TIP

Ta có thể diễn giải "nôm na" định lí 4.5 như sau cho dễ nhớ: Khi tử số không đổi, mẫu số có giá trị tuyệt đối càng lớn(dần đến vô cực) thì phân số càng nhỏ(dần về 0).

3. Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực

Quy tắc 1

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

STUDY TIP

Vì $-\infty$ và $+\infty$ không phải là những số thực nên không áp dụng được các định lí về giới hạn hữu hạn cho các dãy số có giới hạn vô cực.

Quy tắc 2

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Quy tắc 3

Nếu $\lim u_n = L \neq 0$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ kể từ một số hạng nào đó trở đi thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ được cho trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

STUDY TIP

Ở cả ba quy tắc, về dấu, tương tự như quy tắc về dấu của phép nhân hoặc phép chia hai số.

Để cho dễ nhớ, ta diễn giải các quy tắc một cách "nôm na" như sau:

- **Quy tắc 1:** Tích của hai đại lượng vô cùng lớn là một đại lượng vô cùng lớn.
- **Quy tắc 2:** Tích của đại lượng vô cùng lớn với một đại lượng khác 0 là một đại lượng vô cùng lớn.
- **Quy tắc 3:** Khi tử thức có giới hạn hữu hạn khác 0, mẫu thức càng nhỏ(dần về 0) thì phân thức càng lớn(dần về vô cực).

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ GIỚI HẠN DÃY SỐ

DẠNG 1. TÍNH GIỚI HẠN DÃY SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC

Câu 1: $\lim(n^3 - 2n + 1)$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: Ta có: $n^3 - 2n + 1 = n^3\left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)$.

Vì $\lim n^3 = +\infty$ và $\lim\left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = 1 > 0$ nên theo quy tắc 2, $\lim(n^3 - 2n + 1) = +\infty$

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị của biểu thức n^3-2n+1 tại một giá trị lớn của n (do $n\to+\infty$) như sau: Nhập vào màn hình biểu thức X^3-2X+1. Bấm $\boxed{\text{CALC}}$. Máy hỏi X? nhập 10^5, ấn $\boxed{=}$. Máy hiện kết quả như hình bên. Ta thấy kết quả tính toán với $X=10^5$ là một số dương rất lớn. Do đó chọn D.

Câu 2: $\lim\left(5n-n^2+1\right)$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 5. **D.** -1.

Hướng dẫn giải

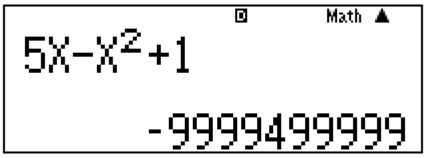
Chọn B.

Cách 1: Ta có $5n-n^2+1=n^2\left(-1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Vì $\lim n^2=+\infty$ và $\lim\left(-1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)=-1<0$ nên $\lim\left(5n-n^2+1\right)=-\infty$ (theo quy tắc 2).

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như ví dụ trên.

Ta thấy kết quả tính toán với $X=10^5$ là một số âm rất nhỏ. Do đó chọn đáp án có giới hạn bằng $-\infty$.



Tổng quát: Cho k là một số nguyên dương.

a) $\lim\left(a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1n+a_0\right)=+\infty$ nếu $a_k>0$.

b) $\lim\left(a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\ldots+a_1n+a_0\right)=-\infty$ nếu $a_k<0$.

Chẳng hạn: $\lim\left(n^3-2n+1\right)=+\infty$ vì $a_3=1>0$; $\lim\left(5n-n^2+1\right)=-\infty$ vì $a_2=-1<0$.

STUDY TIP

Cho u_n có dạng đa thức (bậc lớn hơn 0) của n.

- Nếu hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của n là một số dương thì $\lim u_n=+\infty$.
- Nếu hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của n là một số âm thì $\lim u_n=-\infty$.

Câu 3: $\lim u_n$, với $u_n=\dfrac{5n^2+3n-7}{n^2}$ bằng:

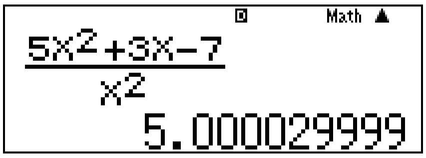
A. 0. **B.** 5. **C.** 3. **D.** -7.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1: Ta có: $\lim u_n=\lim\left(\dfrac{5n^2}{n^2}+\dfrac{3n}{n^2}-\dfrac{7}{n^2}\right)=\lim\left(5+\dfrac{3}{n}-\dfrac{7}{n^2}\right)=5$.

Cách 2: Sử dụng máy tính bỏ túi tương tự những ví dụ trên.



Đây không phải là giá trị chính xác của giới hạn cần tìm, mà chỉ là giá trị gần đúng của một số hạng với n khá lớn, trong khi n dần ra vô cực. Tuy nhiên kết quả này cũng giúp ta lựa chọn đáp án đúng, đó là đáp án **B.**

STUDY TIP

Một số dòng máy hiện kết quả là dạng phân số, chẳng hạn $\frac{1500044}{300007}$. Do $\frac{15}{3}=5$ nên chọn **B.**

Câu 4: $\lim u_n$, với $u_n=\dfrac{2n^3-3n^2+n+5}{n^3-n^2+7}$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Cách 1: Chia cả tử và mẫu của phân thức cho n^3 (n^3 là lũy thừa bậc cao nhất của n trong phân thức), ta được: $u_n=\dfrac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{1-\frac{1}{n}+\frac{7}{n^3}}$. Vì $\lim\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}\right)=2$ và $\lim\left(1-\frac{1}{n}+\frac{7}{n^3}\right)=1\neq 0$ nên $\lim\dfrac{2n^3-3n^2+n+5}{n^3-n^2+7}=\dfrac{2}{1}=2$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như các ví dụ trên.

Ví dụ 5: Giới hạn của dãy số (u_n), với $u_n=\dfrac{n^3+2n+1}{n^4+3n^3+5n^2+6}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1: Chia cả tử và mẫu của phân thức cho n^4 (n^4 là bậc cao nhất của n trong phân thức), ta được

$$\lim u_n=\lim\frac{n^3+2n+1}{n^4+3n^3+5n^2+6}=\lim\frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^3}}=\frac{0}{1}=0.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như các ví dụ trên.

Ví dụ 6: Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{3n^3+2n-1}{2n^2-n}$, bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Cách 1: Chia cả tử và mẫu cho n^2 (n^2 là lũy thừa bậc cao nhất của n trong **mẫu thức**), ta được $u_n = \dfrac{3n^3+2n-1}{2n^2-n} = \dfrac{3n+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}}$. Vậy $\lim u_n = \lim\left(\dfrac{3n}{2}\right) = +\infty$.

Cách 2: Chia cả tử và mẫu cho n^3 (n^3 là lũy thừa bậc cao nhất của n trong **phân thức**), ta được $\lim u_n = \lim\dfrac{3+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}$. Vì $\lim\left(3+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)=3>0$, $\lim\left(\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)=0$ và $\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}>0$ với mọi n nên theo quy tắc 3, $\lim u_n = +\infty$.

Cách 3: Ta có $\lim u_n = \lim\dfrac{n^3\left(3+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(2-\frac{1}{n}\right)} = \lim\left(n\dfrac{3+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{2-\frac{1}{n}}\right)$. Vì $\lim n = +\infty$ và $\lim\dfrac{3+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{2-\frac{1}{n}} = \dfrac{3}{2}>0$ nên theo quy tắc 2, $\lim u_n = +\infty$.

Cách 4: Sử dụng MTCT tương như các ví dụ trên.

STUDY TIP

Rõ ràng làm theo cách 1 (chia cả tử và mẫu cho lũy thừa bậc cao nhất của n trong mẫu thức) ít phải lập luận hơn cách 2 và cách 3.

Tổng quát:

Xét dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{a_i n^i + a_{i-1}n^{i-1}+\ldots+a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1}+\ldots+b_1 n + b_0}$, trong đó $a_i, b_k \neq 0$

(dạng phân thức với tử số và mẫu số là các đa thức của n).

a) Nếu $i>k$ (bậc tử lớn hơn bậc mẫu) thì $\lim u_n = +\infty$ nếu $a_i b_k > 0$, $\lim u_n = -\infty$ nếu $a_i b_k < 0$.

b) Nếu $i=k$ (bậc tử bằng bậc mẫu) thì $\lim u_n = \dfrac{a_i}{b_k}$.

c) Nếu $i<k$ (bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu) thì $\lim u_n = 0$.

STUDY TIP

Cho u_n có dạng phân thức của n.

- Nếu bậc tử cao hơn bậc mẫu thì (u_n) có giới hạn là vô cực
- Nếu bậc tử bằng bậc mẫu thì $\lim u_n$ bằng hệ số của lũy thừa cao nhất trên tử chia cho hệ số của lũy thừa cao nhất ở mẫu.
- Nếu bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu thì $\lim u_n = 0$.

Ví dụ 7: $\lim\dfrac{\sin(n!)}{n^2+1}$ bằng

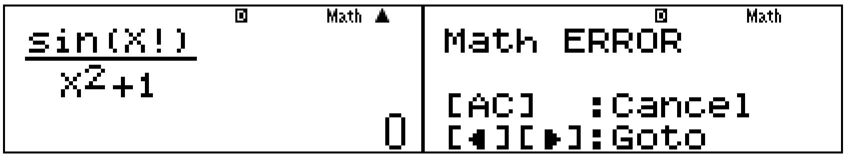
A. 0. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\left|\dfrac{\sin(n!)}{n^2+1}\right| \le \dfrac{1}{n^2+1}$ mà $\lim\dfrac{1}{n^2+1}=0$ nên chọn đáp án **A.**

Lưu ý: Sử dụng MTCT. Với $X=13$, máy tính cho kết quả như hình bên. Với $X>13$, máy bào lỗi do việc tính toán vượt quá khả năng của máy. Do đó với bài này, MTCT sẽ cho kết quả chỉ mang tính chất tham khảo.



Nhận xét: Hoàn toàn tương tự, ta có thể chứng minh được rằng:

a) $\lim\dfrac{\sin^k(u_n)}{v_n}=0$; b) $\lim\dfrac{\cos^k(u_n)}{v_n}=0$.

Trong đó $\lim v_n=\pm\infty, k$ nguyên dương.

Chẳng hạn: $\lim\dfrac{\left(\sin\dfrac{n\pi}{5}\right)^2}{\sqrt{n^3+2n+1}}=0$; $\lim\dfrac{\cos^3(3n+1)\pi}{2^n}=0$; $\lim\dfrac{\cos\sqrt{2n+1}}{\sqrt[3]{n^2-5n^3+n+1}}=0$; …..

STUDY TIP

Khi sử dụng MTCT, với các bài toán liên quan đến lượng giác, trước khi tính toán ta cần chọn chế độ Rad (radian) hoặc Deg (degree) cho phù hợp với đề bài.

Ví dụ 8: $\lim\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1: Ta có $\left|\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}\right|=\dfrac{1}{n(n+1)}<\dfrac{1}{n.n}=\dfrac{1}{n^2}$ mà $\lim\dfrac{1}{n^2}=0$ nên suy ra $\lim\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}=0$

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự các ví dụ trên.

Nhận xét: Dãy $\left((-1)^n\right)$ không có giới hạn nhưng mọi dãy $\left(\dfrac{(-1)^n}{v_n}\right)$, trong đó $\lim v_n=\pm\infty$ thì có giới hạn bằng 0.

Ví dụ 9: Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)$

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=0$. **D.** $I=+\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1: Ta có $I=\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2-2n+3}+n\right)}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}$

$=\lim\dfrac{\left(n^2-2n+3\right)-n^2}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}=\lim\dfrac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}=\lim\dfrac{-2+\dfrac{3}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}+1}=\dfrac{-2}{\sqrt{1}+1}=-1.$

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự các ví dụ trên.

STUDY TIP

Hằng đẳng thức thứ ba: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Hai biểu thức $a-b$ và $a+b$ được gọi là biểu thức liên hợp của nhau.

Ví dụ: $\sqrt{n^2-2n+3}-n$ và $\sqrt{n^2-2n+3}+n$ là hai biểu thức liên hợp của nhau.

Nhận xét: a) ở bước 3 ta đã chia cả tử và mẫu cho n. Lưu ý là $n=\sqrt{n^2}$.

b) Ta có $\sqrt{n^2-2n+3}-n=n\left(\sqrt{1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}-1\right)$, Vì $\lim n=+\infty$ và $\lim\left(\sqrt{1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}-1\right)=0$ nên không áp dụng được quy tắc 2 như trong ví dụ trước đó.

Ví dụ 10: $\lim\left(n-\sqrt[3]{8n^3+3n+2}\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** -1. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1: Ta có $\lim\left(n-\sqrt[3]{8n^3+3n+2}\right)=\lim n\left(1-\sqrt[3]{8+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}}\right)$.

Vì $\lim n=+\infty,\lim\left(1-\sqrt[3]{8+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}}\right)=1-\sqrt[3]{8}=-1<0$ nên $\lim\left(n-\sqrt[3]{8n^3+3n+2}\right)=-\infty$.

Cách 2: Sử dung MTCT như các ví dụ trên.

Ví dụ 11: $\lim\left(n^2-n\sqrt{4n+1}\right)$ bằng:

A. -1. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Cách 1: Ta có $n^2-n\sqrt{4n+1}=n^2\left(1-\sqrt{\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}}\right)$.

Vì $\lim n^2=+\infty$ và $\lim\left(1-\sqrt{\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}}\right)=1>0$ nên theo quy tắc 2, $\lim\left(n^2-n\sqrt{4n+1}\right)=+\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như các ví dụ trên.

Tổng quát:

Xét dãy số $u_n=\sqrt[r]{a_in^i+a_{i-1}n^{i-1}+\ldots+a_1n+a_0}-\sqrt[s]{b_kn^k+b_{k-1}n^{k-1}+\ldots+b_1n+b_0}$, trong đó $a_i,b_k>0$.

- Nếu $\sqrt[r]{a_i} = \sqrt[s]{b_k}$ và $\frac{i}{r} = \frac{k}{s}$: Giới hạn hữu hạn.

+ Nếu hai căn cùng bậc: Nhân chia với biểu thức liên hợp.

+ Nếu hai căn không cùng bậc: Thêm bớt với $\sqrt[r]{a_i n^i}$ rồi nhân với biểu thức liên hợp.

- Nếu $\sqrt[r]{a_i} \neq \sqrt[s]{b_k}$ hoặc $\frac{i}{r} \neq \frac{k}{s}$: Đưa lũy thừa bậc cao nhất của n ra ngoài dấu căn. Trong trường hợp này u_n sẽ có giới hạn vô cực.

Nhận xét: Trong chương trình lớp 12, các em sẽ được học về căn bậc s (s nguyên dương) và lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Người ta định nghĩa rằng $a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$, trong đó a là số thực dương, r là số nguyên dương, s là số nguyên dương, $s \geq 2$. Các tính chất của lũy thừa với số mũ hữu tỉ tương tự lũy thừa với số mũ nguyên dương.

Chẳng hạn: $\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{n} = n^{\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{n^2} = n^{\frac{2}{3}}...$

Chẳng hạn:

a) Với $u_n = \sqrt{n^2 - 2n + 3} - n = \sqrt{n^2 - 2n + 3} - \sqrt{n^2}$: nhân chia với biểu thức liên hợp của $\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n$ là $\sqrt{n^2 - 2n + 3} + n$. Dãy số có giới hạn hữu hạn bằng -1.

b) Với $u_n = n - \sqrt[3]{8n^3 + 3n + 2} = \sqrt[3]{n^3} - \sqrt[3]{8n^3 + 3n + 2}$: đưa n^3 ra ngoài dấu căn.

Giới hạn của $(u_n) = -\infty$.

c) Với $u_n = n^2 - n\sqrt{4n+1} = n\left(\sqrt{n^2} - \sqrt{4n+1}\right)$: đưa n^2 ra ngoài dấu căn.

Giới hạn của (u_n) bằng $+\infty$.

Ví dụ 12. $\lim\left(n - \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1}\right)$ bằng :

A. -1. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta tiến hành nhân chia với biểu thức liên hợp (bậc ba) của $n - \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1}$

$$\lim\left(n - \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1}\right) = \lim \frac{n^3 - \left(n^3 + 3n^2 + 1\right)}{\left(n^2 + n\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} + \sqrt[3]{\left(n^3 + 3n^2 + 1\right)^2}\right)}$$

$$= \lim \frac{-3 - \frac{1}{n^2}}{1 + \sqrt[3]{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}\right)^2}} = -1.$$

STUDY TIP

Hằng đẳng thức thứ bảy: $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

Hai biểu thức $a - b$ và $a^2 + ab + b^2$ cũng được gọi là hai biểu thức liên hợp (bậc ba) của nhau.

Ví dụ 13. $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+3n+2}\right)$ bằng :

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+3n+2}\right)=\lim\left[\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)+\left(n-\sqrt[3]{n^3+3n+2}\right)\right]=\frac{1}{2}$$

Ví dụ 14. $\lim\left(5^n-2^n\right)$ bằng :

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $5^n-2^n=5^n\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$

Vì $\lim 5^n=+\infty$ và $\lim\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)=1>0$ nên theo quy tắc 2, $\lim\left(5^n-2^n\right)=+\infty$

Ví dụ 15. $\lim\left(3.2^{n+1}-5.3^n+7n\right)$ bằng :

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** -5.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\lim\left(3.2^{n+1}-5.3^n+7n\right)=3^n\left(-5+6\left(\frac{2}{3}\right)^n+7\frac{n}{3^n}\right)=-\infty$$

Ví dụ 16. $\lim\frac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$ bằng :

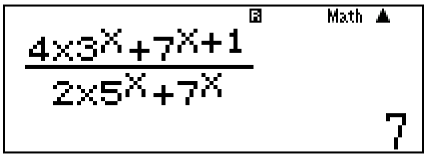
A. 1. **B.** 7. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{7}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\lim\frac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}=\lim\frac{4.\left(\frac{3}{7}\right)^n+7}{2.\left(\frac{5}{7}\right)^n+1}=\frac{7}{1}=7.$$

Cách 2: Sử dụng máy tính bỏ túi. Nhập vào màn hình như hình dưới đây. Bấm CALC. Máy hỏi X? Nhập 100, ấn =. Máy hiện kết quả bằng 7.



Ví dụ 17. $\lim\frac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}$ bằng :

A. 0. **B.** $\frac{6}{8}$. **C.** 36. **D.** $\frac{4}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

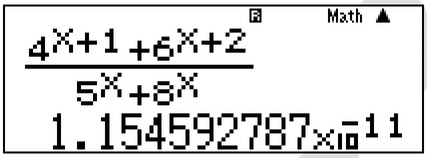
$$\lim\frac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}=\lim\frac{4.\left(\frac{4}{8}\right)^n+36.\left(\frac{6}{8}\right)^n}{\left(\frac{5}{8}\right)^n+1}=0.$$

STUDY TIP

Khi sử dụng máy tính cầm tay, nếu nhập giá trị X quá lớn, máy sẽ báo lỗi do giá trị của $a^n, a>1$ tăng rất nhanh khi X tăng, nên vượt quá khả năng tính toán của máy. Khi đó cần thử lại các giá trị khác của X. Như vậy các bài toán chứa $a^n, a>1$ ta không nên tính với n quá lớn.

Cách 2: Sử sụng máy tính cầm tay tương tự như ví dụ trên.

Ta thấy kết quả tính toán với $X=100$ là một số dương rất nhỏ. Do đó chọn đáp án giới hạn bằng 0.



Ví dụ 18. $\lim\frac{2^n-3^n}{2^n+1}$ bằng :

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Chia cả tử và mẫu cho 3^n ta được $\frac{2^n-3^n}{2^n+1}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

Mà $\lim\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)=-1<0$, $\lim\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=0$ và $\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n>0$ với mọi n nên theo quy tắc 3, $\lim\frac{2^n-3^n}{2^n+1}=-\infty$.

Dạng 2. Tính giới hạn của dãy số cho bởi hệ thức truy hồi.

Ví dụ 19. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 1,\ u_{n+1} = \dfrac{2(2u_n+1)}{u_n+3}$ với mọi $n \ge 1$. Biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, $\lim u_n$ bằng:

A. -1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh được $u_n > 0$ với mọi n

Đặt $\lim u_n = L \ge 0$. Ta có $\lim u_{n+1} = \lim \dfrac{2(2u_n+1)}{u_n+3}$ hay $L = \dfrac{2(2L+1)}{L+3}$

$$\Rightarrow L^2 - L - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} L = 2 & (n) \\ L = -1 & (l) \end{array}\right.$$

Vậy $\lim u_n = 2$.

Lưu ý: Để giải phương trình $L = \dfrac{2(2L+1)}{L+3}$ ta có thể sử dụng chức năng SOLVE của MTCT

(Chức năng SOLVE là chức năng tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình bằng phương pháp chia đôi). Ta làm như sau:

Nhập vào màn hình $X = \dfrac{2(2X+1)}{X+3}$; Bấm SHIFT CALC (tức SOLVE); Máy báo Solve for X;

Nhập $\boxed{1}\boxed{=}$; Máy báo kết quả như hình bên.

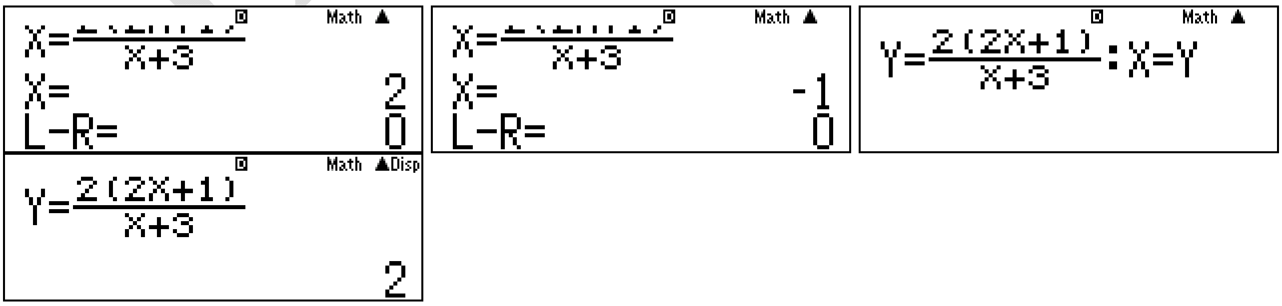
$L - R = 0$ tức đây là nghiệm chính xác. Lại ấn phím $\boxed{=}$. Máy báo Solve for X; Nhập $\boxed{0}\boxed{=}$; Máy báo kết quả như bên.

$L - R = 0$ tức đây là nghiệm chính xác. Tuy nhiên ta chỉ nhận nghiệm không âm. Vậy $L = 2$. (Ta chỉ tìm ra hai nghiệm thì dừng lại vì dễ thấy phương trình hệ quả là phương trình bậc hai).

Cách 2: Sử dụng MTCT (quy trình lặp). Nhập vào màn hình như hình bên. Bấm $\boxed{CALC}$. Máy tính hỏi X? nhập 1 rồi ấn phím $\boxed{=}$ liên tiếp. Khi nào thấy giá trị của Y không đổi thì dừng lại. Giá trị không đổi đó của Y là giới hạn cần tìm của dãy số. Giới hạn đó bằng 2.

STUDY TIPS

Trong ví dụ này ta đã áp dụng tính chất "nếu $\lim u_n = L$ thì $\lim u_{n+1} = L$"



Ví dụ 20. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 1,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$ với mọi $n \ge 1$. Tìm giới hạn của (u_n).

A. $\lim u_n = 1$. **B.** $\lim u_n = -1$. **C.** $\lim u_n = \sqrt{2}$. **D.** $\lim u_n = -\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh được $u_n > 0$ với mọi n

Đề bài không cho biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn hay không, tuy nhiên các đáp án đề bài cho đều là các giới hạn hữu hạn. Do đó có thể khẳng định được dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim u_n = L \ge 0$

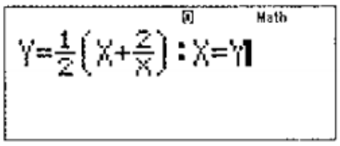
$$\lim u_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

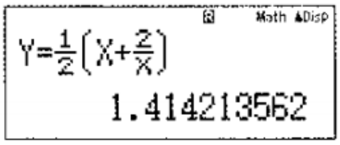
Hay $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{2}{L}\right) \Rightarrow L = \frac{2}{L} \Rightarrow L^2 = 2 \Rightarrow L = \sqrt{2}$

Vậy $\lim u_n = \sqrt{2}$

(loại trường hợp $L = -\sqrt{2}$). Vậy $\lim u_n = \sqrt{2}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT (quy trình lặp). Nhập vào như màn hình sau.





Bấm $\boxed{\text{CALC}}$. Máy hỏi X? nhập 1 rồi bấm phím $\boxed{=}$ liên tiếp. Khi nào thấy giá trị của Y không đổi thì dừng lại. Giá trị không đổi đó của Y là giới hạn cần tìm của dãy số.

Trong bốn đáp án đã cho, bằng phương pháp loại trừ, ta thấy chỉ có đáp án C là phù hợp với kết quả tính toán trên máy tính ($\sqrt{2} \approx 2,41423568$).

Ví dụ 21. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = 2u_n + \frac{1}{2}$ với mọi $n \ge 1$. Khi nó $\lim u_n$ bằng:

A. 0. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Đáp án C.

Phân tích: Đề bài không cho biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn hay không. Có đáp án là hữu hạn, có đáp án là vô cực. Do đó chưa thể khẳng định được dãy số có giới hạn hữu hạn hay vô cực.

Lời giải

Giả sử dãy có giới hạn hữu hạn là L.

Ta có: $\lim u_{n+1} = 2\lim u_n + \frac{1}{2} \Leftrightarrow L = 2L + \frac{1}{2} \Leftrightarrow L = -\frac{1}{2}$.

Đến đây có thể kết luận là $\lim u_n = -\frac{1}{2}$ được không? Câu trả lời là không?

Vì không khó để chứng minh được rằng $u_n > 0$ với mọi n. Do đó nếu dãy số có giới hạn L thì $L \ge 0$. Từ đó suy ra dãy không có giới hạn, mà trong bốn đáp án trên chỉ có đáp án C là vô cực.
Vậy ta chọn đáp án C.
Ta xét hai cách giải sau:

Cách 1: Đặt $v_n = u_n + \frac{1}{2}$. Ta có: $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 2u_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = 2v_n$

Vậy (v_n) là cấp số nhân có $v_1 = \frac{3}{2}$ và $q = 2$. Vậy $v_n = \frac{3}{2}.2^{n-1} = 3.2^{n-2}$.

Do đó $\lim v_n = \lim\left(3.2^{n-2}\right) = +\infty$. Suy ra $\lim u_n = +\infty$.

Cách 2: Sử dụng quy trình lặp (MTCT) tương tự ví dụ trên.

Phân tích: Câu hỏi đặt ra là tại sao ta lại đặt $v_n = u_n + \frac{1}{2}$ để thu được kết quả dãy (v_n) là cấp số nhân? Ta có kết quả tổng quát sau.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = a$, $u_{n+1} = ru_n + s$ với $n \ge 1$, trong đó r, s là các hằng số và $r \ne 1, s \ne 0$. Khi đó dãy số (v_n) với $v_n = u_n + \frac{s}{r-1}$ là một cấp số nhân có công bội r.

Thật vậy, ta có $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{s}{r-1} = ru_n + s + \frac{s}{r-1} = ru_n + \frac{rs}{r-1} = r\left(u_n + \frac{s}{r-1}\right) = rv_n$

(Nếu $r = 1$ thì (u_n) là một cấp số cộng, $s = 0$ thì (u_n) là một cấp số nhân).

Như vậy, dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = a$, $u_{n+1} = ru_n + s$ với $n \ge 1$, trong đó r, s là các hằng số và $r \ne 1, s \ne 0$ sẽ có giới hạn vô cực nếu $|r| \ge 1$, có giới hạn hữu hạn nếu $|r| < 1$.

STUDY TIP

$u_{n+1} = ru_n + s$

Đặt $v_n = u_n + \frac{s}{r-1}$

…………………

$u_1 = a$, $u_{n+1} = ru_n + s$

$+\ r \ge 1$: (u_n) có giới hạn $+\infty$.

$+\ r \le -1$: (u_n) có giới hạn $-\infty$.

$+\ |r| < 1$: (u_n) có giới hạn hữu hạn bằng $\frac{s}{r-1}$.

Ví dụ 22. Cho dãy số (u_n) xác định $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 2$ với mọi $n \ge 2$. Tìm giới hạn của dãy số (u_n).

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Đáp án D.

Phân tích: Đề bài không cho biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn hay không. Có đáp án là hữu hạn, có đáp án là vô cực. Do đó chưa thể khẳng định được dãy số có giới hạn hữu hạn hay vô cực.

Lời giải

Giả sử dãy có giới hạn hữu hạn là L.

Ta có: $\lim u_{n+1} = 2\lim u_n - \lim u_{n-1} + 2 \Leftrightarrow L = 2L - L + 2 \Leftrightarrow 0 = 2$ (Vô lý)

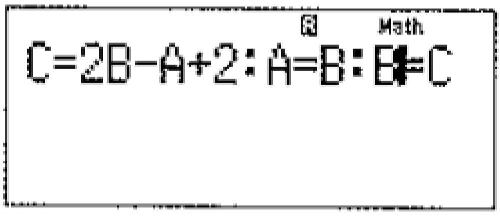
Vậy có thể dự đoán dãy có giới hạn vô cực. Tuy nhiên có hai đáp án vô cực ($-\infty$ và $+\infty$), vậy chưa thể đoán là đáp án nào. Ta xem hai cách giải sau.

Cách 1: Ta có $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 4$, $u_4 = 9$. Vậy ta có thể dự đoán $u_n = (n-1)^2$ với mọi $n \ge 1$.

Khi đó $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 2 = 2(n-1)^2 - (n-2)^2 + 2 = n^2 = \left[(n-1)-1\right]^2$.

Vậy $u_n = (n-1)^2$ với mọi $n \ge 1$. Do đó $\lim u_n = \lim (n-1)^2 = +\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT (quy trình lặp). Nhập vào như màn hình sau.



Bấm $\boxed{\text{CALC}}$ Máy hỏi *B*? nhập 1 rồi bấm phím $\boxed{=}$, máy hỏi *A*? nhập 0 rồi ấn phím $\boxed{=}$ liên tiếp. Ta thấy giá trị *C* ngày một tăng lên. Vậy chọn đáp án của dãy số là $+\infty$.

Dạng 3. **Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.**

Ví dụ 23. Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 2,151515...$ (chu kỳ 15), a được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản, trong đó m,n là các số nguyên dương. Tìm tổng $m+n$.

A. $m+n = 104$. **B.** $m+n = 312$. **C.** $m+n = 38$. **D.** $m+n = 114$.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Ta có $a = 2,151515... = 2 + \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + ...$

Vì $\frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + ...$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = \frac{15}{100}$, công bội $q = \frac{1}{100}$ nên $a = 2 + \frac{\frac{15}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{71}{33}$.

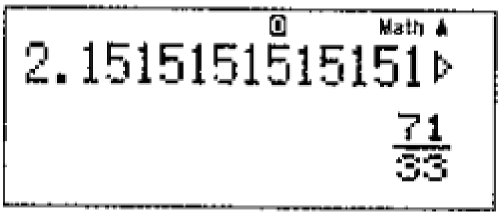
Vậy $m = 71, n = 33$ nên $m+n = 104$.

Cách 2: Đặt $b = 0,151515... \Rightarrow 100b = 15 + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{33}$.

Vậy $a = 2 + b = 2 + \frac{5}{33} = \frac{71}{33}$.

Do đó $m = 71, n = 33$ nên $m+n = 104$.

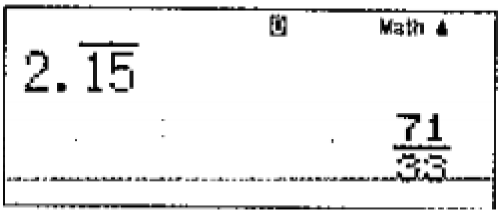
Cách 3: Sử dụng MTCT. Nhập vào máy số $2,1515151515$ (Nhiều bộ số 15, cho tràn màn hình) rồi bấm phím $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như hình sau.



Có nghĩa là $2,(15)=\dfrac{71}{33}$.

Vậy $m=71, n=33$ nên $m+n=104$.

Cách 4: Sử dụng MTCT. Bấm $\boxed{2}\ \boxed{.}\ \boxed{ALPHA}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{1}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như hình sau.



Có nghĩa là $2,(15)=\dfrac{71}{33}$.

Vậy $m=71, n=33$ nên $m+n=104$.

Ví dụ 24. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,32111...$ được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$, trong đó a,b là các số nguyên dương. Tính $a-b$.

A. $a-b=611$. **B.** $a-b=-611$. **C.** $a-b=27901$. **D.** $a-b=-27901$.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Ta có:

$$0,32111...=\frac{32}{100}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+...=\frac{32}{100}+\frac{\frac{1}{10^3}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{289}{900}.$$

Vậy $a=289, b=900$. Do đó $a-b=289-900=-611$.

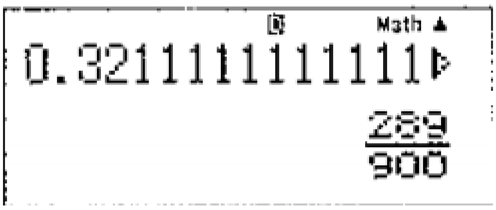
Cách 2: Đặt $x=0,32111...\Rightarrow 100x=32,111...$ Đặt $y=0,111...\Rightarrow 100x=32+y$.

Ta có: $y=0,111...\Rightarrow 10y=1+y\Rightarrow y=\dfrac{1}{9}$.

Vậy $100x=32+\dfrac{1}{9}=\dfrac{289}{9}\Rightarrow x=\dfrac{289}{900}$.

Vậy $a=289, b=900$. Do đó $a-b=289-900=-611$.

Cách 3: Sử dụng MTCT. Nhập vào máy số $0,3211111111$ (Nhập nhiều số 1 , cho tràn màn hình), rồi bấm phím $\boxed{=}$. Màn hình hiển thị kết quả như sau.



Vậy $a=289, b=900$. Do đó $a-b=289-900=-611$.

Cách 4: Sử dụng MTCT. Bấm $\boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{ALPHA}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{1}\ \boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như hình sau.

Vậy $a=289, b=900$. Do đó $a-b=289-900=-611$.

Tổng quát

Xét số thập phân vô hạn tuần hoàn $a=\overline{x_1x_2...x_m, y_1y_2...y_nz_1z_2...z_kz_1z_2...z_k...}$.

Khi đó $a=\overline{x_1x_2...x_m}+\dfrac{\overline{y_1y_2...y_n}}{1\underbrace{0...0}_{n-chu\,so}}+\dfrac{\overline{z_1z_2...z_k}}{\underbrace{99...9}_{k-chu\,so}\underbrace{0...0}_{n-chu\,so}}$

Chẳng hạn, $2,151515...=2+\dfrac{15}{99}; 0,32111..=\dfrac{32}{100}+\dfrac{1}{990}$.

Dạng 4. **Tìm giới hạn của dãy số mà tổng là n số hạng đầu tiên của một dãy số khác.**

Ví dụ 25. Tổng $S=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+...$ bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

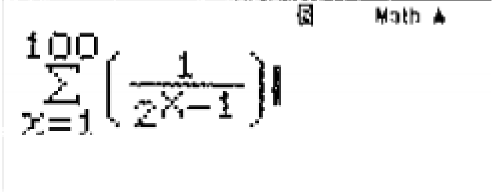
Đáp án B.

Lời giải

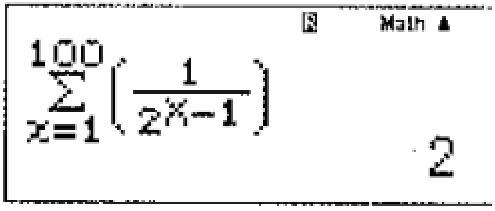
Cách 1: S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1=1$ và $q=\dfrac{1}{2}$.

Do đó $S=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Sử dụng chức năng tính tổng. Nhập vào màn hình như hình sau.

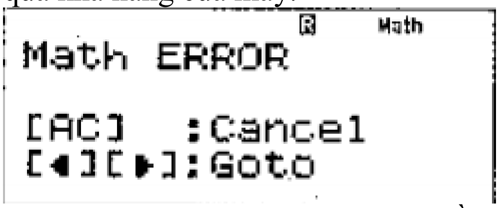


Bấm phím $\boxed{=}$, máy hiển thị kết quả bằng 2.



Lưu ý: Ở bài này, phải nhập số hạng tổng quát bằng $\frac{1}{2^{X-1}}$, vì $u_1 = 1 = \frac{1}{2^{1-1}}$. Nếu nhập số hạng tổng quát bằng $\frac{1}{2^X}$ thì kết quả sẽ bằng 1 và là kết quả sai.

Mặt khác, nếu cho X chạy từ 1 đến 10^3 thì máy sẽ báo lỗi do khối lượng tính toán quá lớn, vượt quá khả năng của máy.



Trong trường hợp đó, ta quay lại điều chỉnh biên độ của máy thì sẽ thông báo kết quả như trên.

Ví dụ 26. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$. Khi đó $\lim u_n$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: u_n là tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có $u_1 = \frac{1}{2}$ và $q = -\frac{1}{2}$.

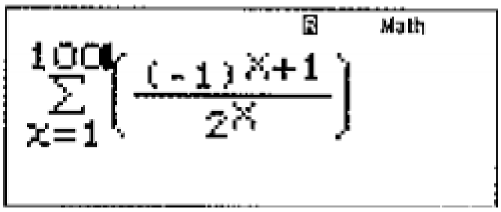
Do đó $u_n = \frac{1}{2}.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$. Suy ra $\lim u_n = \lim\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{3}$.

Cách 2: $\lim u_n = \lim\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} + ...$

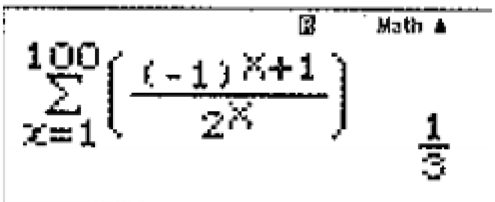
Vậy $\lim u_n$ bằng tổng của một cấp số nhân lui vô hạn với $u_1 = \frac{1}{2}$ và $q = -\frac{1}{2}$.

Do đó $\lim u_n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}$.

Cách 3: Sử dụng MTCT. Nhập vào như màn hình sau.



Ấn phím $\boxed{=}$, máy hiển thị kết quả bằng $\frac{1}{3}$



Do đó chọn đáp án A.

Nhận xét: Rõ ràng, nếu thuộc công thức thì bài toán này giải thông thường sẽ nhanh hơn MTCT!

STUDY TIP

Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q là: $S_n = u_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$

Ví dụ 27. Tính $\lim\left[\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Đáp án C.

Lời giải

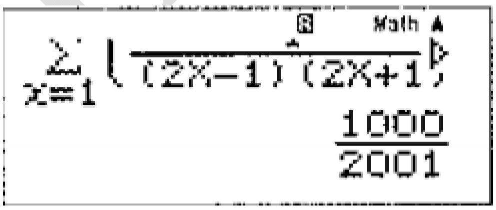
Cách 1: Ta có:

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

Vậy $\lim\left[\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]=\lim\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT.

Nhập vào màn hình biểu thức $\sum\limits_{X=1}^{100}\left(\dfrac{1}{(2X-1)\times(2X+1)}\right)$, bấm dấu $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như màn hình sau.



Vậy chọn đáp án C.

Tổng quát, ta có:

$$\lim\left[\frac{1}{k(k+d)}+\frac{1}{(k+d)(k+2d)}+...+\frac{1}{(k+(n-1)d)(k+nd)}\right]=\frac{1}{d.k}.$$

Chẳng hạn trong ví dụ trên thì $k=1$ và $d=2$. Do đó giới hạn là $\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}$.

Kinh nghiệm cho thấy nhiều bạn quên mất d khi tính toán dãy có giới hạn như trên.

Ví dụ 28. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1+2+...+n}{n^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\lim u_n=0$. **B.** $\lim u_n=\frac{1}{2}$. **C.** $\lim u_n=1$. **D.** Dãy số (u_n) không có giới hạn khi $n\to+\infty$.

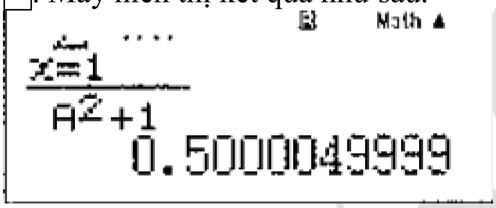
Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Ta có: $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Suy ra $\frac{1+2+...+n}{n^2+1}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$.

Do đó $\lim u_n=\lim\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}=\frac{1}{2}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Gán 10^5 cho biến A. Nhập vào màn hình biểu thức $\frac{\sum_{X=1}^{A}(X)}{A^2+1}$, bấm dấu $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như sau.



Do đó chọn đáp án B.

Lưu ý: Tổng $1+2+...+n$ trong ví dụ trên là một tổng dạng quen thuộc. Đó chính là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=1$ và công sai $d=1$. Do đó nếu không thuộc công thức $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, ta có thể sử dụng công thức tính tổng của một cấp số cộng để tính tổng đó.

Để làm tốt các dạng bài tập trên, cần nhớ một số tổng quen thuộc sau:

a) $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3+2^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

STUDY TIP

Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng: $S_n=\frac{n(u_1+u_n)}{2}$; $S_n=\frac{n\left[2u_1+(n-1)d\right]}{2}$.

Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân: $S_n=u_1.\frac{1-q^n}{1-q}$

Ví dụ 1: $\lim \dfrac{1+5+9+...+4n-3}{2+7+12+...+5n-3}$ bằng:

A. $\dfrac{4}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Tử thức là tổng của *n* số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) với $n=1$, $u_n = 4n-3$ và công bội $d=4$.

Do đó $1+5+9+...+4n-3 = \dfrac{n(1+4n-3)}{2} = \dfrac{n(4n-2)}{2}$.

Tương tự ta có: $2+7+12+...+5\text{n}-3 = \dfrac{n(2+5n-3)}{2} = \dfrac{n(5n-1)}{2}$.

Vậy $\lim \dfrac{1+5+9+...+4n-3}{2+7+12+...+5n-3} = \lim \dfrac{n(4n-2)}{n(5n-1)} = \dfrac{4}{5}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình $\dfrac{\sum_{X=1}^{1000}(4X-3)}{\sum_{X=1}^{1000}(5X-3)}$, bấm phím, $\boxed{=}$ ta thấy kết quả bằng $\dfrac{3998}{4999}\left(\approx \dfrac{4}{5}\right)$. Vậy chọn đáp án **A.**

Studytip:

Nếu tử thức là tổng của *n+i* số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai *d,* mẫu thức là tổng của *n+k* số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai d' thì phân thức có giới hạn là $\dfrac{d'}{d}$ $(i,k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 2: $\lim \dfrac{3+3^2+3^3+...+3^n}{1+2+2^2+...+2^n}$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Ta có tử thức là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và $q=3$.

Do đó $3+3^2+3^3+...+3^n = 3.\dfrac{3^n-1}{3-1} = \dfrac{3}{2}(3^n-1)$.

Mẫu thức là tổng của *n+1* số hạng đầu tiên của cấp số nhân (v_n) với $v_n = 1$ và $q = 2$. Do đó $1+2+2^2+...+2^n = 2.\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2.(2^{n+1}-1)$.

Vậy $\lim\dfrac{3+3^2+3^3+...+3^n}{1+2+2^2+...+2^n} = \lim\dfrac{3}{4}.\dfrac{3^n-1}{2^{n+1}-1} = \dfrac{3}{4}\lim\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{2-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n} = +\infty.$

Cách 2: Nhập vào màn hình $\dfrac{\sum\limits_{X=1}^{20} 3^X}{\sum\limits_{X=1}^{1000} 2^{X-1}}$, bấm phím, $\boxed{=}$ ta thấy kết quả hiển thị trên màn hình là 2493,943736.

Do đó chọn đáp án **A.**

Bổ sung: *(Định lí kẹp)*

Xét ba dãy số (u_n), (v_n), (w_n). Giả sử với mọi n ta có $u_n \le v_n \le w_n$. Khi đó nếu có $\lim u_n = \lim w_n = L$ thì $\lim v_n = L$.

□ ***Studytip:***

Nếu tử thức là tổng của *n+i* số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội $q > 1$, mẫu thức là tổng của $n+k$ số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội $q' > 1$ thì:

□ Phân thức có giới hạn là $+\infty$ nếu $q > q'$;

□ Phân thức có giới hạn là 0 nếu $q < q'$.

Ví dụ 3: $\lim\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+...+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$ bằng

A. **0.** **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1: Ta có $\dfrac{1+2+...+n}{n^2+n} \le \dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+...+\dfrac{n}{n^2+n} \le \dfrac{1+2+...+n}{n^2+1}$.

Mà $\lim\dfrac{1+2+...+n}{n^2+n} = \lim\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+n} = \dfrac{1}{2}$; $\lim\dfrac{1+2+...+n}{n^2+1} = \lim\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+1} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\lim\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+...+\dfrac{n}{n^2+n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Gán 10^3 cho A. Nhập vào màn hình $\sum_{X=2}^{A}\frac{X}{A^2+X}$, bấm phím $\boxed{=}$ Kết quả hiển thị 0.5001664168. Vậy chọn đáp án B.

Ta thấy rằng trong trường hợp không thuộc công thức, sử dụng máy tính cầm tay là một giải pháp hiệu quả. Tuy nhiên nếu rèn luyện nhiều, cọ xát nhiều dạng bài tập thì có thể sử dụng MTCT sẽ cho kết quả chậm hơn là tính toán thông thường.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

DẠNG 1: BÀI TẬP LÝ THUYẾT

Câu 1: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim u_n = 0$ nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

B. $\lim u_n = 0$ nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. $\lim u_n = 0$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. $\lim u_n = 0$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 2: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim u_n = +\infty$ nếu u_n có thể bé hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

B. $\lim u_n = +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. $\lim u_n = +\infty$ nếu $|u_n|$ có thể bé hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. $\lim u_n = +\infty$ nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 3: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim u_n = a$ nếu $u_n - a$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

B. $\lim u_n = a$ nếu $u_n - a$ có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. $\lim u_n = a$ nếu $|u_n - a|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. $\lim u_n = a$ nếu $|u_n - a|$ có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 4: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim q^n = 0$ nếu $q > 1$.
B. $\lim q^n = 0$ nếu $q < 1$.
C. $\lim q^n = 0$ nếu $|q| > 1$.
D. $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$.

Câu 5: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.
B. $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| > 1$.
C. $\lim q^n = +\infty$ nếu $q < 1$.
D. $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1$

Câu 6: Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào sai?

A. Nếu $|q| \le 1$ thì $\lim q^n = 0$.

B. Nếu $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ thì $\lim(u_n v_n) = ab$.

C. Với k là số nguyên dương thì $\lim\frac{1}{n^k} = 0$.

D. Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim(u_n v_n) = +\infty$.

Câu 7: Biết $\lim u_n = 3$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\lim \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 3$. **C.** $\lim \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 2$. **B.** $\lim \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} = -1$. **D.** $\lim \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 1$.

Câu 8: Biết $\lim u_n = +\infty$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\lim \dfrac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = \dfrac{1}{3}$. **C.** $\lim \dfrac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = 0$. **B.** $\lim \dfrac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = \dfrac{1}{5}$. **D.** $\lim \dfrac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = +\infty$.

DẠNG 2: BÀI TẬP TÍNH GIỚI HẠN DÃY SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC

Câu 9: Trong các dãy số sau đây, dãy số nào có giới hạn?

A. $(\sin n)$. **B.** $(\cos n)$. **C.** $((-1)^n)$. **D.** $(\dfrac{1}{2})$.

Câu 10: Trong các dãy số sau đây, dãy số nào có giới hạn khác 0?

A. $((0,98)^n)$. **C.** $((-0,99)^n)$. **B.** $((0,99)^n)$. **D.** $((1,02)^n)$.

Câu 11: Biết dãy số (u_n) thỏa mãn $|u_n - 1| < \dfrac{1}{n^3}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n = 1$. **B.** $\lim u_n = 0$.
C. $\lim u_n = -1$. **D.** Không đủ cơ sở để kết luận về giới hạn của dãy số (u_n).

Câu 12: Giới hạn nào dưới đây bằng $+\infty$?

A. $\lim(3n^2 - n^3)$. **C.** $\lim(3n^2 - n)$. **B.** $\lim(n^2 - 4n^3)$. **D.** $\lim(3n^3 - n^4)$.

Câu 13: $\lim \dfrac{(2n-1)^2(n-1)}{(n^2+1)(2n+1)}$ bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 14: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim \dfrac{n^2 + 3n^3 + 2}{n^2 + n}$. **C.** $\lim \dfrac{2n^2 - 3n}{n^3 + 3n}$. **B.** $\lim \dfrac{n^3 + 2n - 1}{n - 2n^3}$. **D.** $\lim \dfrac{n^2 - n + 1}{1 - 2n}$.

Câu 15: Trong các giới hạn hữu hạn sau, giới hạn nào có giá trị khác với các giới hạn còn lại

A. $\lim(1 + \dfrac{n^2 \sin 3n}{n^3 + 1})$. **C.** $\lim \dfrac{n^2 + \sin^2 3n}{n^2 + 5}$. **B.** $\lim \dfrac{2^n - \cos 5n}{5^n}$. **D.** $\lim \dfrac{3^n + \cos n}{3^{n+1}}$.

Câu 16: Để tính $\lim(\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + n})$, bạn Nam đã tiến hành các bước như sau:

Bước 1: $\lim(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}) = \lim(\text{n}\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} - n\sqrt{1 - \dfrac{1}{n}})$.

Bước 2: $\lim(\text{n}\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} - n\sqrt{1 - \dfrac{1}{n}}) = \lim n(\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{1 - \dfrac{1}{n}})$.

Bước 3: Ta có $\lim n = +\infty$; $\lim(\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{1 - \dfrac{1}{n}}) = 0$.

Bước 4: Vậy $\lim(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+n})=0$.
Hỏi bạn Nam đã làm **sai** từ bước nào?
A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Câu 17: $\lim(\sqrt{3n-1}-\sqrt{2n-1})$ bằng?
A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 18: $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$ bằng?
A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 19: $\lim(1-2n)\sqrt{\dfrac{n+3}{n^3+n+1}}$ bằng?
A. 0. **B.** -2. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 20: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là hữu hạn?
A. $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})n$.
C. $\lim(\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n+1})$.
B. $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$.
D. $\lim(\sqrt{n^2+n+1}-n)$.

Câu 21: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là **không** hữu hạn?
A. $\lim\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}}$.
C. $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n}$.
B. $\lim(\sqrt[3]{1+n^3}-n)$.
D. $\lim(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n)$.

Câu 22: Biết $\lim\dfrac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}-n}=\dfrac{6-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{m}{n}$, trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:
A. $m.n=10$. **C.** $m.n=15$. **B.** $m.n=14$. **D.** $m.n=21$.

Câu 23: Tìm $\lim\dfrac{1-2.3^n+6^n}{2^n(3^{n+1}-5)}$:
A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

DẠNG 2: TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Câu 24: Cấp số nhân lùi vô hạn $1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{8},\ldots,(-\dfrac{1}{2})^{n-1},\ldots$ có tổng là một phân số tối giản $\dfrac{m}{n}$.
Tính $m+2n$.
A. $m+2n=8$. **C.** $m+2n=7$. **B.** $m+2n=4$. **D.** $m+2n=5$.

Câu 25: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,27323232...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{m}{n}$ (m , n là các số nguyên dương). Hỏi m gần với số nào nhất trong các số dưới đây?

A. 542. **B.** 543. **C.** 544. **D.** 545.

Câu 26: Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là 2, tổng của 3 số hạn đầu tiên của nó là $\frac{9}{4}$. Số hạn đầu của cấp số nhân đó là?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 27: Phương trình $2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+...=\frac{5}{4}$, trong đó $|x|<1$, có tập nghiệm là:

A. $S=\left\{\frac{-7\pm\sqrt{97}}{24}\right\}$. **C.** $S=\left\{\frac{-3\pm\sqrt{41}}{16}\right\}$. **B.** $S=\left\{\frac{-7+\sqrt{97}}{24}\right\}$. **D.** $S=\left\{\frac{-3+\sqrt{41}}{16}\right\}$.

Câu 28: Cho tam giác đều $A_1B_1C_1$ cạnh a. Người ta dựng tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_1B_1C_1$; dựng tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_2B_2C_2$ và cứ tiếp tục như vậy. Tính tổng diện tích S của tất cả các tam giác đều $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,…

A. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a^2\sqrt{3}$. **D.** $2a^2\sqrt{3}$.

DẠNG 4: TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ CHO BỞI HỆ THỨC TRUY HỒI

Câu 29: Cho số thực a và dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1=a$ và $u_{n+1}=1+\frac{u_n}{2}$ với mọi $n\ge1$. Tìm giới hạn của dãy số (u_n).

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 30: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=3, 2u_{n+1}=u_n+1$ với mọi $n\ge1$. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của dãy số (u_n). Tìm $\lim S_n$.

A. $\lim S_n=+\infty$. **C.** $\lim S_n=1$. **B.** $\lim S_n=-\infty$. **D.** $\lim S_n=-1$.

Câu 31: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1, u_2=2, u_{n+2}=\frac{u_{n+1}+u_n}{2}$ với mọi $n\ge1$. Tìm $\lim u_n$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 32: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=\frac{1}{4}, u_{n+1}=u_n^2+\frac{u_n}{2}$ với mọi $n\ge1$. Tìm $\lim u_n$.

A. $\lim u_n = \frac{1}{4}$. **C.** $\lim u_n = \frac{1}{2}$. **B.** $\lim u_n = 0$. **D.** $\lim u_n = +\infty$.

Câu 33: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ bằng.

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

DẠNG 5: TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ CÓ CHỨA THAM SỐ

Câu 34: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = a, u_2 = b, u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}$ với mọi $n \geq 1$, trong đó a và b là các số thực cho trước, $a \leq b$. Tìm giới hạn của (u_n).

A. $\lim u_n = a$. **C.** $\lim u_n = \frac{a+2b}{3}$. **B.** $\lim u_n = b$. **D.** $\lim u_n = \frac{2a+b}{3}$.

Câu 35: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n-m}{5n+2}$, trong đó m là tham số. Để dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn thì:

A. m là số thực bất kỳ.
B. m nhận giá trị duy nhất bằng 3.
C. m nhận giá trị duy nhất bằng 5.
D. Không tồn tại số m.

Câu 36: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n^2+n+2}{an^2+5}$, trong đó a là tham số. Để (u_n) có giới hạn bằng 2 thì giá trị của tham số a là?

A. -4. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực a để dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{2n^2+n} - a\sqrt{2n^2-n}$ có giới hạn hữu hạn.

A. $a \in \mathbb{R}$. **C.** $a \in (1;+\infty)$. **B.** $a \in (-\infty;1)$. **D.** $a = 1$.

Câu 38: Tìm hệ thức liên hệ giữa các số thực dương a và b để: $\lim(\sqrt{n^2+an+5} - \sqrt{n^2+bn+3}) = 2$.

A. $a+b=2$. **B.** $a-b=2$. **C.** $a+b=4$. **D.** $a-b=4$.

Câu 39: Tìm số thực a để $\lim \frac{\sqrt{an^2+1} - \sqrt{4n-2}}{5n+2} = 2$.

A. $a=10$. **B.** $a=100$. **C.** $a=14$. **D.** $a=144$.

Câu 40: Tìm số thực a để $\lim(2n+a-\sqrt[3]{8n^3+5}) = 6$.

A. $a=2$. **B.** $a=4$. **C.** $a=6$. **D.** $a=8$.

Câu 41: Tìm các số thực a và b sao cho $\lim(\sqrt[3]{1-n^3} - an - b) = 0$.

A. $\begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$.

DẠNG 6: TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ MÀ SỐ HẠNG TỔNG QUÁT LÀ TỔNG CỦA N SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA MỘT DÃY SỐ KHÁC

Câu 42: $\lim \dfrac{1+2+3+...+n}{2+4+6+...+2n}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 43: $\lim \dfrac{1+2+2^2+...+2^n}{1+5+5^2+...+5^n}$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 44: Tìm $\lim \left[(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})...(1-\dfrac{1}{n^2})\right]$ ta được:

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 45: $\lim \dfrac{n!}{(1+1^2).(1+2^2)...(1+n^2)}$ bằng:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 46: Cho dãy số (u_n). Biết $\sum_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{3n^2+9n}{2}$ với mọi $n \ge 1$. Tìm $\dfrac{1}{nu_n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 47: $\lim \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1+3+3^2+...+3^k}{5^{k+2}}$ bằng:

A. 0. **B.** $\dfrac{17}{100}$. **C.** $\dfrac{17}{200}$. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Trong đáp án cho các bài tập dưới đây, có nhiều bài tôi chỉ nêu việc áp dụng các kết quả đã trình bày ở phần lí thuyết và ví dụ. Lời giải đầy đủ hoặc việc sử dụng MTCT xin dành lại cho độc giả.

DẠNG 1. Bài tập lí thuyết.

Câu 1: **Đáp án A.**
Xem lại định nghĩa dãy số có giới hạn 0.

Câu 2: **Đáp án B.**
Xem lại định nghĩa dãy có giới hạn $+\infty$.

Câu 3: **Đáp án C.**
Xem lại định nghĩa dãy có giới hạn hữu hạn.

Câu 4: **Đáp án D.**
Xem lại định lí 4.2.

Câu 5: **Đáp án A.**
Xem lại kết quả về dãy số có giới hạn $+\infty$.

Câu 6: **Đáp án A.**
Nếu $q=1$ thì $\lim q^n = \lim 1 = 1 \neq 0$.

Câu 7: **Đáp án C.**
Ta có : $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{3\lim u_n - 1}{\lim u_n + 1} = \frac{3.3-1}{3+1} = \frac{8}{4} = 2$.

Câu 8: **Đáp án C.**
Ta có : $\frac{u_n+1}{3u_n^2+5} = \frac{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_n^2}}{3+\frac{5}{u_n^2}}$. Vì $\lim u_n = +\infty$ nên $\lim \frac{1}{u_n} = 0$, $\lim \frac{1}{u_n^2} = 0$.

Vậy $\lim \frac{u_n+1}{3u_n^2+5} = \frac{0+0}{3+0} = \frac{0}{3} = 0$.

DẠNG 2. Bài tập tính giới hạn dãy số cho bởi công thức.

Câu 9: **Đáp án D.**
Ta có : $\lim s_n = \lim \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Bổ sung :

a) Ta chứng minh dãy số $(\sin n)$ không có giới hạn. Thật vậy, vì $|\sin n| \le 1$ nên nếu dãy số $(\sin n)$ có giới hạn thì giới hạn đó hữu hạn.

Giả sử $\lim \sin n = L$. Suy ra $\lim \sin(n+2) = L$.

Do đó : $0 = \lim\left[\sin(n+2) - \sin n\right] = 2\sin 1.\lim\cos(n+1)$

$\Rightarrow \lim\cos(n+1) = 0 \Rightarrow \lim\cos n = 0 \Rightarrow \lim\cos(n+2) = 0$

$\Rightarrow 0 = \lim\left[\cos(n+2) - \cos n\right] = -2\sin 1.\sin(n+1)$

$\Rightarrow \sin(n+1) = 0$. Vậy ta có : $1 = \lim\left(\sin^2(n+1) + \cos^2(n+1)\right) = 0+0=0$ (vô lý). Suy ra đpcm.

b) Chứng minh tương tự, ta có dãy số $(\cos n)$ không có giới hạn.

c) Ta chứng minh dãy số $\left((-1)^n\right)$ không có giới hạn hữu hạn.

Thật vậy, trên trục số, các số hạng của dãy số đó được biểu diễn bởi hai điểm -1 và 1. Khi n tăng lên, các điểm

Câu 10: **Đáp án D**

Vì $1,02>1$ nên $\lim(1,02)^n=+\infty$. (Các dãy số còn lại đều có $|q|<1$ nên đều có giới hạn bằng 0).

Câu 11: **Đáp án A.**

Vì $\lim\frac{1}{n^3}=0$ nên $\lim|u_n-1|=0$. Suy ra : $\lim u_n=1$.

Câu 12: **Đáp án C.**

Vì $3n^2-n$ có $a_2=3>0$ nên $\lim\left(3n^2-n\right)=+\infty$.

(Số hạng tổng quát của các dãy còn lại có hệ số của lũy thừa bậc cao nhất là số âm nên giới hạn của các dãy đó đều bằng $-\infty$.)

Câu 13: **Đáp án B.**

Bậc của tử và mẫu thức đều bằng 3 nên dãy có giới hạn hữu hạn. Hệ số của n^3 trên tử bằng $2^2.1=4$, hệ số của n^3 dưới mẫu bằng $1.2=2$ nên giới hạn là $\frac{4}{2}=2$.

Câu 14: **Đáp án A.**

Phân thức $\frac{n^2+3n^3+2}{n^2+n}$ có bậc của tử thức cao hơn bậc của mẫu thức, đồng thời hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của tử thức và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của mẫu thức đều dương nên suy ra giới hạn của dãy số tương ứng bằng $+\infty$.

(Phân thức $\frac{n^3+2n-1}{n-2n^3}$ có bậc tử bằng bậc mẫu nên giới hạn dãy số tương ứng bằng $\frac{-1}{2}$. Phân thức $\frac{2n^2-3n}{n^3+3n}$ có bậc của tử thấp hơn bậc của mẫu nên giới hạn dãy số tương ứng bằng 0. Phân thức $\frac{n^2-n+1}{1-2n}$ có bậc tử lớn hơn bậc mẫu nhưng hệ số của lũy thừa bậc cao nhất trên tử và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất dưới mẫu trái dấu nhau nên giới hạn dãy số tương ứng bằng $-\infty$.)

Câu 15: **Đáp án D.**

+ Nhận xét : $\left|\frac{n^2\sin 3n}{n^3+1}\right|\le\frac{n^2}{n^3+1}$ mà $\lim\frac{n^2}{n^3+1}=0$ nên $\lim\frac{n^2\sin 3n}{n^3+1}=0$.

Do đó : $\lim\left(1+\frac{n^2\sin 3n}{n^3+1}\right)=1$.

+ $\left|\frac{\cos 5n}{2^n}\right|\le\frac{1}{2^n}$ mà $\lim\frac{1}{2^n}=0$ nên $\lim\frac{\cos 5n}{2^n}=0$.

Do đó : $\lim\frac{2^n-\cos 5n}{2^n}=\lim\left(1-\frac{\cos 5n}{2^n}\right)=1$.

+ $\left|\frac{\sin^2 3n}{n^2+5}\right| \le \frac{1}{n^2+5}$ mà $\lim\frac{1}{n^2+5}=0$ nên $\lim\frac{\sin^2 3n}{n^2+5}=0$.

Do đó : $\lim\frac{n^2+\sin^2 3n}{n^2+5}=\lim\left(\frac{n^2}{n^2+5}+\frac{\sin^2 3n}{n^2+5}\right)=1$

Vậy ba giới hạn đầu đều có kết quả bằng 1 nên đáp án cần chọn là đáp án D.

($\left|\frac{\cos n}{3^{n+1}}\right| \le \frac{1}{3^{n+1}}$ mà $\lim\frac{1}{3^{n+1}}=0$ nên $\lim\frac{\cos n}{3^{n+1}}=0$.

Do đó : $\lim\frac{3^n+\cos n}{3^{n+1}}=\lim\left(\frac{3^n}{3^{n+1}}+\frac{\cos n}{3^{n+1}}\right)=\frac{1}{3}$.)

Câu 16: **Đáp án D.**

Vì $\lim n=+\infty$, $\lim\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)=0$ nên không thể áp dụng quy tắc 2. Do đó Nam đã sai ở bước 4. (Quy tắc 2 áp dụng khi $\lim u_n=\pm\infty$ và $\lim v_n=L\neq 0$.)

Câu 17: **Đáp án D.**

Vì hai căn thức $\sqrt{3n-1}$ và $\sqrt{2n-1}$ đều chứa nhị thức dưới dấu căn mà hệ số của n lại khác nhau nên giới hạn cần tìm bằng $+\infty$ (do $3>2$).

Thật vậy, ta có : $\lim\left(\sqrt{3n-1}-\sqrt{2n-1}\right)=\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{3-\frac{1}{n}}-\sqrt{2-\frac{1}{n}}\right)$.

Vì $\lim\sqrt{n}=+\infty$ và $\lim\left(\sqrt{3-\frac{1}{n}}-\sqrt{2-\frac{1}{n}}\right)=\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$ nên $\lim\left(\sqrt{3n-1}-\sqrt{2n-1}\right)=+\infty$.

Hoặc độc giả có thể sử dụng MTVT để kiểm tra kết quả trên.

Câu 18: **Đáp án B.**

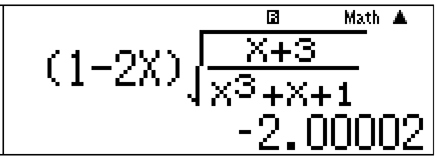
Ta thấy tử thức có bậc bằng 1, mẫu thức có bậc cũng bằng 1. Mà hệ số của n trên tử thức bằng 1, hệ số của n dưới mẫu thức bằng 3 nên giới hạn cần tìm bằng $\frac{1}{3}$. Thật vậy ta có :

$\lim\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{1}{3}$ hoặc độc giả có thể sử dụng MTCT để kiểm tra kết quả trên.

Câu 19: **Đáp án B.**

Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình như sau :

Qui trình bấm máy	Kết quả thu được

(1p2Q))saQ)+3RQ)^3$+Q)+1r10^5=	

Do đó đáp án đúng là đáp án B.
Hoặc ta làm như sau :
$\lim(1-2n)\sqrt{\dfrac{n+3}{n^3+n+1}}=\lim\left(\dfrac{1}{n}-2\right)\sqrt{\dfrac{n^3+3n^2}{n^3+n+1}}=(-2).1=-2$.

Câu 20: **Đáp án D.**
Nếu sử dụng MTCT, ta sẽ phải tính toán nhiều giới hạn. Tuy nhiên, nếu có kinh nghiệm, ta sẽ thấy ngay đáp án D. Thật vậy, theo kết quả đã biết ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$ là hữu hạn. Hoặc ta có thể sử dụng MTCT để kiểm tra lại kết quả.

Lời giải chính xác : $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)=\lim\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$.

Việc tìm các giới hạn trong A, B, C xin dành lại cho độc giả rèn luyện thêm.

Câu 21: **Đáp án C.**
Lập luận như các bài toán trên, ta thấy ba giới hạn trong A, B, D đều hữu hạn. Vậy đáp án là C.

Lưu ý : $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)=\lim\left(n-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)$.

Ta có thể sử dụng MTCT để kiểm tra lại kết quả.
Lời giải chính xác :

Ta có : $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n}=\lim\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}}}{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n^2}}-1}$. Mà : $\lim\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}}=1$; $\lim\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n^2}}-1=0$

và $\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n^2}}-1>0\ \forall n$ nên $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n}=+\infty$.

Việc tìm các giới hạn trong A, B, D xin dành lại cho độc giả rèn luyện thêm.

Câu 22: **Đáp án B.**
Với các bài toán dạng này, việc sử dụng MTCT là khá mất thời gian. Ta thấy tử thức và mẫu thức đều có bậc bằng 1. Mặt khác cả tử thức và mẫu thức đều có giới

hạn vô cực. Do đó ta chia tử và mẫu cho n để được : $\lim \dfrac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}-n}$

$$=\lim \frac{\sqrt{1-\frac{4}{n}}-\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}-1}=\frac{-1}{\sqrt{3}-1}.$$

Ta có : $\dfrac{-1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{-\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=\dfrac{6-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{7}{2}$. Vậy $m=7,n=2$ nên $m.n=14$.

Câu 23: **Đáp án D.**

Ta có : $\dfrac{1-2.3^n+6^n}{2^n\left(3^{n+1}-5\right)}=\dfrac{1-2.3^n+6^n}{3.6^n-5.2^n}$. Từ đó dễ thấy $\lim \dfrac{1-2.3^n+6^n}{3.6^n-5.2^n}=\dfrac{1}{3}$.

Thật vậy, $\lim \dfrac{1-2.3^n+6^n}{3.6^n-5.2^n}=\lim \dfrac{\left(\frac{1}{6}\right)^n-2.\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}{3-5.\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\dfrac{1}{3}$.

DẠNG 3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.

Câu 24: **Đáp án A.**

Cấp số nhân lùi vô hạn đã cho có : $u_1=1$ và $q=-\dfrac{1}{2}$. Do đó tổng của cấp số nhân đó là : $S=\dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{2}{3}$. Suy ra : $m=2,n=3$. Vậy $m+2n=2+2.3=8$.

Câu 25: **Đáp án A**

Ta có $0,27323232...=\dfrac{27}{100}+\dfrac{32}{9900}=\dfrac{541}{1980}$.

Hoặc sử dụng MTCT theo hai cách đã trình bày ở phần ví dụ ta được kết quả như sau :

Qui trình bấm máy	**Kết quả**
0.27323232323232=	Math ▲ 0.27323232323232 $\frac{541}{1980}$
0.27Qs32=	Math ▲ 0.27(32) $\frac{541}{1980}$

Vậy $m=541$, do đó chọn đáp án A.

Câu 26: Đáp án C.

Ta có : $\frac{u_1}{1-q}=2\Rightarrow u_1=2(1-q)$ (1) mà : $u_1+u_2+u_3=\frac{9}{4}\Rightarrow u_1.\frac{1-q^3}{1-q}=\frac{9}{4}$ (2).

Thay (1) vào (2) ta được : $2(1-q).\frac{1-q^3}{1-q}=\frac{9}{4}\Rightarrow 1-q^3=\frac{9}{8}\Rightarrow q^3=-\frac{1}{8}\Rightarrow q=-\frac{1}{2}$.

Vậy $u_1=2\left(1+\frac{1}{2}\right)=3$.

Câu 27: Đáp án A.

Ta có : $2x+1+x^2-x^3+...=\frac{5}{4}\Leftrightarrow 3x+1-x+x^2-x^3+...=\frac{5}{4}$. Vì $|x|<1$ nên $1-x+x^2-x^3+...$ là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1=1$ và $q=-x$. Do đó ta có :

$3x+1-x+x^2-x^3+...=\frac{5}{4}\Leftrightarrow 3x+\frac{1}{1+x}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow 12x^2+7x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{97}}{24}$ (t/m $|x|<1$).

Câu 28: Đáp án C.

Đường cao của tam giác đều cạnh a là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Diện tích của tam giác đều cạnh a là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng $a\Rightarrow$ tam giác $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$ tam giác $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng $a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\Rightarrow\ldots\Rightarrow$ tam giác $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$.

Và $S_{A_1B_1C_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $S_{A_2B_2C_2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{3}{4}$, $S_{A_3B_3C_3}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{3}{4}\right)^2$, ..., $S_{A_nB_nC_n}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

Như vậy (S_n) là một CSN lùi vô hạn với $q=\frac{3}{4}$. Vậy $S_1+S_2+...=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{1-\frac{3}{4}}=\sqrt{3}a^2$.

DẠNG 4. Tìm giới hạn của dãy số cho bởi hệ thức truy hồi.

Câu 29: Đáp án D.

Ta thầy các đáp án chỉ là các giới hạn hữu hạn nên chứng tỏ dãy đã cho có giới hạn hữu hạn. Gọi giới hạn đó là L. Ta có : $L=1+\frac{L}{2}\Rightarrow L=2$. Hoặc theo kết quả đã trình bày trong phần ví dụ, giới hạn của dãy đã cho bằng $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\left(r=\frac{1}{2},s=1\right)$.

Câu 30: **Đáp án B.**

Cách 1 : Ta có $2u_{n+1}=u_n+1\Leftrightarrow u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}$. Đặt $v_n=u_n-1$.

Khi đó : $v_{n+1}=u_{n+1}-1=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}(u_n-1)=\frac{1}{2}v_n$. Vậy (v_n) là một cấp số nhân có công bội $q=\frac{1}{2}$. Gọi T_n là tổng n số hạng đầu tiên của (v_n).

Ta có : $T_n=v_1.\frac{1-q^n}{1-q}=v_1.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2v_1.\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$. Suy ra : $S_n=T_n+n=2v_1.\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)+n$.

Vậy $\lim S_n=+\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình : $A=A+X:Y=\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}:X=Y$.

Bấm r, máy hỏi A? nhập 0, máy hỏi X? nhập 3, máy hỏi Y? Nhập 0, bấm = liên tiếp ta thấy giá trị của A ngày một tăng cao. Vậy chọn đáp án B.

Câu 31: **Đáp án C.**

Sử dụng MTCT.

Qui trình bấm máy	Kết quả thu được
QcQraQz+QxR2$QyQzQrQxQyQxQrQcr1=2========= == == == ====	$C=\frac{A+B}{2}$ 1.666666667

Dùng cách tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn $1,(6)$ ta được $1,66666667=\frac{5}{3}$.

Vậy giới hạn của dãy số trong trường hợp này bằng $\frac{5}{3}$. Do đó chọn đáp án C.

Bổ sung : Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=a$, $u_2=b$, $u_{n+2}=\frac{u_n+u_{n+1}}{2}$ với $\forall n\ge 1$, trong đó a,b là các số thực cho trước , $a\le b$. Người ta chứng minh được rằng $\lim u_n=\frac{a+2b}{3}$.

Câu 32: **Đáp án B.**

Giả sử dãy có giới hạn hữu hạn L. Khi đó ta có : $L = L^2 + \dfrac{L}{2} \Rightarrow 2L^2 = L \Rightarrow \left[\begin{array}{l} L = 0 \\ L = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Tuy nhiên đến đây ta không còn căn cứ để kết luận $L = 0$ hay $L = \dfrac{1}{2}$.

Ta sử dụng MTCT tương tự như bài tập trên thì thấy rằng giới hạn của dãy số là 0.
Vậy chọn đáp án B.

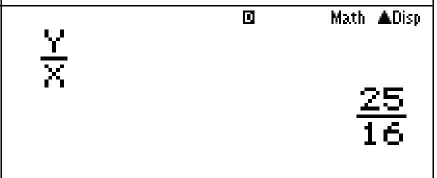
$$Y = X^2 + \frac{X}{2}$$
$$1,706192802.10^{-9}$$

Câu 33: **Đáp án C.**
Cách 1: Ta có
$u_1 = 1^2$; $u_2 = 1 + 2.1 + 1 = 2^2$; $u_3 = 2^2 + 2.2 + 1 = 9 = 3^2$;...

Dự đoán $u_n = n^2$. Khi đó $u_{n+1} = u_n + 2n + 1 = (n+1)^2$. Vậy $u_n = n^2\ \forall n \ge 1$.

Suy ra $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \dfrac{(n+1)^2}{n^2} = 1$. Do đó chọn đáp án C.

Cách 2 : Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình.

Qui trình bấm máy	**Kết quả thu được**
QnQrQ)+2Qz+1QyaQnRQ)$QyQ)QrQnQyQzQrQz+1r1=1= ====================	

Bấm r, máy hỏi X? nhập 1, máy hỏi A? nhập bấm = liên tiếp, theo dõi giá trị của $\dfrac{Y}{X}$, ta thấy giá trị đó dần về 1. Vậy chọn đáp án C.
Nhận xét : Ở bài này sẽ phải bấm phím = liên tiếp khá nhiều lần, do khi n chưa đủ lớn thì chênh lệch giữa $(n+1)^2$ và n^2 là khá xa nên giá trị của $\dfrac{(n+1)^2}{n^2}$ khá xa so với 1.

DẠNG 5. Tìm giới hạn của dãy số có chứa tham số.

Câu 34: **Đáp án C.**
Đây là một bài toán chứa tham số.
Vì là bài toán trắc nghiệm nên có một cách là cho a và b các giá trị cụ thể, rồi sử dụng MTCT để tìm giới hạn, từ đó tìm được đáp án đúng.

Chẳng hạn cho $a=2, b=3$. Khi đó $\frac{a+2b}{3}=\frac{8}{3}$, $\frac{2a+b}{3}=7$ và $a, b, \frac{a+2b}{3}, \frac{2a+b}{3}$ đôi một khác nhau.

Nhập vào màn hình :

Qui trình bấm máy	Kết quả thu được
QcQraQz+QxR2$QyQzQrQxQyQxQrQcr2=3=========== === === ==	

Dùng cách tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn $2,(6)$, ta được $2,(6)=\frac{8}{3}$.

Vậy giới hạn của dãy số trong trường hợp này bằng $\frac{8}{3}$. Do đó chọn đáp án C.

Bổ sung : Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=a$, $u_2=b$, $u_{n+2}=\frac{u_{n+1}+u_n}{2}$ $\forall n\ge 1$, trong đó a,b là các số thực cho trước, $a\le b$.

a) Chứng minh dãy (u_{2n}) là dãy giảm, còn dãy (u_{2n+1}) là dãy tăng.

b) Chứng minh rằng $|x_{n+2}-x_{n+1}|=\frac{|x_2-x_1|}{2^n}$ $\forall n\ge 1$.

c) Chứng minh rằng $2x_{n+2}+x_{n+1}=2x_2+x_1$ $\forall n\ge 1$.

d) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn và giới hạn đó là $\frac{a+2b}{3}$.

Việc chứng minh bài toán trên xin dành cho độc giả.

Câu 35: Đáp án A.

Dễ thấy $\lim u_n=\lim\frac{3n-m}{5n+1}=\frac{3}{5}$ với mọi m.

Câu 36: Đáp án B.

Dễ thấy với $a=2$ thì $\lim u_n=\lim\frac{4n^2+n+2}{2n^2+5}=2$.

Thật vậy :

Nếu $a=0$ thì $\lim u_n=\lim\frac{4n^2+n+2}{5}=+\infty$.

Nếu $a\ne 0$ thì $\lim u_n=\lim\frac{4n^2+n+2}{an^2+5}=\frac{4}{a}$.

Do đó để $\lim u_n=2$ thì $\frac{4}{a}=2\Leftrightarrow a=2$.

Câu 37: Đáp án D.

Với kết quả đã trình bày trong phần ví dụ, ta thấy để (u_n) có giới hạn hữu hạn thì $a=1$.

Câu 38: Đáp án D.

Từ kết quả đã trình bày trong phần ví dụ, ta thấy cần phải nhân chia với biểu thức liên hợp. Ta có :

$$\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+bn+3}=\frac{(a-b)n+2}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+bn+3}}=\frac{a-b+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{b}{n}+\frac{3}{n^2}}}.$$

Suy ra $\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+bn+3}\right)=\frac{a-b}{2}$. Do đó để

$\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+bn+3}\right)=2$

$\Leftrightarrow \frac{a-b}{2}=2 \Leftrightarrow a-b=4$.

Câu 39: Đáp án B.

Ta có : $\lim\frac{\sqrt{an^2+1}-\sqrt{4n-1}}{5n+2}=\frac{\sqrt{a}}{5}$. Do đó ta phải có $\sqrt{a}=10 \Leftrightarrow a=100$.

Câu 40: Đáp án C.

Ta có $\lim\left(2n+a-\sqrt[3]{8n^3+5}\right)=6 \Leftrightarrow 6-a=\lim\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5}\right)$ mà $\lim\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5}\right)=0$. Do đó $6-a=0 \Leftrightarrow a=6$.

Câu 41: Đáp án A.

Ta có $\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an-b\right)=0 \Leftrightarrow b=\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an\right)$. Để $\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an\right)$ hữu hạn thì $a>0$ (xem lại phần ví dụ).

phần Ví dụ). Ta có $\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}+n\right)=0$. Vậy $b=0$. Do đó đáp án là A.

DẠNG 1. TÌM SỐ HẠNG CỦA DÃY SỐ MÀ SỐ HẠNG TỔNG QUÁT LÀ TỔNG N SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA MỘT DÃY SỐ KHÁC.

Câu 42: Đáp án A.

Lời giải

Theo kết quả đã trình bày trong phần Ví dụ thì $\lim\frac{1+2+3+...+n}{2+4+6+...+2n}=\frac{1}{2}$ do tử thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai bằng 1, mẫu thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai bằng 2.

Tuy nhiên, ta có thể giải nhanh chóng như sau:

$$\lim \frac{1+2+3+...+n}{2+4+6+...+2n} = \lim \frac{1+2+3+...+n}{2(1+2+3+...+n)} = \frac{1}{2}.$$

Câu 43: Đáp án A.

Lời giải

Ta thấy tử thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội bằng 2, mẫu thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội bằng 5. Mà $2<5$ nên theo kết quả trình bày trong phần Ví dụ, giới hạn cần tìm là 0.

Câu 44: Đáp án B.

Lời giải

Ta có:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{2^2-1}{2^2} \times \frac{3^2-1}{3^2} \times ... \times \frac{n^2-1}{n^2}$$

$$= \frac{1.3}{2^2} \times \frac{2.4}{3^2} \times \frac{3.5}{4^2} \times ... \times \frac{(n-2)n}{(n-1)^2} \times \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n}.$$

Vậy $\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right] = \lim \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$

Câu 45: Đáp án A.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{n!}{(1+1^2)\times(1+2^2)\times...\times(1+n^2)} \le \frac{n!}{1^2\times 2^2\times...\times n^2} = \frac{n!}{(1\times 2\times...\times n)^2} = \frac{n!}{(n!)^2} = \frac{1}{n!}.$$

Mà $\lim \frac{1}{n!} = 0$ nên suy ra: $\lim \frac{n!}{(1+1^2)\times(1+2^2)\times...\times(1+n^2)} = 0.$

Câu 46: Đáp án B.

Lời giải

Ta có:

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{3(n+1)^2+9(n+1)}{2} - \frac{3n^2+9n}{2} = 3n+6 = 3(n+1)+3.$$

Suy ra $u_n = 3n+3$.

Vậy $\lim \frac{1}{nu_n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \lim \frac{3n^2+9n}{2n(3n+3)} = \frac{3}{2.3} = \frac{1}{2}.$

Câu 47: Đáp án C.

Lời giải

Ta có: $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1+3+3^2+...+3^k}{5^{k+2}} = \lim \sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{k+1} 3^{i-1}}{5^{k+2}}$.

Do đó nên rất khó để sử dụng MTCT đối với bài toán này. Ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{k+1} 3^{i-1}}{5^{k+2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k+1}-1}{2.5^{k+2}} = \frac{3}{50}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k - \frac{1}{50}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{3}{50}.\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} - \frac{1}{50}\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{17}{200}.$$

Vậy chọn đáp án C.

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

I. Định nghĩa giới hạn của hàm số tại một điểm

1. Giới hạn hữu hạn tại một điểm

Định nghĩa 1:

Cho $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\backslash\{x_0\}$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_n\in(a;b)\backslash\{x_0\}, x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L$.

Nhận xét:

- Giới hạn của hàm số được định nghĩa thông qua khái niệm giới hạn của dãy số.
- Hàm số không nhất thiết phải xác định tại x_0.

Định nghĩa 2 (Giới hạn một bên):

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_0<x_n<b, x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L.$

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $a<x_n<x_0, x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L.$

STUDY TIP

$x\to x_0^+$ nghĩa là $x\to x_0$ và $x>x_0$.

$x\to x_0^-$ nghĩa là $x\to x_0$ và $x<x_0$.

Định lí 1

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L.$

2. Giới hạn vô cực tại một điểm

Định nghĩa 3

Cho $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\backslash\{x_0\}$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_n\in(a;b)\backslash\{x_0\}, x_n\to x_0$ ta có $f(x_n)=+\infty.$

Lưu ý:

Các định nghĩa $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

3. Lưu ý:

a) $f(x)$ không nhất thiết phải xác định tại điểm x_0.

b) Ta chỉ xét giới hạn của $f(x)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $(a;b)$ (dù nhỏ) chứa x_0 mà $f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\setminus\{x_0\}$.

Chẳng hạn, hàm số $f(x)=\sqrt{x}$ có tập xác định là $D=[0;+\infty)$. Do đó ta không xét giới hạn của hàm số tại điểm $x_0=0$, do không có một khoảng $(a;b)$ nào chứa điểm 0 mà $f(x)$ xác định trên đó cả. Tương tự vậy ta cũng không xét giới hạn của $f(x)$ tại mọi điểm $x_0<0$.

c) Ta chỉ xét giới hạn bên phải của $f(x)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $(x_0;b)$ (khoảng nằm bên phải x_0) mà $f(x)$ xác định trên đó.

Tương tự, ta chỉ xét giới hạn bên trái của $f(x)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $(a;x_0)$ (khoảng nằm bên trái x_0) mà $f(x)$ xác định trên đó.

Chẳng hạn, với hàm số $f(x)=\sqrt{x-1}$, tại điểm $x_0=1$, ta chỉ xét giới hạn bên phải. Với hàm số $g(x)=\sqrt{1-x}$, tại điểm $x_0=1$, ta chỉ xét giới hạn bên trái.

d) $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x^-_o} f(x) = \lim\limits_{x\to x^+_o} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x^-_o} f(x) = \lim\limits_{x\to x^+_o} f(x) = -\infty$

II. Định nghĩa giới hạn của hàm số tại vô cực

1. Giới hạn hữu hạn tại vô cực

Định nghĩa 4

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số (x_n), $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta đều có $\lim f(x)=L$.

LƯU Ý: Định nghĩa $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

2. Giới hạn vô cực tại vô cực

Định nghĩa 5

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ với mọi dãy số (x_n), $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta đều có $\lim f(x)=+\infty$.

LƯU Ý: Các định nghĩa: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

III. Một số giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{x\to x_o} x = x_o$.

b) $\lim\limits_{x\to x_o} c = c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$ (c là hằng số)

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$ (c là hằng số, k nguyên dương).

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số nguyên lẻ;
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số nguyên chẵn.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-f(x)\right] = -\infty$.

IV. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 2

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_o} g(x) = M$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)\pm g(x)\right] = L \pm M$.

b) $\lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)g(x)\right] = LM$; $\lim\limits_{x\to x_o}\left[cf(x)\right] = cL$ với c là một là một hằng số.

c) $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M} (M \neq 0)$.

STUDY TIP: Giới hạn hữu hạn, giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số tại một điểm bằng tổng, hiệu, tích, thương các giới hạn của chúng tại điểm đó (trong trường hợp thương, giới hạn của mẫu phải khác không).

Định lí 3

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = L$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x\to x_o}\left|f(x)\right| = \left|L\right|$.

b) $\lim\limits_{x\to x_o}\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$.

c) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $J\backslash\left\{x_o\right\}$, trong đó J là khoảng nào đó chứa x_o, thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_o}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

LƯU Ý: Định lí 2, định lí 3 vẫn đúng khi thay $x \to x_o$ bởi $x \to x^-_o, x \to x^+_o$.

V. Quy tắc về giới hạn vô cực

Các định lí và quy tắc dưới đây được áp dụng cho mọi trường hợp:
$x \to x_o, x \to x^-_o, x \to x^+_o, x \to +\infty$ và $x \to -\infty$.

Tuyên nhiên, để cho gọn, ta chỉ phát biểu cho trường hợp $x \to x_o$.

Quy tắc 1 (Quy tắc tìm giới hạn của tích).

$L = \lim\limits_{x\to x_o} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)g(x)\right]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

STUDY TIP: Giới hạn của tích hai hàm số

- Tích của một hàm số có giới hạn hữu hạn khác 0 với một hàm số có giới hạn vô cực là một hàm số có giới hạn vô cực.
- Dấu của giới hạn theo quy tắc dấu của phép nhân hai số.

Quy tắc 2 (Quy tắc tìm giới hạn của thương)

$L=\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L>0$	0	+	$+\infty$
		-	$-\infty$
$L<0$	0	+	$-\infty$
		-	$+\infty$

(Dấu của $g\left(x\right)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x\neq x_o$).

STUDY TIP: Giới hạn của thương hai hàm số. Tử thức có giới hạn hữu hạn khác 0:
- Mẫu thức càng tang (dần đến vô cực) thì phân thức càng nhỏ (dần đến 0).
- Mẫu thức càng nhỏ (dần đến 0) thì phân thức có giá trị tuyệt đối càng lớn (dần đến vô cực).
- Dấu của giới hạn theo quy tắc dấu của phép chia hai số.

VI. Các dạng vô định: Gồm $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0.\infty$ **và** $\infty-\infty$**.**

B. Các dạng toán về giới hạn hàm số

Dạng 1: **Tìm giới hạn xác định bằng cách sử dụng trực tiếp các định nghĩa, định lí và quy tắc**

Phương pháp:

- Xác định đúng dạng bài toán: giới hạn tại một điểm hay giới hạn tại vô cực? giới hạn xác định hay vô định?
- với giới hạn hàm số tại một điểm ta cần lưu ý: Cho $f(x)$ là hàm số sơ cấp xác định trên khoảng $\left(a;b\right)$ chứa điểm x_0. Khi đó, $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$.
- Với giới hạn hàm số tại vô cực ta "xử lí" tương tự như giới hạn dãy số.
- Với giới hạn xác định, ta áp dụng trực tiếp định nghĩa giới hạn hàm số, các định lí về giới hạn hữu hạn và các quy tắc về giới hạn vô cực.

STUDY TIP: Dùng định nghĩa chứng minh hàm số $y=f(x)$ không có giới hạn khi $x\to x_0$

- chọn hai dãy số khác nhau $\left(a_n\right)$ và $\left(b_n\right)$ thỏa mãn a_n và b_n thuộc tập xác định của hàm số $y=f(x)$ và khác x_0; $a_n\to x_0; b_n\to x_0$.
- Chứng minh $\lim f\left(a_n\right)\neq \lim f\left(b_n\right)$ hoặc chứng minh một trong hai giới hạn này không tồn tại.
- Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ không tồn tại. TH $x\to x_0^{\pm}$ hoặc $x\to\pm\infty$ chứng minh tương tự.

Ví dụ 1: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=1$ **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=-1$ **C.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=0$ **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ không tồn tại.

Đáp án D

Lời giải

Xét dãy số (x_n) với $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$.

Ta có $x_n \to +\infty$ và $\lim \sin x_n = \lim \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$. (1)

Lại xét dãy số (y_n) với $y_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$.

Ta có $y_n \to +\infty$ và $\lim \sin y_n = \lim \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ không tồn tại. Vậy chọn đáp án D.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

STUDY TIP: Giới hạn tại một điểm

Nếu $f(x)$ xác định tại x_0 và tồn tại một khoảng $(a;b)$ thuộc tập xác định của $f(x)$ chứa x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$.

- Việc sử dụng hay không sử dụng MTCT để tính $f(x_o)$ tùy thuộc vào mức độ phức tạp của $f(x_o)$ và khả năng tính toán của độc giả.

Đáp án C.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $(0;+\infty)$.

Cách 1(sử dụng định nghĩa):

Giải sử (x_n) là một dãy số bất kỳ, thỏa mãn $x_n > 0, x_n \neq 3$ và $x_n \to 3$ khi $n \to +\infty$. Ta có

$\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n^2+1}{2\sqrt{x_n}} = \frac{3^2+1}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ (áp dụng quy tắc về giới hạn hữu hạn của dãy số). Do đó $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2(sử dụng định lí về giới hạn hữu hạn):

Theo định lí 1 ta có:

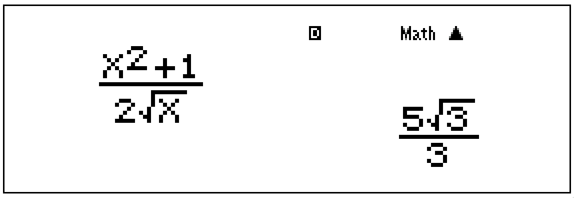
$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 3}(2\sqrt{x})} = \frac{\lim\limits_{x\to 3} x^2 + \lim\limits_{x\to 3} 1}{\lim\limits_{x\to 3} 2.\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 3} x.\lim\limits_{x\to 3} x + \lim\limits_{x\to 3} 1}{\lim\limits_{x\to 2} 2.\sqrt{\lim\limits_{x\to 3} x}} = \frac{3.3+1}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Tuy nhiên trong thực hành, vì là câu hỏi trắc nghiệm nên ta làm như sau.

Cách 3: Vì $f(x)$ là hàm số sơ cấp xác định trên $(0;+\infty)$ chứa điểm $x_0=3$ nên $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)=\dfrac{10}{2\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Do đó sử dụng MTCT ta làm như cách 4 dưới đây.

Cách 4: Nhập biểu thức của vào màn hình. Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$, máy hỏi X ? nhập 3 $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như hình:



Do đó chọn đáp án C.

Ví dụ 3: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây ?

A. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x-2}=1$. **B.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x-2}=5$.

C. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x-2}=-1$. **D.** Hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ không có giới hạn khi $x\to 3$.

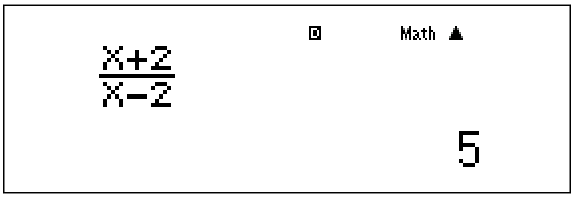
Đáp án B

Lời giải

Hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ xác định trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$. Ta có $3\in(2;+\infty)$.

Cách 1 : $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)=\dfrac{3+2}{3-2}=5$.

Cách 2 : Nhập biểu thức của hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ và màn hình MTCT. Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$, máy hỏi X? nhập 3 $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như hình:



Vậy $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x-2}=5$.

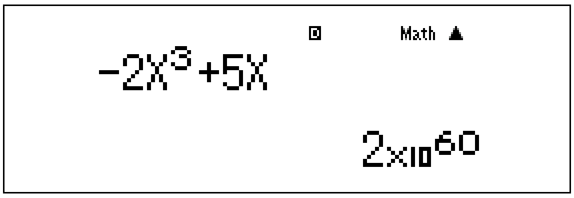
Ví dụ 4: $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-2x^3+5x\right)$ bằng:

A. -2. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giá trị của $f(x)=-2x^3+5x$ tại một điểm có giá trị âm rất nhỏ (do ta đang xét giới hạn của hàm số khi $x\to-\infty$), chẳng hạn tại -10^{20}. Máy hiển thị kết quả như hình:



Đó là một giá trị dương rất lớn. Vậy chọn đáp án C , tức $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+5x\right)=+\infty$.

Cách 2: Ta có $-2x^3+5x=x^3\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=-2<0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=+\infty$.

Vậy theo Quy tắc 1, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+5x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=+\infty$. Do đó chọn C.

Lưu ý 1:

- Để hiểu tại sao $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=-2$ xin xem lại phần các giới hạn đặc biệt.

- Bài toán thuộc dạng tính giới hạn hàm số khi x dần tới vô cực, nhưng là khi $x\to-\infty$. Do đó không thể áp dụng ngay các kết quả đã biết về giới hạn dãy số, vì giới hạn dãy số được xét khi $n\to+\infty$. Ta chỉ có thể áp dụng các kĩ thuật đã biết đối với giới hạn dãy số.

Lưu ý 2: Có thể dễ dàng chứng minh được kết quả như sau :

Cho hàm số $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\ldots+a_1x+a_0$ $(a_k\neq0)$ là một đa thức bậc k.

x	k	a_k	Giới hạn của $f(x)$
$x\to+\infty$	Tùy ý	$a_k>0$	$+\infty$
		$a_k<0$	$-\infty$
$x\to-\infty$	k chẵn	$a_k>0$	$+\infty$
		$a_k<0$	$-\infty$

	k lẻ	$a_k > 0$	$-\infty$
		$a_k < 0$	$+\infty$

Thật vậy, ta có $f(x) = x^k\left(a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a_0}{x^k}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a_0}{x^k}\right) = a_k$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k tùy ý, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ nếu k chẵn, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ nếu k lẻ nên ta dễ dàng suy ra bảng kết quả trên.

Ví dụ 5: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4 - 2x^2 + 1\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 3. **D.** 2.

Đáp án A

Lời giải

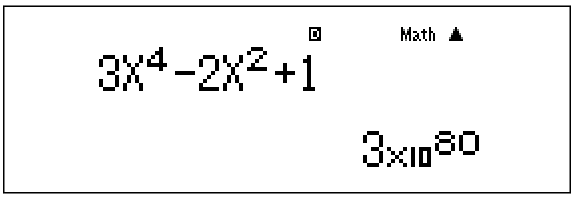
Cách 1: Theo nhận xét trên thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4 - 2x^2 + 1\right) = +\infty$ ($x \to -\infty$, k chẵn và $a_k > 0$). Thật vậy, ta có $3x^4 - 2x^2 + 1 = x^4\left(3 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) = 3 > 0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4 - 2x^2 + 1\right) = +\infty$.

STUDY TIP

- Giới hạn tại vô cực của hàm đa thức là vô cực, chỉ phụ thuộc vào số hạng chứa lũy thừa bậc cao nhất.
- Giới hạn của hàm đa thức tại $+\infty$ phụ thuộc vào hệ số của lũy thừa bậc cao nhất. (Giống với giới hạn của dãy số dạng đa thức).
- Giới hạn của hàm đa thức tại $-\infty$ phụ thuộc vào bậc và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$ tại $x = -10^{20}$, ta được kết quả như hình :



Kết quả là một số dương rất lớn. Do đó chọn đáp án A,

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$. Khẳng định nào dưới đây đúng ?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

B. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

D. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ không tồn tại.

Đáp án B.

Lời giải

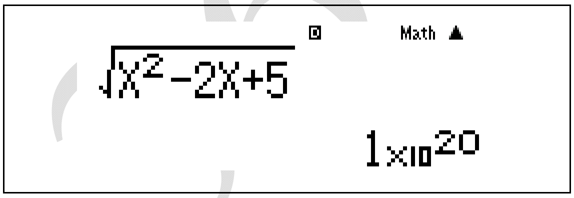
Hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Có thể giải nhanh như sau : Vì x^2-2x+5 là một hàm đa thức của x nên có giới hạn tại vô cực. Mà $\sqrt{x^2-2x+5}>0$ với mọi x nên giới hạn của $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ tại $-\infty$ chắc chắn là $+\infty$.

Thật vậy, ta có $\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=1>0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x+5}=+\infty$.

Hoặc ta có thể sử dụng MTCT để tính giá trị của $f(x)$ tại một giá trị âm rất nhỏ của x, chẳng hạn tại $x=-10^{20}$ ta được kết quả như hình:



Kết quả này là một số dương rất lớn. Do đó ta chọn đáp án B. (Dễ thấy kết quả hiển thị trên máy tính như trên chỉ là kết quả gần đúng do khả năng tính toán hạn chế của MTCT. Tuy nhiên kết quả đó cũng giúp ta lựa chọn được đáp án chính xác).

STUDY TIP

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}|x|=+\infty$.

Khi $x\to-\infty$ thì $x>0$.

Với $x<0$ ta có $\sqrt{x^2}=-x$.

Cần đặc biệt lưu ý các điều trên khi tính giới hạn tại $-\infty$ của hàm chứa căn thức.

Ví dụ 7: Giới hạn của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}$ khi $x\to-\infty$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** 3.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Ta có:

$$\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}-|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}$$

$$=|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)$$

Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)=1-2=-1<0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\right]=-\infty$.

Lưu ý:

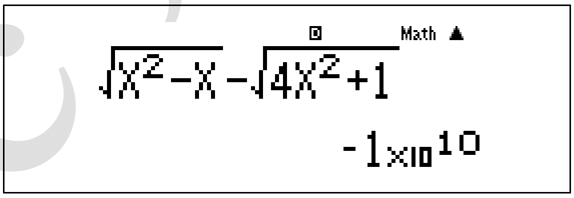
- Độc giả nên đọc lại phần giới hạn dãy số có chứa căn thức để hiểu hơn tại sao lại có định hướng giải như vậy (mà không đi nhân chia với biểu thức liên hợp).

- Có thể thấy như sau: Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+1}=+\infty$.

Mà hệ số của x^2 trong $4x^2+1$ lớn hơn hệ số của x^2 trong x^2-x nên suy ra

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=-\infty.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả như hình.



Vậy chọn đáp án A.

Ví dụ 8: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2017}{3x^3-5x^5}$ bằng:

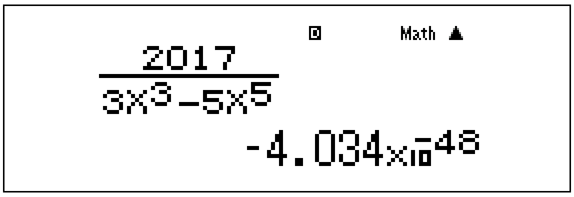
A. $\dfrac{2017}{3}$. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^3-5x^5\right)=-\infty$ nên theo quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2017}{3x^3-5x^5}=0$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=10^{10}$ ta được kết quả như hình.



Đó là một kết quả rất gần 0. Do đó chọn đáp án D.

STUDY TIP

Khi hàm số không xác định tại x_0 thì ta thử áp dụng các quy tắc về giới hạn vô cực. Đó là các quy tắc áp dụng cho các dạng $L.\infty$; $\frac{L}{\infty}$; $\frac{L}{0}$. Lưu ý cách xác định dấu của giới hạn.

- Dạng $\frac{L}{\infty}$: giới hạn là 0.

- Dạng $L.\infty$ và $\frac{L}{0}$: Giới hạn là vô cực.

Ví dụ 9: Giới hạn bên phải của hàm số $f\left(x\right)=\frac{3x-7}{x-2}$ khi $x\to 2$ là

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 3. **D.** $\frac{7}{2}$.

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số $f\left(x\right)=\frac{3x-7}{x-2}$ xác định trên $\left(-\infty;+\infty\right)\backslash\left\{2\right\}$.

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x-2\right)=0,\ x-2>0$ với mọi $x>2$ và $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(3x-7\right)=3.2-7=-1<0$. Do đó theo quy tắc 2 thì $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{3x-7}{x-2}=-\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Tính giá trị của $f\left(x\right)=\frac{3x-7}{x-2}$ tại $x=2$ ta thấy máy báo lỗi Math Error (do $f\left(x\right)$ không xác định tại $x=2$). Quay lại tính giá trị của $f\left(x\right)$ tại $x=2+10^{-10}$ (tức $2,0000000001$) là một giá trị của x lớn hơn 2 và rất gần 2. Kết quả là một số âm rất nhỏ.

Do đó chọn đáp án B.

Ví dụ 10: Xét bài toán "Tìm $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}$", bạn Hà đã giải như sau:

Bước 1: Vì $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(2x^2-5x+2\right)=0$.

Bước 2: $2x^2-5x+2>0$ với $x<2$ và x đủ gần 2,

Bước 3: $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(3x^2+x-1\right)=13>0$

Bước 4: nên theo quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}=+\infty$.

Hỏi lời giải trên của bạn Hà đã sai từ bước thứ mấy ?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Đáp án B

Lời giải

Xét dấu biểu thức $g(x)=2x^2-5x+2$ ta thấy $g(x)<0$ với mọi $x\in(1;2)$.

Vậy lời giải sai từ bước 2. (Lời giải đúng cho ra kết quả $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}=-\infty$).

STUDY TIP

$x\to x_0^+$ nghĩa là $x\to x_0$ và $x>x_0$.

$x\to x_0^-$ nghĩa là $x\to x_0$ và $x<x_0$.

Nếu $x\to x_0^+$ thì tính giá trị hàm số tại $x=x_0+10^{-k}$.

Nếu $x\to x_0^-$ thì tính giá trị hàm số tại $x=x_0-10^{-k}$.

Trong đó k là một số nguyên dương.

Ví dụ 11: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-x}{(x-4)^2}$ bằng:

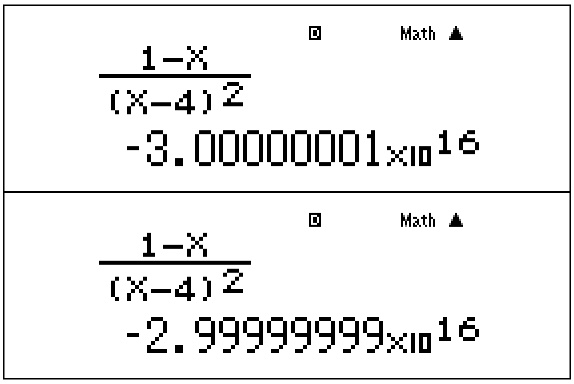
A. 0. **B.** -3. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 4}(1-x)=-3<0$, $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)^2=0$ và $(x-4)^2>0$ với mọi $x\neq 4$ nên theo quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-x}{(x-4)^2}=-\infty$. Vậy chọn đáp án C.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=4+10^{-8}$ hoặc tại $x=4-10^{-8}$ ra được các kết quả như hình



Vậy chọn đáp án C.

Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}5x+2 \text{ khi } x\ge 1\\ x^2-3 \text{ khi } x<1\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=7$. **B.** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-2$.

C. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=7$. **D.** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=7$.

Đáp án D.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(5x+2)=5.1+2=7$. Vì chỉ có một đáp án đúng nên chọn đáp án D.

STUDY TIP

Cần xác định đúng biểu thức của $f(x)$ khi $x\to x_0^+$ và khi $x\to x_0^-$.

Giải thích thêm : Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-3\right)=1^2-3=-2$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ không tồn tại.

Các đáp án A, B, C đều sai.

STUDY TIP

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$.

Ví dụ 13: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-5} \text{ khi } x\ge 3 & (1)\\ \dfrac{x^2-5}{x+2} \text{ khi } x<3 & (2)\end{cases}$.

Trong biểu thức (2) ở trên, cần thay số 5 bằng số nào để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \to 3$?

A. 19. **B.** 1.

C. -1. **D.** Không có số nào thỏa mãn.

Đáp án C.

Lời giải

Hàm số đã cho các định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{3^2 - 5} = 2$.

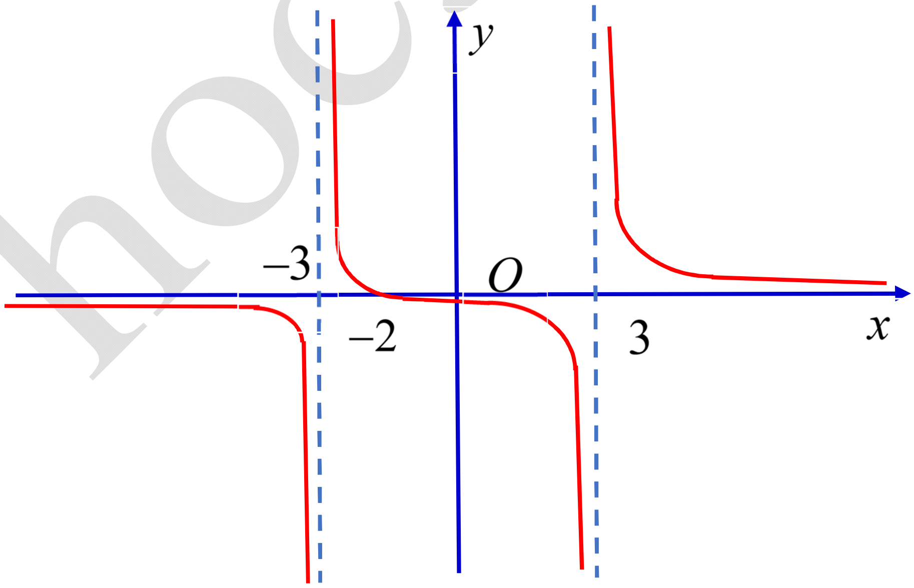
Đặt $f(x) = \dfrac{x^2 - m}{x + 2}$ khi $x < 3$ (m là tham số, $m > 0$).

Ta có $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} = \dfrac{x^2 - m}{x + 2} = \dfrac{3^2 - m}{3 + 2} = \dfrac{9 - m}{5}$.

Để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \to 3$ thì $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \Leftrightarrow \dfrac{9 - m}{5} = 2 \Leftrightarrow m = -1$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\sqrt{X^2 - 5}$ khi $X = 3$ được kết quả bằng 2. Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\dfrac{X^2 - A}{X + 2}$ khi $X = 3$ và lần lượt nhận các giá trị bằng $19, 1$ và -1. Ta thấy khi $A = -1$ thì biểu thức nhận giá trị bằng 2. Vậy chọn đáp án C.

Ví dụ 14: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Quan sát đồ thị và cho biết trong các giới hạn sau, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. **C.** $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)$. **D.** $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$.

Đáp án C.

Lời giải

Khi $x\to-3^+$, đồ thị hàm số là một đường cong đi lên từ phải qua trái. Do đó $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)=+\infty$.

Tương tự như vậy ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=-\infty$.

Do đó chọn đáp án C.

Công phá toán 2 (trang 240 – 244)

DẠNG 2: TÌM GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG $\frac{0}{0}$

STUDY TIP

- Khi tính giới hạn mà không thể áp dụng trực tiếp các định lí về giới hạn hữu hạn hay các quy tắc về giới hạn vô cực đã biết thì ta gọi đó là các dạng vô định.
- Kí hiệu các dạng vô định gồm: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$ và $\infty-\infty$. Để tính giới hạn dạng vô định ta phải biến đổi biểu thức của hàm số về dạng áp dụng được các định lí và quy tắc đã biết. Làm như vậy gọi là *"khử dạng vô định"*.

1. Bài toán:

Tính $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức hoặc căn thức.

Phương pháp giải (tự luận)

✓ Phân tích tử và mậu thành tích các nhân tử và giản ước. Cụ thể, vì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ nên $f(x)$ và $g(x)$ cùng có nghiệm $x=x_0$. Do đó ta phân tích được $f(x)=(x-x_0)A(x)$ và $g(x)=(x-x_0)B(x)$. Khi đó ta có: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)A(x)}{(x-x_0)B(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}$ và công việc còn lại là đi tính $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}$.

✓ Nếu $f(x)$ và $g(x)$ có chứa căn thức thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp trước khi phân tích chúng thành tích để giản ước.

STUDY TIP

Phân tích đa thức thành nhân tử:

- ✓ Áp dụng hằng đẳng thức đáng nhớ.
- ✓ Khi đã biết $f(x)$ có nghiệm $x = x_0$, ta sử dụng lược đồ Hooc-ne hoặc chia $f(x)$ cho $x = x_0$ được thương $A(x)$. Khi đó $f(x) = (x - x_0)A(x)$.
- ✓ Áp dụng kết quả: nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Tổng quát: nếu phương trình $a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = 0$ có các nghiệm thực $x_1, x_2, ..., x_m$ thì $a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = a_k(x - x_1)...(x - x_m)A(x)$, trong đó $A(x)$ là đa thức bậc $k - m$. Tuy nhiên, trong thực tế, ta dùng kết quả này khi có đủ k nghiệm thực, tức $m = k$. Trường hợp ngược lại nên dùng lược đồ Hooc-ne. (với phương trình bậc hai, bậc ba có thể dùng MTCT để tìm nghiệm)

Ví dụ 1. Tính $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$.

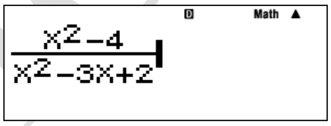
A. 1. **B.** 4. **C.** -2. **D.** -4.

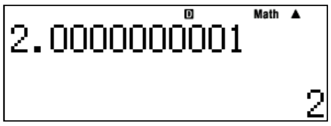
Phân tích: Vì $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 4) = \lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 3x + 2) = 0$ nên đây là giới hạn vô định dạng $\dfrac{0}{0}$. Ta thấy $x^2 - 4$ và $x^2 - 3x + 2$ đều triệt tiêu tại $x = 2$ nên $x = 2$ là nghiệm của $x^2 - 4$ và $x^2 - 3x + 2$. Từ đó ta có cách giải như sau.

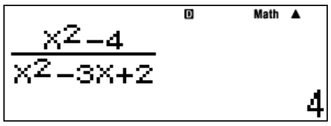
Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{2+2}{2-1} = 4$.

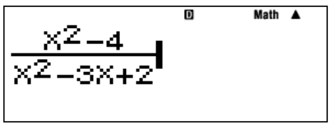
Cách 2: Dử dụng MTCT tính giá trị hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ tại $x = 2$ ta thấy máy báo lỗi Math Error (do hàm số không xác định tại $x = 2$). Quay lại tính giá trị hàm số tại $2,0000000001$ ta được kết quả như sau:

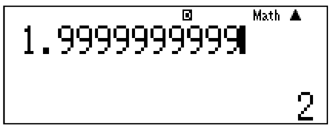


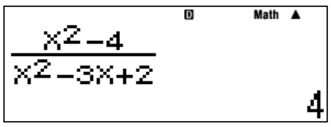




Lại quay lại tính giá trị hàm số tại 1,9999999999 ta được kết quả như sau:







Vậy chọn đáp án B.

Ví dụ 2. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - x^n}{x - 1}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$, ta được kết quả:

A. $+\infty$. **B.** $m-n$. **C.** m. **D.** 1.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-x^n}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^m-1}{x-1}-\dfrac{x^n-1}{x-1}\right)$.

Lại có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1\right)=m$.

Tương tự: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=n$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-x^n}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^m-1}{x-1}-\dfrac{x^n-1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x-1}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=m-n$.

Cách 2: Cho m và n các giá trị cụ thể, chẳng hạn $m=3$ và $m=7$. Sử dụng MTCT tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^7}{x-1}$ ta được kết quả $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^7}{x-1}=-4$. Vậy đáp án đúng là B.

STUDY TIP

- $x^m-1=(x-1)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1\right)$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x-1}=m$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=n$

Ví dụ 3. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}=0$.

B. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}=+\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}=-\infty$.

D. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}$ không tồn tại.

Phân tích: Vì $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}-2\right)=0$ và $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-3x+2\right)=0$ nên đây là dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Tuy nhiên ta chưa thể phân tích ngay $\sqrt{x+3}-2$ thành nhân tử mà phải nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp của $\sqrt{x+3}-2$ là $\sqrt{x+3}+2$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}=\dfrac{\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(x^3-3x+2\right)}$

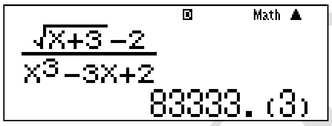
$$=\frac{x-1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)^2(x+2)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)}.$$

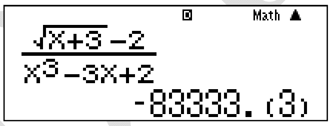
Mà $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)}=+\infty$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)}$ không tồn tại.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}$ không tồn tại. Vậy chọn đáp án D.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}$ tại $x=1$ ta thấy máy báo lỗi Math Error. Quay lại tính giá trị biểu thức tại $x=1{,}000001$ và tại $x=0{,}999999$ ta được kết quả:





Hai kết quả trên là một số dương rất lớn, một số âm rất nhỏ. Do đó có thể kết luận $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}$ không tồn tại.

Nhận xét:

- Nếu chỉ tính giá trị biểu thức tại một điểm thì rất dễ chọn đáp án sai.
- Ở đây ta đã chuyển dạng vô định $\frac{0}{0}$ về dạng xác định $\frac{L}{0}$.
- Dùng MTCT tìm nghiệm của phương trình $x^3-3x+2=0$ ta được $x_1=1,\ x_2=-2$. Như vậy phải có một nghiệm là nghiệm kép do là phương trình bậc ba. Trong trường hợp này, theo Tip trên đã nêu, ta nên dùng lược đồ Hooc-ne để phân tích đa thức x^3-3x+2 thành nhân tử.

Ví dụ 4. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$ bằng:

A. 1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Phân tích: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}\right)=0$ và $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ nên đây là dạng vô định $\frac{0}{0}$. Ta chưa thể phân tích $f(x)=\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}$ thành nhân tử. Mà $f(x)$ lại là hiệu của hai căn thức không cùng bậc. Ta để ý thấy $\sqrt{2x-1}$ và $\sqrt[3]{3x-2}$ đều đạt giá trị bằng 1 tại $x=1$ nên ta biến đổi như sau: $f\left(x\right)=\left(\sqrt{2x-1}-1\right)+\left(1-\sqrt[3]{3x-2}\right)$ rồi tiến hành nhân chia với biểu thức liên hợp.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}=\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}+\dfrac{1-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$

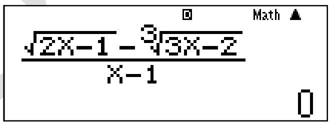
$$=\frac{2x-2}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\left(x-1\right)}+\frac{3-3x}{\left(1+\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{\left(3x-2^2\right)}\right)\left(x-1\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}-\frac{3}{1+\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{\left(3x-2^2\right)}}.$$

Tac có: $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}-\dfrac{3}{1+\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{\left(3x-2^2\right)}}\right]=0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}=0$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$ tại $x=1$ ta thấy máy báo lỗi Math Error. Quay lại tính giá trị biểu thức tại $x=0,99999999$ và tại $x=1,00000001$ ta được kết quả:



Do đó chọn đáp án B tức là $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}=0$.

STUDY TIP

Cho $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{A\left(x\right)}-\sqrt[3]{B\left(x\right)}}{x-x_0}$ (chứa hai căn khác bậc) trong đó $A\left(x_0\right)=B\left(x_0\right)=m$ thì ta biến đổi như sau: $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{A\left(x\right)}-m+m-\sqrt[3]{B\left(x\right)}}{x-x_0}$.

Ví dụ 5. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{\left(x-1\right)^2}$.

A. 0. **B.** -2. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Cách 1: Đặt $t = x-1$ thì $x = t+1$, $\lim\limits_{x\to 1} t = 0$ và

$$\frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2} = \frac{\sqrt[3]{6t+1}-\sqrt{4t+1}}{t^2} = \frac{\sqrt[3]{6t+1}-(2t+1)}{t^2} + \frac{(2t+1)-\sqrt{4t+1}}{t^2}$$

$$= \frac{6t+1-\left(8t^3+12t^2+6t+1\right)}{t^2\left[\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2\right]} + \frac{\left(4t^2+4t+1\right)-(4t+1)}{t^2\left(2t+1+\sqrt{4t+1}\right)}$$

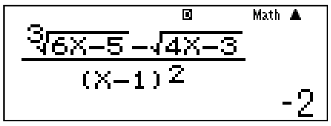
$$= \frac{-8t-12}{\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2} + \frac{4}{2t+1+\sqrt{4t+1}}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2} = \lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{-8t-12}{\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2} + \dfrac{4}{2t+1+\sqrt{4t+1}}\right)$.

Mà $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-8t-12}{\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2} = -\dfrac{12}{3} = -4$; $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{4}{2t+1+\sqrt{4t+1}} = \dfrac{4}{2} = 2$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2} = -4+2 = -2$.

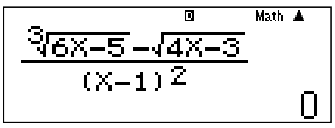
Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}$ tại $x = 0,9999999$ và tại $x = 1,0000001$ ta đều được kết quả:



Do đó chọn đáp án B.

Lưu ý:

- Trong cách thứ 2, nếu ta tính giá trị biểu thức tại $x = 0,999999999$ hoặc tại $x = 1,000000001$ thì ta được kết quả:



Do vượt quá giới hạn tính toán của máy. Do đó nếu không thử lại với cá trị lớn hơn thì có thể ta sẽ chọn đáp án A.

ở bài này có nhiều vấn đề cần phân tích thêm. Nếu làm như ví dụ 4 thì ta sẽ biến đổi $\frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}=\frac{\sqrt[3]{6x-5}-1}{(x-1)^2}+\frac{1-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}$ rồi nhân liên hợp để thu được $\frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}$

$$=\frac{6\left(1+\sqrt{4x-3}\right)-4\left(\sqrt[3]{(6x-5)^2}+\sqrt[3]{6x-5}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(6x-5)^2}+\sqrt[3]{6x-5}+1\right)\left(1+\sqrt{4x-3}\right)}$$

- Ta thấy giới hạn mới thu được vẫn còn là dạng vô định $\frac{0}{0}$ nên vẫn tiếp tục phải khử dạng vô định. Mà việc khử này sẽ rất phức tạp do biểu thức mới thu được khá cồng kềnh. Để giải quyết khó khăn đó ta thấy trong lời giải trình bày ở trên, ta tiến hành đổi biến để cho mẫu gọn lại và không thêm bớt 1 trên tử thức mà thêm bớt nhị thức $2t+1$. Vậy cơ sở nào để tìm ra nhị thức đó?

Ta mong muốn sau khi thêm bớt tử thức với một lượng $A(t)$ nào đó rồi tách ra thành hai phân thức để nhân liên hợp thì trên tử thức xuất hiện nhân tử t^2 để giản ước với t^2 dưới mẫu

$$\frac{\sqrt[3]{6t+1}-\sqrt{4t+1}}{t^2}=\frac{\sqrt[3]{6t+1}-A(t)}{t^2}+\frac{A(t)-\sqrt{4t+1}}{t^2}.$$

Vậy ta phải có $A^2(t)-(4t+1)=kt^2 \Rightarrow A^2(t)=kt^2+4t+1 \Rightarrow k=4$

và $A^2(t)=(2t+1)^2 \Rightarrow A(t)=2t+1$.

- Ở nhiều bài toán giới hạn, ta thấy việc sử dụng MTCT là nhanh hơn giải thông thường. Tuy nhiên chúng tôi vẫn khuyến nghị độc giả nên nắm vững phương pháp giải thông thường (theo hình thức tự luận), vì nhiều bài tập không chỉ đơn thuần là tính giới hạn mà người ra đề có thể hỏi bằng nhiều hình thức khác nhau, đặc biệt có nhiều cách ra đề hạn chế việc sử dụng MTCT để tìm ra đáp án.

STUDY TIP

Trong nhiều bài toán, không nên chỉ tính giá trị hàm số tại một điểm mà nên tính lại một số điểm từ lớn đến nhỏ và từ cả hai phía trái, phải của x_0.

Ví dụ 6. Giới hạn của hàm số $f(x)=\frac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1}$ khi $x\to 1$ bằng

A. $-\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{-a-2}{3}$. **D.** $\frac{2-a}{3}$.

Lời giải

Cách 1: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-a-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-a-1}{x^2+x+1}=-\frac{a}{3}$

Cách 2: (Đặc biệt hóa để sử dụng MTCT) Cho a một giá trị bất kì, chẳng hạn $a=1$, thì $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$. Dùng MTCT ta tìm được $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}=-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{a}{3}$.

Vậy chọn đáp án A.

Giải thích: phương trình $x^2-(a+2)x+a+1=0$ có tổng các hệ số bằng 0 nên ta có một nghiệm bằng 1, nghiệm còn lại bằng $a+1$. Do đó ta phân tích được $x^2-(a+2)x+a+1=(x-1)(x-a-1)$.

STUDY TIP

- Nếu đa thức có tổng các hệ số bằng 0 thì đa thức có một nghiệm bằng 1.
- Nếu đa thức có tổng các hệ số của các lũy thừa bậc chẵn bằng tổng các hệ số của lũy thừa bậc lẻ thì đa thức có một nghiệm bằng -1.

Ví dụ 7. Giả sử $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{2x}=L$. Hệ số a bằng bao nhiêu để $L=3$?

A. -6. **B.** 6. **C.** -12. **D.** 12.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{2x\left(\sqrt{1+ax}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{2\left(\sqrt{1+ax}+1\right)}=\dfrac{a}{4}$

Vậy $L=\dfrac{a}{4}$. Do đó $L=3\Leftrightarrow\dfrac{a}{4}=3\Leftrightarrow a=12$. Đáp án đúng là D.

Cách 2: Sử dụng MTCT tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{2x}$ lần lượt với a bằng -6, 6, -12, 12. Ta thấy với $a=12$ thì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{2x}$ bằng 3. Vậy chọn đáp án D.

STUDY TIP

Một trong các kĩ thuật giải bài toán trắc nghiệm là thử lần lượt các đáp án và chọn ra đáp án thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. Các bài toán liên quan đến giới hạn đặc biệt

Trong sách giáo khoa đại số và giải tích 11 có nêu một giới hạn đặc biệt dạng $\dfrac{0}{0}$

Đó là $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Sau đây ta xét một số ví dụ áp dụng kết quả này.

Ví dụ 8: Cho a và b là các số thực khác 0. Khi đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{\sin bx}$ bằng

A. a. **B.** b. **C.** $\frac{a}{b}$. **D.** $\frac{b}{a}$.

Lời giải

Đáp án C.

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{bx}{\sin bx}.\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.\lim\limits_{x\to 0}\frac{bx}{\sin bx}$

Đổi biến $t=bx$ ta thấy khi $x\to 0$ thì $t\to 0$. Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\frac{bx}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$.

Cách 2: Cho a và b các giá trị cụ thể, chẳng hạn $a=2, b=3$.

Sử dụng MTCT tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x}$ ta được kết quả bằng $\frac{2}{3}$, tức là bằng $\frac{a}{b}$.

Vậy chọn C.

STUDY TIP

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin A(x)}{A(x)}=1$, với điều kiện $\lim\limits_{x\to 0}A(x)=0$

Ví dụ 9: Cho số thực a khác 0. Khi đó $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos ax}$ bằng

A. $\frac{2}{a^2}$. **B.** $\frac{2}{a}$. **C.** $2a^2$. **D.** $2a$.

Lời giải

Đáp án A

Cách 1: Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos ax}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{ax}{2}}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(\frac{ax}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{ax}{2}}.\frac{2}{a^2}\right]=\frac{2}{a^2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{ax}{2}}{\sin\frac{ax}{2}}\right)^2=\frac{2}{a^2}.1^2=\frac{2}{a^2}.$$

Cách 2: Cho a là một giá trị cụ thể, chẳng hạn $a=2$ (không nên lấy $a=1$, vì khi đó giá trị của $\frac{2}{a^2}$ và $\frac{2}{a}$ cũng bằng nhau). Sử dụng MTCT tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}$ ta được kết quả bằng $\frac{1}{2}$, tức là bằng $\frac{2}{a^2}$. Vậy chọn đáp án A.

STUDY TIP

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^k A(x)}{A^k(x)}=1$$

điều kiện $\lim\limits_{x\to 0}A(x)=0$

Ví dụ 10: $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$ bằng

A. $\tan a$. **B.** $\cot a$. **C.** $\sin a$. **D.** $\cos a$.

Lời giải

Đáp án D

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{2.\frac{x-a}{2}}=\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}.\cos\frac{x+a}{2}\right)$

Mà $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=1$ (xem STUDY TIP trên), $\lim\limits_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=\cos a$.

Vậy $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a$. Do đó chọn đáp án D.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin x-\sin 1}{x-1}$ (ứng với $a=1$).

So sánh kết quả với $\tan 1,\cot 1,\sin 1,\cos 1$ ta được $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin x-\sin 1}{x-1}=\cos 1$.

Vậy chọn đáp án D.

3. Đọc thêm

Ví dụ 11: Cho a và b là các số nguyên dương. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{\sin bx}=\frac{5}{3}$. Tích ab có thể nhận giá trị bằng số nào trong các số dưới đây?

A. 15. **B.** 60. **C.** 240. **D.** Cả ba đáp án trên.

Lời giải

Đáp án D

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{ax}-1}{ax}.\dfrac{bx}{\sin bx}.\dfrac{a}{b}\right)=1.1.\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{b}$

Vậy để $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{\sin bx}=\dfrac{5}{3}$ thì $\dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{3}$. Vì a và b là các số nguyên dương nên suy ra $a=5k,b=3k$ với k nguyên dương. Do đó $ab=15k^2$.

$+\ 15k^2=15\Leftrightarrow k^2=1\Rightarrow k=1\Rightarrow ab=15.$

$+\ 15k^2=60\Leftrightarrow k^2=4\Rightarrow k=2\Rightarrow ab=60.$

$+\ 15k^2=240\Leftrightarrow k^2=16\Rightarrow k=4\Rightarrow ab=240$

Vậy cả ba đáp án đều đúng. Do đó chọn đáp án D.

STUDY TIP

Ngoài giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, Sách giáo khoa giải tích 12 nâng cao chương 2, 5 còn giới thiệu thêm các giới hạn:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1,$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^3)-1}{x^k}$, trong đó k là một số nguyên dương. Tìm tất cả các giá trị của k để $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới 0.

A. $k\in\mathbb{Z},k>3$. **B.** $k\in\mathbb{Z},0<k<3$. **C.** $k\in\mathbb{Z},k\ge 3$. **D.** $k\in\mathbb{Z},0<k\le 3$.

Lời giải

Đáp án D

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)-1}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x^3)-1}{x^3}.\dfrac{1}{x^{k-3}}\right)$

Mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)-1}{x^3}=1$ nên để $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới 0 thì hàm số $g(x)=\dfrac{1}{x^{k-3}}$ phải có giới hạn hữu hạn khi x dần tới 0. Muốn vậy thì $k-3\le 0\Leftrightarrow k\le 3$. Vì k nguyên dương nên đáp án là D.

Cách 2: Sử dụng MTTCT tìm giới hạn khi $k=3$, ta được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)-1}{x^3}=1$.

Vậy ta chỉ xét đáp án C hoặc D. Chẳng hạn với đáp án C, ta sử dụng MTCT tìm giới hạn khi $k=4$. Ta được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)-1}{x^3}=-\infty$. Do đó loại đáp án C. Vậy đáp án đúng là D.

*** Trong chương trình lớp 12 sẽ được học khái niệm căn bậc n.

Định nghĩa

Cho số thực b và số nguyên dương n $(n\ge 2)$. Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu

$a^n=b$

Với n chẵn và:

$+b<0$: Không tồn tạo căn bậc n của b.

$+b=0$: Có một căn bậc n của b là số 0.

$+b>0$: Có hai căn trái dấu, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$, còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$

Sau đây ta xét một vài ví dụ liên quan đến căn bậc n.

STUDY TIP

$a=\sqrt[n]{b}\Rightarrow a^n=b$

-Mọi số thực đều có một căn bậc lẻ và chỉ có một căn bậc lẻ

- Chỉ có số không âm mới có căn bậc chẵn.

Số 0 có một căn bậc chẵn là 0.

Các số dương có hai căn bậc chẵn đối nhau.

Ví dụ 13: Cho a là một số thực khác 0 và n là một số nguyên dương, $n\ge 2$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{a}{n}$.

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{n}{a}$.

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{1}{n}$.

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{1}{a}$.

Lời giải

Đáp án A.

Cách 1: Sử dụng MTCT tìm giới hạn với $n=5$ và $a=3$, ta được kết quả $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+3x}-1}{x}=\dfrac{3}{5}$ vậy đáp án đúng là A.

Cách 2: Đổi biến đặt $t=\sqrt[n]{1+ax}\Rightarrow t^n=1+ax\Rightarrow x=\dfrac{t^n-1}{a}$

Ta có khi $x\to 0$ thì $t\to 1$ và

$$\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=a\frac{t-1}{t^n-1}=a\frac{t-1}{(t-1)\left(t^{n-1}+t^{n-2}+...+t+1\right)}=\frac{a}{t^{n-1}+t^{n-2}+...+t+1}$$

Mà $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a}{t^{n-1}+t^{n-2}+..+t+1}=\dfrac{a}{n}$ nên suy ra $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{a}{n}$. Vậy chọn A.

STUDY TIP

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{a}{n}$

$a^n-b^n=(a-b)\times\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$

$a^n-1=(a-1)\times\left(a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1\right)$

Ví dụ 14: Biết $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\dfrac{a}{b}$ trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản, a và b là các số nguyên dương. Tổng $a+b$ bằng

A. 137. **B.** 138. **C.** 139. **D.** 140.

Lời giải

Đáp án C.

Với những bài dạng này, sẽ khó sử dụng MTCT để tìm đáp án đúng.

Đặt $t=x-8$. Suy ra $x=t+8$. $\lim\limits_{x\to 8}t=0$ và

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\frac{\sqrt{t+9}-\sqrt[3]{t+27}}{\sqrt[4]{t+16}-2}=\frac{3\sqrt{1+\frac{t}{9}}-3\sqrt[3]{1+\frac{t}{27}}}{2\sqrt[4]{1+\frac{t}{16}}-2}$$

$$=\frac{3}{2}\frac{\frac{\sqrt{1+\frac{t}{9}}-1}{t}-\frac{\sqrt[3]{1+\frac{t}{27}}-1}{t}}{\frac{\sqrt[4]{1+\frac{t}{16}}-1}{t}}=g(t)$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\lim\limits_{t\to 0}g(t)$. Áp dụng ví dụ 13 Ta có:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{t}{9}}-1}{t}=\frac{\frac{1}{9}}{2}=\frac{1}{18};\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{t}{27}}-1}{t}=\frac{\frac{1}{27}}{3}=\frac{1}{81};\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+\frac{t}{16}}-1}{t}=\frac{\frac{1}{16}}{4}=\frac{1}{64}$$

Vậy $\lim\limits_{t\to 0}g(t)=\dfrac{3}{2}.\dfrac{\frac{1}{18}-\frac{1}{81}}{\frac{1}{64}}=\dfrac{112}{27}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\dfrac{112}{27}$. Vậy $a=112, b=27$ và $a+b=139$

*** Tính giới hạn vô định dạng $\frac{0}{0}$ bằng đạo hàm (Quy tắc L'Hôpital).

STUDY TIP

*Quy tắc L'Hôpital

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)}{g(x_0)}.$$

Trong đó $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$, $x_0\in(a;b)$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ (Hoặc $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$)

Và $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tồn tại

Trước khi đọc phần này xin đọc chương đạo hàm trong chương trình lớp 11

Ví dụ 15: Ta xét lại ví dụ 9 đã nêu ở trên.

Cho số thực a khác 0. Khi đó $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos ax}$ bằng

A. $\frac{2}{a^2}$. **B.** $\frac{2}{a}$. **C.** $2a^2$. **D.** $2a$.

Lời giải

Đáp án A

Ngoài hai lời giải đã nêu ở trên ta còn một cách áp dụng Quy tắc L'Hopital như sau:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos ax}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{a\sin ax}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{a^2\cos ax}=\frac{2}{a^2}$$

Ở đây ta áp dụng Quy tắc L'Hopital 2 lần. Cách sử dụng Quy tắc này rất hữu dụng khi giải các bài toán trắc nghiệm. Tuy nhiên không áp dụng Quy tắc này cho các bài toán tự luận do Quy tắc L'Hopital không được trình bày trong chương trình THPT.

STUDY TIP

Có thể áp dụng quy tắc L'Hopital nhiều lần để tính giới hạn

Đề nghị: Độc giả hãy vận dụng quy tắc L'Hopital để giải các ví dụ đã nêu ở dạng 2 này.

bài tập dạng trắc nghiệm. Nếu là bài tập dạng tự luận thì các em cần trình bày chi tiết theo phương pháp đã nêu trên. Riêng A và B, ta giải tự luận như sau:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}+\sqrt{5})=+\infty$$

Ví dụ 2: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}$ bằng:

A. 0 **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $+\infty$ **D.** $-\infty$

Đáp án D

Cách 1: Theo kết quả đã nêu ở trên thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=-\infty$

Cách 2: Sử dụng MTCT

Bổ sung: Nếu là bài toán tự luận 'Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}$' thì ta có hai cách giải như sau:

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-3+\frac{1}{x}}{\frac{5}{x}-2}$. Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-3+\frac{1}{x})=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{5}{x}-2)=-2<0$

nên theo qui tắc 2, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-3+\frac{1}{x}}{\frac{5}{x}-2}=-\infty$

Cách 2 : Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x^2}}$. Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3})=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x^2})=0$ và

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x^2}\right)<0$ với mọi $x<0$ nên theo qui tắc 2, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x^2}}=-\infty$

□ STUDY TIP

k	a	$\lim\limits_{x\to-\infty}ax^k$
Chẵn	+	$+\infty$
	-	$-\infty$
Lẻ	+	$-\infty$
	-	$+\infty$

Ví dụ 3 : Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^5+x^3+7}{2x^3-3x^2+1}$ **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3x^2-x^3}{4x^2+1}$ **C.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^4+5}{x-x^3+1}$ **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x^6}{1+x-5x^2}$

Đáp án C

Lời giải

Cách 1 : Theo cách ghi kết quả ở trên thì

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^5+x^3+7}{2x^3-3x^2+1}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3x^2-x^3}{4x^2+1}=-\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^4+5}{x-x^3+1}=3\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x^6}{1+x-5x^5}=\frac{1}{5}\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=+\infty$;

Cách 2 : sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn

Khi đến C thấy $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^4+5}{x-x^3+1}=3\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ nên dừng lại và chọn đáp án C

Ví dụ 4 : Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ bằng :

A. 2 **B.** -2 **C.** 1 **D.** -1

Đáp án B

Lời giải :

Cách 1 : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=-2$

Vậy chọn đáp án B

Cách 2 : Sử dụng MTCT

Ví dụ 5 : Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$ bằng :

A. $-\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $-\infty$ **D.** $+\infty$

Đáp án B

Lời giải :

Cách 1 : Theo ví dụ đã trình bày ở dạng 1 thì $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1})=-\infty$

Ta đưa x^2 ra ngoài căn rồi chia cả tử và mẫu cho x. Cụ thể như sau :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}-|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2x+3}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2x+3}==\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{1}{2}$$

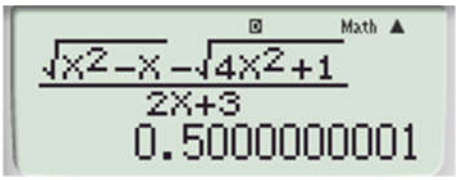
Vậy đáp án đúng là B

Cách 2 : Sử dụng máy tính tính giá trị hàm số tại $x=10^{-10}$ ta được kết quả như hình bên. Vậy chọn đáp án B

Cách 3 : Ta có thể giải bài này bằng phương pháp loại trừ như sau :

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1})=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}(2x+3)=-\infty$ nên giới hạn cần tìm phải mang dấu dương. Mặt khác bậc tử và bậc mẫu bằng nhau nên giới hạn cần tìm là hữu hạn. Đáp án cần tìm là đáp án B

STUDY TIP



Ví dụ 6 : Biết $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}} = \dfrac{\sqrt{a}}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Giá trị nhỏ nhất của tích ab bằng :

A. 6 **B.** 12 **C.** 18 **D.** 24

Đáp án C

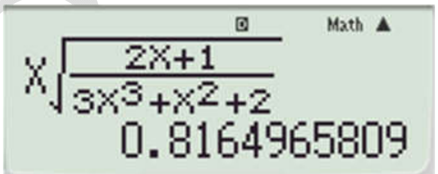
Lời giải :

Ta có : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2x^3+x^2}{3x^3+x^2+2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Vậy $\dfrac{\sqrt{a}}{b} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ Dễ dàng suy ra được tích của ab là 18.

Chú ý : Nếu sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x = 10^{10}$ thì ta thu được kết quả như hình bên. Do đó, nếu không có kiến thực về giới hạn hàm số, rất khó tìm ra được đáp án đúng nếu chỉ dùng MTCT. Ngược lại nếu có kiến thức vững vàng, bạn đọc sẽ nhanh chóng tìm ra đáp án, thậm chí là trong chớp mắt ! Vì vậy, tôi xin nhắc lại, tôi khuyến nghị các bạn đọc nên giải bài tập theo kiểu tự luận một cách căn cơ để có thể đối mặt với các bài toán ''chống MTCT''

STUDY TIP



Dạng 4 : Dạng vô định $0.\infty$

Bài toán : Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)v(x)]$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)] = 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}[\mathrm{v}(x)] = \pm\infty$

Phương pháp : Ta có thể biến đổi $\lim\limits_{x\to x_0}[\mathrm{u}(x)\mathrm{v}(x)] = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{\dfrac{1}{v(x)}}$ để đưa về dạng $\dfrac{0}{0}$ hoặc

$\lim\limits_{x\to x_0}[\mathrm{u}(x)\mathrm{v}(x)] = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{\dfrac{1}{v(x)}}$ để đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Tuy nhiên, trong nhiều bài tập, ta chỉ cần biến đổi đơn giản như đưa biểu thức vào trong/ ra ngoài dâu căn, quy đồng mẫu thức …. Là đưa được về dạng quen thuộc.

Ví dụ 1 : Giới hạn $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+1}-1\right)$ bằng :

A. 0 **B.** -1 **C.** 1 **D.** $-\infty$

Đáp án B

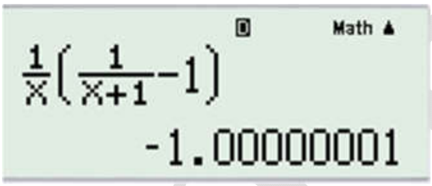
Phân tích : Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty; \lim\limits_{x\to 0^-}(\frac{1}{x+1}-1)=0$ nên chưa có thể áp dụng các định lí, qui tắc để tính giới hạn.

Lời giải :

Cách 1 : Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}(\frac{1}{x+1}-1)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-(x+1)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-1}{x+1}=-1$

Cách 2 : Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $-0,00000001$ ta được kết quả như hình bên. Do đó chọn đáp án B, tức $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}(\frac{1}{x+1}-1)=-1$

STUDY TIP



Ví dụ 2 : Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$ bằng :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Đáp án C

Phân tích : Vì $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0; \lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}=+\infty$ nên chưa có thể áp dụng các định lý và qui tắc để tính giới hạn.

Lời giải :

Cách 1 : Với mọi $x>2$ ta có : $(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}=\sqrt{\frac{(x-2)^2x}{x^2-4}}=\sqrt{\frac{(x-2)x}{x+2}}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\frac{(x-2)x}{x+2}}=0$. Vậy chọn đáp án C

Cách 2: Sử dụng MTCT

Ví dụ 3: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+1)\sqrt{\frac{2x+1}{5x^3+x+2}}$ bằng:

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ **C.** $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ **D.** $-\sqrt{2}$

Đáp án B

Phân tích: Ví dụ tương tự đã được nghiên cứu trong phần dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Tuy nhiên vì $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{2x+1}{5x^3+x+2}}=0$ nên giới hạn này cũng có thể coi như dạng $0.\infty$

Lời giải

Cách 1: Với $x<-1$ ta có $x+1<0$ nên $x+1=-\sqrt{(x+1)^2}$. Do đó

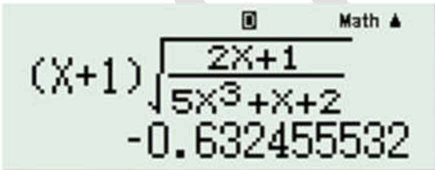
$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)\sqrt{\frac{2x+1}{5x^3+x+2}}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{(x+1)^2(2x+1)}{5x^3+x+2}}=-\frac{\sqrt{10}}{5}$$

Vậy chọn đáp án B

Cách 2: Sử dụng MTCT. Tính giá trị hàm số tại $x=10^{-10}$ ta được kết quả như hình bên. So sánh các đáp số A, B, C, D ta chọn đáp án đúng là **B.**

STUDY TIP

Ta chỉ quan tâm đến lũy thừa bậc cao nhất là x^3. Hệ số của x^2 trong $(x+1)^2$ là 1^2 do $(x+1)^2=x^2+2x+1$. Hệ số của x trong 2x + 1 là 2 nên hệ số của x^3 trên tử là $1^2.2$. Ở đây không nhất thiết phải khai triển tích thành đa thức để tìm hệ số của x^3.



Ví dụ 4: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sin\dfrac{1}{x})$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** $+\infty$ **D.** Không tồn tại

Đáp án B

Phân tích: Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$. Ta có dạng $0.\infty$. Lời giải như sau :

Lời giải :

Cách 1 : Ta có : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sin\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}$

Đặt $t=\dfrac{1}{x}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}t=0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sin\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{sint}}{t}=1$

Cách 2: Sử dụng MTCT (Lưu ý chuyển máy về chế độ Radian)

STUDY TIP

Ở ví dụ 4 ta đã chuyển dạng $0.\infty$ thành $\frac{0}{0}$ do ta liên tưởng đến giới hạn đặc biệt $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Ví dụ 5: Giới hạn $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\frac{\pi}{2}-x)\tan x$ bằng

A. 1 **B.** 0 **C.** $-\infty$ **D.** Không tồn tại

Đáp án A

Phân tích: vì $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\frac{\pi}{2}-x)=0;\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan x=\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{\sin x}{\cos x}=+\infty$ nên ta có dạng $0.\infty$

Lời giải :

Cách 1 : Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x$ thì $x=\frac{\pi}{2}-t,\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}t=0$ và

$(\frac{\pi}{2}-x)\tan x=t\tan(\frac{\pi}{2}-t)=t\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{\cos(\frac{\pi}{2}-t)}=\frac{t}{\sin t}\cos t$. Do đó $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\frac{\pi}{2}-x)\tan x=\lim\limits_{t\to o^+}\frac{t}{\sin t}\cos t=1$

Cách 2 : Sử dụng MTCT

STUDY TIP

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan x=+\infty;\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\tan x=+\infty$. Lưu ý để tránh nhầm lẫn giữa hai giới hạn này

Dạng 5 : Dạng $\infty-\infty$

Bài toán : Tính $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)-v(x)]$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=+\infty$ Hoặc tính $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)+v(x)]$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=-\infty$

Phương pháp : Nhân hoặc chia với biểu thức liên hợp (nếu có căn thức) hoặc qui đồng để đưa về cùng một phân thức (nếu chứa nhiều phân thức).

Ví dụ 1 : Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $+\infty$ **D.** $-\infty$

Đáp án A

Lời giải :

Cách 1:

Phân tích: Ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty;\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ nên bài này thuộc dạng $\infty-\infty$. Tương tự như giới hạn dãy số, ta nhân chia với biểu thưc liên hợp. Lời giải cụ thể như sau:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{2}$

Cách 2: Sử dụng MTCT

Ví dụ 2: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+1}+3x\right)$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$ **B.** $-\dfrac{2}{3}$ **C.** $\dfrac{1}{6}$ **D.** $-\dfrac{1}{6}$

Đáp án D

Lời giải:

Phân tích: Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2+x+1}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}(3x)=-\infty$ nên bài này thuộc dạng vô

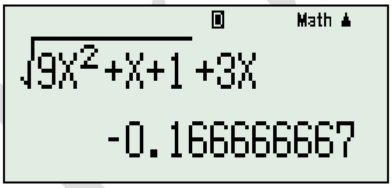
định $\infty-\infty$ (mặc dù biểu thức của hàm số lấy giới hạn có hạng tổng). Ta tiến hành nhân chia với biểu thức liên hợp. Lời giải cụ thể như sau:

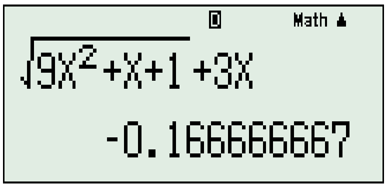
Ta có: $\lim\left(\sqrt{9x^2+x+1}+3x\right)=\lim\dfrac{x+1}{\sqrt{9x^2+x+1}-3x}=\lim\dfrac{x+1}{-x\sqrt{9+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3x}$

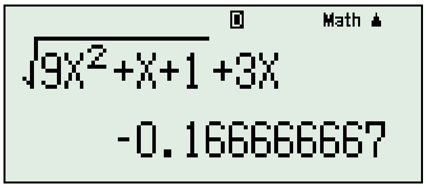
$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{9+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3}=\frac{1}{-3-3}=\frac{-1}{6}.$$ Vậy chọn đáp án **D.**

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả như hình bên. Sử dụng ki thuật tìm dạng phân số của một số thập phân vô hạn tuần hoàn ta được $-0,1(6)=\dfrac{-1}{6}$ (xem lại phần giới hạn dãy số). Vậy chọn đáp án **D.**

☐ ***Studytip:***







Ví dụ 3. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}\right)$ bằng:

A. $\dfrac{13}{24}$ **B.** $\dfrac{7}{12}$ **C.** $-\dfrac{13}{24}$ **D.** $-\dfrac{7}{12}$

Lời giải

Cách 1: Phân tích:

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+3x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}=+\infty$ nên đây cũng là dạng vô định $\infty-\infty$. Tuy nhiên vì là hiệu của hai căn thức không cùng bậc nên ta chưa thể nhân chia với biểu thức liên hợp luôn được. Nhận thấy $x>0$ thì $\sqrt{4x^2}=\sqrt[3]{8x^3}=2x$ nên ta thêm bớt $2x$ rồi nhân chia liên hợp.

Với $x>0$: $\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}=\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)+\left(2x-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}\right)$

$$=\frac{3x}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}-\frac{2+\frac{1}{x^2}}{4+2\sqrt[3]{8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{\left(8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}}$$

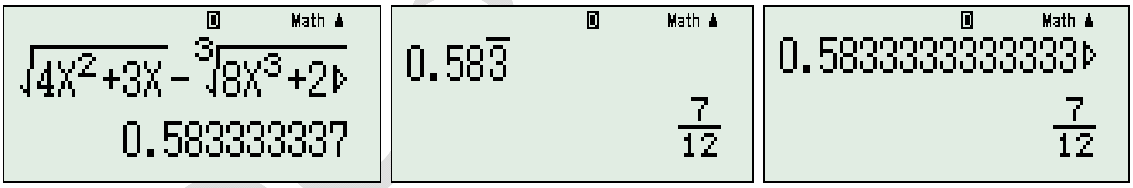
Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{x}}+2}-\frac{2+\frac{1}{x^2}}{4+2\sqrt[3]{8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{\left(8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}}\right)=\frac{3}{2+2}-\frac{2}{4+4+4}=\frac{7}{12}.$$

Do đó chọn **B.**

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả như hình bên. Sử dụng ki thuật tìm dạng phân số của một số thập phân vô hạn tuần hoàn ta được $-0,58(3)=\frac{7}{12}$. (xem lại phần giới hạn dãy số). Vậy chọn đáp án **D.**

☐ ***Studytip:***



Lưu ý: Ta xem lại một Ví dụ đã trình bày ở dạng 1 như sau:

Ví dụ 4. Giới hạn của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}$ khi $x\to+\infty$ bằng:

A. $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** -1 **D.** 3

Phân tích: Ví dụ này cũng thuộc dạng $\infty-\infty$ nhưng lại không phải là dạng vô định. Bằng các định lí và quy tắc, ta tính được giới hạn hàm số mà không cần phải nhân chia với biểu thức liên hợp. Ta xem cách giải cho tiết dưới đây.

Lời giải

$$\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}-|x|\sqrt{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=|x|\left(\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}\right).$$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}|x|=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}=1-2=-1<0.$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[|x|\left(\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}\right)\right]=-\infty.$

□ ***Studytip:***

Cũng là $\infty-\infty$ nhưng khi nào là xác định, khi nào là vô định? Khi nào phải nhân chia liên hợp, khi nào thì đưa x^n ra ngoài căn rồi đặt nhân tử chung như Ví dụ 4? Để có câu trả lời mời quý độc giả hãy đọc lại phần giới hạn dãy số có chứa căn.

Ví dụ 5. Trong các giới hạn sau giới hạn nào là hữu hạn:

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right).$ **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-3x\right).$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{1+x+2x^2}\right).$ **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3x+2}\right).$

Lời giải

Cách 1: Với các kết quả đã biết phần giới hạn dãy số có chứa căn, ta thấy ngay đáp án là **D.** Thật vậy:

□ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+4x+3}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)=+\infty.$

□ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2+x+1}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-3x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-3x\right)=+\infty.$

□ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{1+x+2x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+2}\right)=-\infty$

do $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+2}\right)=1-\sqrt{2}<0.$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3x+2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+2}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-1}=\frac{-3}{2}.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT để tìm lần lượt các giới hạn.

Ví dụ 6. Giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -3 **D.** -2

Lời giải

Cách 1: Vì $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{x^2-4}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$ nên ta có dạng $\infty-\infty$.

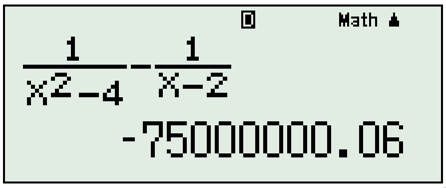
Theo phương pháp đã nêu từ đầu, ta đi quy đồng mẫu số các phân thức.

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to2^+}\left[\frac{1}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{(x-2)}\right]=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{-x-1}{(x-2)(x+2)}.$

Vì $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x-1}{(x+2)}=\dfrac{-3}{4}<0, \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0$ và $x-2>0$ với mọi $x>2$ nên theo quy tắc 2,

$\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x-1}{(x-2)(x+2)}=-\infty.$ Do đó chọn B

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=2,00000001$ ta được kết quả như hình bên. Do đó chọn đáp án B, tức là $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)=-\infty.$



Ví dụ 7. Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để giới hạn: $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{a}{x^2-6x+8}-\dfrac{b}{x^2-5x+6}\right)$ là hữu hạn:

A. $a-4b=0.$ **B.** $a-3b=0.$ **C.** $a-2b=0.$ **D.** $a-b=0.$

Lời giải

Cách 1: Ta có $\dfrac{a}{x^2-6x+8}-\dfrac{b}{x^2-5x+6}=\dfrac{a}{(x-2)(x-4)}-\dfrac{b}{(x-2)(x-3)}$

$=\dfrac{a(x-3)-b(x-4)}{(x-2)(x-3)(x-4)}=\dfrac{g(x)}{(x-2)(x-3)(x-4)}.$

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0; \lim\limits_{x\to 2^-}(x-3)=-1; \lim\limits_{x\to 2^-}(x-4)=-2; \lim\limits_{x\to 2^-}g(x)=2b-a.$

Do đó nếu $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)\neq 0 \Leftrightarrow 2b-a\neq 0$ thì giới hạn cần tìm là vô cực theo quy tắc 2.

Từ đó chọn được đáp án đúng là C.

(Thật vậy, nếu $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)=2b-a=0$ thì

$$\frac{a}{x^2-6x+8}-\frac{b}{x^2-5x+6}=\frac{bx-2b}{(x-2)(x-3)(x-4)}=\frac{b}{(x-3)(x-4)}$$

Và do đó $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{a}{x^2-6x+8}-\dfrac{b}{x^2-5x+6}\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{b}{(x-3)(x-4)}=\dfrac{b}{2}.$

Cách 2: Sử dụng MTCT. Với mỗi đáp án, lấy các giá trị cụ thể của a và b, thay vào hàm số rồi tính giới hạn.

Từ đó chọn được đáp án là **C.**

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

DẠNG 1. BÀI TẬP TÍNH GIỚI HẠN BẰNG CÁCH SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA, ĐỊNH LÍ, QUY TẮC.

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để $B>7$ với $B=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3+3x+m^2-2m\right).$

A. $m<1$ hoặc $m>3$ **B.** $m<-1$ hoặc $m>3$ **C.** $-1<m<3$ **D.** $1<m<3$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & khi\ x<1\\ \sqrt{2x-2} & khi\ x\ge 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ bằng:

A. 0 **B.** 2 **C.** $-\infty$ **D.** $+\infty$

Câu 3: Trong các hầm số sau, hàm số nào có giới hạn tại điểm $x=1$?

A. $f(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$ **B.** $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ **C.** $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ **D.** $t(x)=\dfrac{1}{x-1}$

Câu 4: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=0$ **B.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=-1$ **C.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=1$ **D.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ không tồn tại.

Câu 5: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x^3-x^2+x+1\right)$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^4+3x+1\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^2-7x^3+2\right)$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-x^5+2\right)$.

Câu 6: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-2x\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-x\right)$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+4x+3}\right)$.

Câu 7: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $+\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{6-x^2}{9+3x}$. **B.** $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{1-2x}}{5+5x}$. **C.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5-3x^3}{(x-2)^4}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3-4}{(x+1)^2}$

Câu 8: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là vô cực?

A. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2x}}$. **B.** $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x^3+2x^2}{\left(x^2-x+6\right)^2}$.

C. $\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{\dfrac{9x^2-x}{(2x-1)\left(x^4-3\right)}}$. **D.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2(2x-1)}{x^4+x+1}$.

Câu 9: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là vô cực?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{\sqrt{5x^2+x+2}+4x}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)^3+8}{x}$.

C. $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{3-x}}{x^4+x}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{4x^3-x^3+2}$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $f(x)=mx+\sqrt{9x^2-3x+1}$ có giới hạn hữu hạn khi $x\to+\infty$.

A. $m=-3$ **B.** $m\neq-3$ **C.** $m\geq0$ **D.** $m<0$

DẠNG 2. GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG $\dfrac{0}{0}$.

Câu 11: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{|3x+6|}{x+2}$

A. Bằng 3 **B.** Bằng -3 **C.** Bằng 0 **D.** không tồn tại

Câu 12: Cho a là một số thực khác 0. Kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x-a}$ bằng:

A. $3a^3$ **B.** $2a^3$ **C.** a^3 **D.** $4a^3$

Câu 13: Cho $C=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-mx+m-1}{x^2-1}, m$ là tham số thực. Tìm m để $C=2$.

A. $m=2$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=1$ **D.** $m=-1$

Câu 14: Cho a và b là các số thực khác 0. Nếu $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=6$ thì $a+b$ bằng:

A. 2 **B.** -4 **C.** -6 **D.** 8

Câu 15: Cho a và b là các số thực khác 0. Giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{ax+1}}{\sin bx}$ bằng:

A. $\dfrac{a}{2b}$ **B.** $-\dfrac{a}{2b}$ **C.** $\dfrac{2a}{b}$ **D.** $-\dfrac{2a}{b}$

Câu 16: Cho a,b,c là các số thực khác $0, 3b-2c\neq0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a,b,c để:

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}=\frac{1}{2}.$$

A. $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{10}$ **B.** $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{6}$ **C.** $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{12}$

Câu 17: Cho m và n là các số nguyên dương phân biệt. Giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^m-x^n}$ bằng:

A. $m-n$ **B.** $n-m$ **C.** $\dfrac{1}{m-n}$ **D.** $\dfrac{1}{n-m}$

Câu 18: Để tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}$, bạn Bính đã trình bày bài giải như sau:

Bước 1: Ta có:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}$.

Bước 2: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{5x-4}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5}{\sqrt{5x-4}+1}=\dfrac{5}{2}$.

Bước 3: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}=1$.

Bước 4: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\dfrac{5}{2}-1=\dfrac{3}{2}$.

Hỏi lời giải của bạn Bính đã mắc lỗi sai ở bước nào?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Câu 19: Biết $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}=\dfrac{m}{n}$ trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Tổng $2m+n$ bằng:

A. 68 **B.** 69 **C.** 70 **D.** 71

Câu 20: Biết $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)\left(x^2+3x-18\right)}=\dfrac{m}{n}$, trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Khi đó $3m+n$ bằng:

A. 55 **B.** 56 **C.** 57 **D.** 58

Câu 21: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{5x-4}}{(x-1)^2}$ bằng:

A. $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Câu 22: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^3-1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$. **C.** $\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|$. **D.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\left(x^2-x-6\right)^2}{x^3+2x^2}$.

Câu 23: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào khác 0?

A. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{\left(x^2+1\right)(3-x)}}$.

C. $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x^2+2x+1}}$. **D.** $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Câu 24: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào không tồn tại?

A. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2+11x+18}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)^3-27}{x}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$. **D.** $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x|x+2|}{x^2+3x+2}$.

Câu 25: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào không hữu hạn?

A. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x^2+x-10}{x^3-8}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$. **D.** $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}$.

DẠNG 3: GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Câu 26: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng -1?

A. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-1}{x+1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3-x^2+3}{5x^2-x^3}$. **C.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x+3}{x^2-5x}$. **D.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{3x+x^2}$.

Câu 27: Trong các giới hạn hữu hạn sau đây, giới hạn nào là lớn nhất?

A. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x+1)(3-2x-5x^3)}{x(x^3-1)}$. **B.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(2x^2+1)(2x^2+x)}{(2x^4+x)(x+1)}$.

C. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(x^2+1)(2x^2-x+4)}{x^3(3x+1)}$. **D.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(3x^2+1)(2-x^3)}{(2x^4+x)(x+1)}$.

Câu 28: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào là $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-2x^2+x-1}{3+x}$. **B.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2+x+5}{1+2x}$. **C.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1-3x^3+x^2}{5+x-2x^2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-x^4+1}{2-x-x^2}$.

Câu 20. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 21. Cho a,b,c là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a,b,c để $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{ax-b\sqrt{9x^2+2}}{cx+1}=5$.

A. $\dfrac{a-3b}{c}=5$. **B.** $\dfrac{a-3b}{c}=-5$. **C.** $\dfrac{a+3b}{c}=5$. **D.** $\dfrac{a+3b}{c}=-5$.

Câu 22. Cho a và b là các tham số thực . Biết rằng $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{4x^2+3x+1}{cx+1}-(ax+b)\right]=0, a$ và b thỏa mãn hệ thức nào trong các hệ thức dưới đây ?

A. $a+b=9$. **B.** $a+b=-9$. **C.** $a-b=9$. **D.** $a-b=-9$.

Câu 23. Trong các giới hạn sau , giới hạn nào là $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^4-x-1}{x^2+x+2}$. **B.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-5x+2}{1+2|x|}$.

C. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^5+x-11}}{2x^2+x+1}$. **D.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{1-2x}}$.

Câu 24. Tìm giới hạn nhỏ nhất trong các giới hạn hữu hạn sau.

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}$.

B. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{2x-x^2}{8x^2-x+3}}$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2-x+2}$.

D. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}}$.

Câu 25. Trong các giới hạn hữu hạn sau , giới hạn nào là lớn nhất?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{(2x-5)(1-x)^2}{3x^3-x+1}}$.

B. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^4+x^2+2}{(x^3+1)(3x-1)}}$.

D. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-2|x|}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

Câu 26. Trong các giới hạn hữu hạn sau , giới hạn nào là nhỏ nhất?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}+2x}{3-4|x|}$.

B. $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{x}{x^3-1}}$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$.

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{3x^4+4x^5+2}{9x^5+5x^4+4}}$.

DẠNG 4: Giới hạn vô định dạng $0.\infty$

Câu 27. Cho a là một số thực dương. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}$.

A. bằng $-\dfrac{1}{a^2}$. **B.** là $+\infty$. **C.** là $-\infty$. **D.** không tồn tại.

Câu 28. Trong các giới hạn sau , giới hạn nào là hữu hạn ?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{x^3}{2x^4+x^2+1}}$.

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{3x}{x^2-1}}$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3+x}}$.

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)\sqrt{\dfrac{x}{2x^4+x+1}}$.

Câu 29. Trong các giới hạn hữu hạn sau , giới hạn nào là nhỏ nhất?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{2x+1}{x^3+x+2}}$.

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{3x-11}{x^3+1}}$.

C. $\lim\limits_{x\to1^+}(x^3-1)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$.

D. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-3x)\sqrt{\dfrac{x+1}{5x^3+2x+1}}$.

Câu 30. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x}}\right)$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$

Câu 31. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

A. 2. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$

DẠNG 5: Dạng vô định $\infty-\infty$

Câu 32. Cho n là một số nguyên dương. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right)$.

A. $\frac{n}{2}$. **B.** $\frac{n-1}{2}$. **C.** $\frac{n+1}{2}$. **D.** $\frac{n+2}{2}$

Câu 33. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1} & khi\, x>1\\ mx+2 & khi\, x\le 1\end{cases}$. Với giá trị nào của m thì hàm số $f(x)$ có giới hạn tại điểm $x=1$

A. 2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực k sao cho giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{k}{x^2-1}\right)$ là hữu hạn.

A. $k=2$. **B.** $k\ne 2$. **C.** $k<2$. **D.** $k>2$.

Câu 35. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào là -1?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$.

Câu 36. Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+5}+\text{ax})=+\infty$ nếu.

A. $a\ge 1$. **B.** $a\le 1$. **C.** $a>1$. **D.** $a<1$.

Câu 37. Cho a và b là các số thực khác 0. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax-\sqrt{x^2+bx+2})=3$, thì tổng $a+b$ bằng

A. 2. **B.** -6. **C.** 7. **D.** -5.

Câu 38. Cho a và b là các số thực khác 0. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}(\text{ax+b-}\sqrt{x^2-6x+2})=5$ số lớn hơn trong hai số a và b là số nào trong các số dưới đây?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 39. Trong các giới hạn dưới đây, giới hạn nào là vô cực?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+3})$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}+2x)$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+3x+1}+5x)$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+5x})$.

Câu 40. Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+2x}+\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5})=-\frac{m}{n}$ trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Tìm bội số chung nhỏ nhất của m và n.

A. 135 . **B.** 136 . **C.** 138 . **D.** 140 .

Câu 41. Cho a và b là các số nguyên dương. Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+\text{ax}}+\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5})=\frac{7}{27}$, hỏi a và b thỏa mãn hệ thức nào dưới đây?

A. $a+2b=33$. **B.** $a+2b=34$. **C.** $a+2b=35$. **D.** $a+2b=36$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

DẠNG 1: Bài tập tính giới hạn bằng cách sử dụng định nghĩa, định lý, qui tắc.

Câu 1. Đáp án B.

Cách 1: Ta có $B=\lim\limits_{x\to-1}\left(x^2+3x+m^2-2m\right)=m^2-2m+4$.

Do đó $B>7 \Leftrightarrow m^2-2m+4>7 \Leftrightarrow m<-1$ hay $m>3$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính B khi $m=4$ và $m=0$.

Khi $m=4$ thì $B=12>7$, do đó chỉ xét A và B.

Khi $m=0$ thì $B=4<7$, do đó A sai vậy B đúng.

Câu 2. Đáp án D.

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{x^2+1}{1-x}$.

Vì $\lim\limits_{x\to-1^-}\left(x^2+1\right)=2;\ \lim\limits_{x\to-1^-}(1-x)=0$ và $1-x>0;\forall x<1$

nên theo quy tắc 2: $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{x^2+1}{1-x}=+\infty$.

Cách 2: Ta có $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{x^2+1}{1-x}$.

Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=0{,}99999999$ ta được kết quả 199999998.

Vậy chọn D.

Câu 3. Đáp án A.

Vì $\lim\limits_{x\to1}|x-1|=0$, $|x-1|>0,\forall x\neq1$ nên $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{|x-1|}=+\infty$.

Giải thích thêm:

+ Hàm số $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ xác định trên khoảng $(1;+\infty)$ nên không tồn tại giới hạn bên trái tại $x=1$, do đó không tồn tại giới hạn tại $x=1$.

+ Hàm số $h(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ xác định trên khoảng $(-\infty;1)$ nên không tồn tại giới hạn bên phải tại $x=1$, do đó không tồn tại giới hạn tại $x=1$.

+ Vì $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$, $x-1>0,\forall x>1$, $x-1<0,\forall x<1$

nên $\lim\limits_{x\to 1^-} t(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} t(x)=\lim\limits_{x\to 1^{+-}}\frac{1}{x-1}=+\infty$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^-} t(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+} t(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} t(x)$.

Câu 4. Đáp án D.

Xét dãy số (x_n) với $x_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$. Ta có $x_n\to 0$ và $\lim\cos\frac{1}{x_n}=\lim\cos[(2n+1)\pi]=-1$ (1).

Lại xét dãy số (y_n) với $x_n=\frac{1}{2n\pi}$. Ta có $y_n\to 0$ và $\lim\cos\frac{1}{y_n}=\lim\cos(2n\pi)=1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ không tồn tại.

Câu 5. Đáp án C.

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x^3-x^2+x+1)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^4+3x+1)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}(4x^2-7x^3+2)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-x^5+2)=+\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn bằng $-\infty$.

Câu 6. Đáp án D.

Cách 1: Ta có

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-2x\right)=+\infty$

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}-1\right)=+\infty$

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+4x+3}\right)=-\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn bằng $-\infty$.

Câu 7. Đáp án C.

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to-3^+}(6-x^2)=-3<0$; $\lim\limits_{x\to-3^+}(9+3x)=0$ và $9+3x>0,\forall x>-3$.

Vậy theo quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to-3^+}\frac{6-x^2}{9+3x}=-\infty$.

Tương tự: $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{\sqrt{1-2x}}{5+5x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-2}\frac{5-3x^3}{(x+2)^2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^3-4}{(x+1)^2}=-\infty$.

Do đó đáp án đúng là C (Thật ra ta chỉ cần tính đến C là chọn được đáp án đúng).

Cách 2: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn bằng $+\infty$.

Câu 8. Đáp án B.

Cách 1: Các hàm số trong A, C, D đều xác định tại các điểm điểm tính giới hạn. Do đó đáp án là B.

Thật vậy, ta tính được bằng MTCT: $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+2x^2}{(x^2-x-6)^2}=+\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn vô cực.

Câu 9. Đáp án C

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^-}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{3-x})=\sqrt{2}-2<0$;

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x^4+x)=0$; $(x^4+x)=x(x^3+1)>0, \forall x<-1$.

Vậy $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{3-x}}{x^4+x}=-\infty$

Bổ sung:

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{5x^2+x+2}+4x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x(-\sqrt{5+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+4)=-\infty$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{\sqrt{5x^2+x+2}+4x}=0$.

+ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-2)^3+8}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8+8}{x}=\lim\limits_{x\to0}(x^2-6x+12)=12$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^3-x^2+2)=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{4x^3-x^2+2}=0$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn vô cực.

Câu 10. Đáp án A

Cách 1: Sử dụng MTCT tính toán khi $m=-3$ ta được kết quả

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x+\sqrt{9x^2-3x+1})=-\dfrac{1}{2}$. Vậy ta chỉ xét các đáp án **A** và **D**.

Lại sử dụng MTCT tính toán khi $m=-1$ ta được kết quả $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+\sqrt{9x^2-3x+1})=+\infty$.

Vậy loại đáp án **D**. Do đó đáp án đúng là **A**.

Cách 2: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+\sqrt{9x^2-3x+1})$.

+ Nếu $m\ge0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+\sqrt{9x^2-3x+1})=+\infty$.

+ Nếu $m<0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx+\sqrt{9x^2-3x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(m+\sqrt{9-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)$.

Ta thấy nếu $m\ne-3$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(m+\sqrt{9-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)\ne0$ và do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+\sqrt{9x^2-3x+1})=\infty$.

Ngược lại nếu $m=-3$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x+\sqrt{9x^2-3x+1})=-\dfrac{1}{2}$. Vậy đáp án đúng là **A**.

DẠNG 2: Giới hạn vô định dạng $\dfrac{0}{0}$.

Câu 11. Đáp án D.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{|3x+6|}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{3(x+2)}{x+2}=3$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{|3x+6|}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{-3(x+2)}{x+2}=-3$.

Vậy $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{|3x+6|}{x+2}\neq\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{|3x+6|}{x+2}$ nên $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{|3x+6|}{x+2}$ không tồn tại.

Câu 12. Đáp án D.

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x^3+x^2a+xa^2+a^3)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(x^3+xa^2+x^2a+a^3)=4a^3$.

Cách 2: Cho a một giá trị cụ thể rồi tính giới hạn bằng máy tính cầm tay. Chẳng han với $a=2$ ta có $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-2^4}{x-2}=32=4.2^3$. Do đó chọn đáp án **D.**

Câu 13. Đáp án B.

Cách 1: $C=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-mx+m-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-m+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-m+1}{x+1}=\dfrac{2-m}{2}$

Vậy $C=2\Leftrightarrow m=-2$.

Cách 2: Thay lần lượt các giá trị của m vào, rồi tìm C cho đến khi gặp kết quả $C=2$ thì dừng lại.

Câu 14. Đáp án C

Đặt $g(x)=x^2+ax+b$. Rõ ràng là nếu $g(2)\neq0$ thì $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)}{x-2}$ không thể hữu hạn. Do đó điều kiện đầu tiên là $g(2)=0\Leftrightarrow 2a+b=-4$.

Khi đó $g(x)=(x-2)(x-\frac{b}{2})$ và $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x-\frac{b}{2})=2-\dfrac{b}{2}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)}{x-2}=6\Rightarrow 2-\dfrac{b}{2}=6\Rightarrow b=-8\Rightarrow a=2\Rightarrow a+b=-6.$

Câu 15. Đáp án B.

Cách 1: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{ax+1}}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1-\sqrt{ax+1}}{x}.\dfrac{bx}{\sin bx}.\dfrac{1}{b})$.

Mà $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{ax+1}}{\sin bx}=\dfrac{-a}{2}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{bx}{\sin bx}=1$ **nên** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{ax+b}}{\sin bx}=\dfrac{-a}{2b}$;

Cách 2: Cho a và b các giá trị cụ thể, thay vào rồi tính giới han. Chẳng hạn với $a=b=1$, sử dụng MTCT ta tính được $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{\sin x}=\dfrac{1}{2}$. Từ đó chọn đáp án đúng là B.

Câu 16. Đáp án D.

Cách 1: $\dfrac{\tan ax}{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}=a.\dfrac{\tan ax}{ax}.\dfrac{x}{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}$

Lại có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{ax}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin ax}{ax}.\dfrac{1}{\cos ax}\right)=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{1+bx}-1}{x}-\dfrac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x}\right)=\dfrac{b}{2}-\dfrac{c}{3}=\dfrac{3b-2c}{6}$

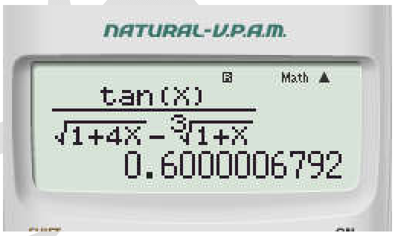
Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}=\dfrac{6a}{3b-2c}$.

Do đó hệ thức liên hệ giữa a,b,c là $\dfrac{6a}{3b-2c}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{12}$

Cách 2: Sử dụng MTCT. Với mỗi đáp án, chọn các giá trị cụ thể của a,b,c thỏa mãn hệ thức rồi thay vào để tính giới hạn. Nếu giới hạn tìm được bằng $\dfrac{1}{2}$ thì đó là đáp án đúng.

Chẳng hạn, với đáp án A, chọn $a=1;b=4;c=1$, sử dụng MTCT tính được

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+x}}=\dfrac{3}{5}$.



Vậy A không phải là đáp án đúng.

Tương tự vậy B và C cũng không phải là đáp án đúng. Vậy đáp án đúng là D.

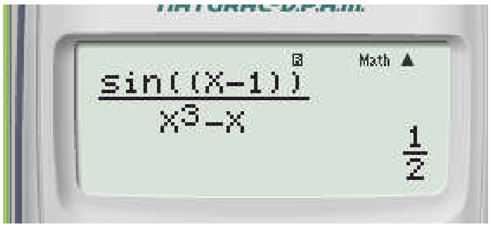
Câu 17. Đáp án C.

Cách 1: Ta có $\dfrac{\sin(x-1)}{x^m-x^n}=\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=\dfrac{x-1}{x^m-x^n}$

Mà $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-x^n}{x-1}=m-n$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=1$ nên $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^m-x^n}=\dfrac{1}{m-n}$

Cách 2: Cho m và n các giá trị cụ thể, thay vào rồi sử dụng MTCT tính giới hạn.

Chẳng hạn với $m=3;n=1$ ta tính được $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^3-x}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{m-n}$.



Vậy đáp án đúng là C

Câu 18. Đáp án A.

Vì ta chưa thể biết được các giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1};\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-4}-1}{x-1}$ có hữu hạn hay không nên chưa thể viết được: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}-\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-4}-1}{x-1}$

Do đó lời giải đã mắc lỗi sai ngay ở bước đầu tiên.

Ta sửa lại như sau:

Bước 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}-\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}\right)$

Câu 19. Đáp án A.

Ta có $\frac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}=\frac{\sqrt[3]{8x+11}-3}{x^2-3x+2}-\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-3x+2}$

$$=\frac{x-2}{(x-2)(x-1)(\sqrt[3]{(8x+11)^2}+3\sqrt[3]{8+11}+9)}-\frac{x-2}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+7}+3)}$$

$$=\frac{8}{(x-1)(\sqrt[3]{(8x+11)^2}+3\sqrt[3]{8+11}+9)}-\frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+7}+3)}$$

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\frac{8}{(x-1)(\sqrt[3]{(8x+11)^2}+3\sqrt[3]{8+11}+9)}=\frac{8}{27};\ \lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+7}+3)}=\frac{1}{6}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}=\frac{8}{27}-\frac{1}{6}=\frac{7}{54}$

Vậy $m=7;n=54$ và $2m+n=68$.

Câu 20. Đáp án C.

Ta có $\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x\text{-}54}}{(x-3)(x^2+3x\text{-}18)}=\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x\text{-}54}}{(x-3)^2(x+6)}$

Sử dụng MTCT ta tính được:

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x\text{-}54}}{(x-3)^2}=\frac{1}{6};\ \lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x+6}=\frac{1}{9}$

nên $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x\text{-}54}}{(x-3)(x^2+3x\text{-}18)}=\frac{1}{54}$. Vậy $3m+n=57$.

Giải tự luận: Đặt $t=x-3$ thì $\lim\limits_{x\to 3}t=0$ và

$$\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27\text{x-}54}}{(x-3)^2}=\frac{\sqrt{6t+9}-\sqrt[3]{27\text{t+}27}}{t^2}=\frac{\sqrt{6t+9}-(t+3)}{t^2}+\frac{(t+3)-\sqrt[3]{27t+27}}{t^2}$$

$$=\frac{-t^2}{t^2\left(\sqrt{6t+9}+t+3\right)}+\frac{t^3+9t^2}{t^2\left[\left(t+3\right)^2+\left(t+3\right)\sqrt[3]{27t+27}+\sqrt[3]{(27t+27)^2}\right]}$$

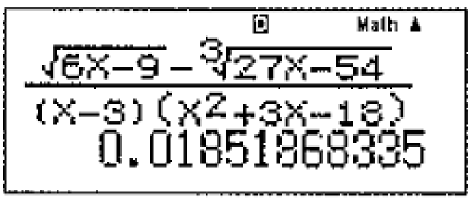
$$=\frac{-1}{\left(\sqrt{6t+9}+t+3\right)}+\frac{t+9}{\left(t+3\right)^2+\left(t+3\right)\sqrt[3]{27t+27}+\sqrt[3]{(27t+27)^2}}$$

Ta có $\lim\limits_{t\to0}\frac{-1}{\left(\sqrt{6t+9}+t+3\right)}=-\frac{1}{6};\lim\limits_{t\to0}\frac{t+9}{\left(t+3\right)^2+\left(t+3\right)\sqrt[3]{27t+27}+\sqrt[3]{(27t+27)^2}}=\frac{1}{3}$

Vậy $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{\left(x-3\right)^2}=\frac{-1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{x+6}=\frac{1}{9}$ nên $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{\left(x-3\right)^2\left(x^2+3x-18\right)}=\frac{1}{54}$.

Lưu ý: Nếu sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=3,00000001$ và tại $x=2,99999999$ ta đều thu được kết quả bằng 0 hoặc máy báo lỗi (tùy theo loại máy). Điều này là do vượt quá khả năng tính toán của máy. Ta thay đổi tính giá trị của hàm số tại $x=2,99999$ thì ta được kết quả như sau



Kết quả hiển thị trên máy như vậy rất khó để ta tìm ra giới hạn chính xác của hàm số. Tuy nhiên nếu phân tích kĩ một chút rồi biến đổi như trong lời giải trên thì ta vẫn có thể tìm ra đáp án đúng chỉ bằng MTCT.

Câu 1: Đáp án A

Bài tập này có dạng tương tự như bài tập trên. Bằng MTCT, không khó để tìm ra đáp án đúng là **A.** Tuy nhiên nếu giải tự luận thì có một số vấn đề cần bàn. Đặt $t=x-1$ thì $x=t+1$, $\lim\limits_{x\to1^+}=0$ và

$$\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{5x-4}}{(x-1)^2}=\frac{\sqrt{3t+1}-\sqrt[3]{5t+1}}{t^2}=\frac{\sqrt{3t+1}-1}{t^2}+\frac{1-\sqrt[3]{5t+1}}{t^2}$$

$$=\frac{3t}{t^2\left(\sqrt{3t+1}+1\right)}+\frac{5t}{t^2\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{(5t+1)^2}\right)}$$

$$=\frac{3\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{(5t+1)^2}\right)-5\left(\sqrt{3t+1}+1\right)}{t\left(\sqrt{3t+1}+1\right)\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{(5t+1)^2}\right)}$$

Ta có $\lim\limits_{t\to 0^+}=\dfrac{3\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{(5t+1)^2}\right)-5\left(\sqrt{3t+1}+1\right)}{t\left(\sqrt{3t+1}+1\right)\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{(5t+1)^2}\right)}=-\infty$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt[2]{5x-4}}{(x-1)^2}=-\infty.$

Ta thấy sau khi đổi biến cho gọn, ta thêm bớt tử với hàng số 1 rồi tách ra thành hai phân thức và nhân chia liên hợp mà không thêm bớt đa thức. Vậy khi nào thì thêm bớt hằng số, khi nào thì thêm bớt với đa thức? Quý độc giả hãy nghiên cứu kĩ hai bài tập trên và tự rút ra nhận xét.

Câu 2: Đáp án D

Ta có $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\left(x^2-x-6\right)^2}{x^3+2x^2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-3)^2(x+2)^2}{x^2(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-3)^2(x+2)}{x^2}=0.$

Câu 3: Đáp án C

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+1}}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+3x+2}{\sqrt{(x+1)^2}}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+3x+2}{|x+1|}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to(-1)^-}(x+2)=-1\neq 0.$$

Câu 4: Đáp án C

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x\sqrt{3+x^2}}{2x}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\sqrt{3+x^2}}{2x}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$ nên $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$ không tồn tại.

Câu 5: Đáp án B

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-3)^2}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x-1}{x-3}=+\infty.$$

Dạng 3: Giới hạn vô định dạng $\frac{\infty}{\infty}$

Câu 6: Đáp án B

$+\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x+1}=-\infty$; $+\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2+3}{5x^2-x^3}=-1$;

$+\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{x^2-5x}=0$; $+\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-1}{3x+x^2}=2$;

Câu 7: Đáp án C

$+\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)(3-2x-5x^3)}{x(x^3-1)}=-5$. $+\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x^2+1)(2x^2+x)}{(2x^4+x)(x+1)}=0$.

$+\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+1)(2x^2-x+4)}{x^3(3x+1)}=\frac{2}{3}$. $+\lim_{x\to-\infty}\frac{(3x^2+1)(2-x^3)}{(2x^4+x)(x+1)}=-\frac{3}{2}$.

Câu 8: Đáp án B

$+\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2+x-1}{3+x}=+\infty$. $+\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+x+1}{1+2x}=-\infty$.

$+\lim_{x\to+\infty}\frac{1-3x^3+x^2}{5+x-2x^2}=+\infty$. $+\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x^4+1}{2-x-x^2}=+\infty$.

Câu 9: Đáp án C

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+3x}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+3}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{2}{x}}=\frac{-1+3}{-2-1}=-\frac{2}{3}$$

Câu 10: Đáp án C

Ta có $\lim_{x\to-\infty}\frac{ax-b\sqrt{9x^2+2}}{cx+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+bx\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{cx+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a+b\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{c+\frac{1}{x}}=\frac{a+3b}{c}$.

Do đó $\lim_{x\to-\infty}\frac{ax-b\sqrt{9x^2+2}}{cx+1}=5\Leftrightarrow\frac{a+3b}{c}=5$.

Câu 11: Đáp án A

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x^2+3x+1}{x+2}-(ax+b)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[(4x+5)+\frac{11}{x+2}-(ax+b)\right].$$

Do đó $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x^2+3x+1}{x+2}-(ax+b)\right]=0\Rightarrow a=4;b=-5\Rightarrow a-b=9.$

Câu 12: Đáp án D

$+\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4-x-1}{x^2+x+2}=+\infty.$ $+\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+2}{1+2|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+2}{1-2x}=+\infty$.

$+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^5+x-11}}{x^2+x+2}=+\infty.$ $+\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{1-2x}}=-\infty.$

Câu 13: Đáp án D

$+\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3\sqrt{1+\frac{2}{x^6}}}{3x^3-1}=-\frac{1}{3}.$ **Ta có**

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{2x-x^2}{8x^2-x+3}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-x^2}{8x^2-x+3}}=\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}.$

$+\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x^2-x+2}=0.$

$+\lim_{x\to+\infty}\frac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2|x|+3}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}}=2.$

Câu 14: Đáp án B

$+\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{(2x-5)(1-x)^2}{3x^3-x+1}}=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$

$+\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-1)|x|\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{x-5x^2}=\frac{2}{5}.$

$+\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2|x|}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2|x|}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}=1.$

Câu 15: Đáp án A

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}+2x}{3-4|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+2x}{3+4|x|}=\dfrac{1}{4}.$

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{x}{x^3-1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{(1-2x)^2x}{x^3-1}}=2$ **(do** $1-2x>0,\forall x<\dfrac{1}{2}$ **).**

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{3x^4+4x^5+2}{9x^5+5x^4+4}}=\dfrac{2}{3}.$

Dạng 4: Giới hạn vô định dạng $0.\infty$.

Câu 16: Đáp án D

Cách 1: Ta có $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}=\dfrac{a-x}{ax}.\dfrac{1}{(x-a)^2}=\dfrac{-1}{ax(x-a)}.$

Do đó $\lim\limits_{x\to a^-}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{-1}{ax(x-a)}=+\infty;$

$\lim\limits_{x\to a^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{-1}{ax(x-a)}=-\infty;$

Vậy $\lim\limits_{x\to a^-}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}\neq\lim\limits_{x\to a^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}$ nên $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}$ không tồn tại.

Cách 2: Cho a một giá trị cụ thể, chẳng hạn $a=1$, thay vào hàm số rồi sử dụng MTCT để tính giới hạn. Từ đó ta tìm được đáp án đúng là **D.**

Câu 17: Đáp án C

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{x^3}{2x^4+x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^3(x+1)^2}{2x^4+x^2+1}}=+\infty.$

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{3x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{3x(x+1)^2}{x^2-1}}=+\infty.$

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{(x+2)^2(x-1)}{x^3+x}}=1.$

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)\sqrt{\dfrac{x}{2x^4+x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x(x^2+1)^2}{2x^4+x^2+1}}=+\infty.$

Câu 18: Đáp án B

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{2x+1}{x^3+x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{(2x+1)(x+1)^2}{x^3+x+2}}=-\sqrt{2}.$

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{3x-11}{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{(3x-11)(1-2x)^2}{x^2+1}}=-2\sqrt{3}.$

+

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-1)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1)(x-1)\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1)\sqrt{(x-1)}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}=0.$

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-3x)\sqrt{\dfrac{x+1}{5x^3+2x+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{(x+1)(2-3x)}{5x^3+2x+1}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}.$

Câu 19: Đáp án A

Cách 1: Sử dụng MTCT.

Cách 2: Đặt $t=\dfrac{1}{x}$ thì $x=\dfrac{1}{t}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}t=0$ và

$$x^2\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}-\sqrt{\frac{x+3}{x}}\right)=\frac{\sqrt{1+2t}-\sqrt[3]{1+3t}}{t^2}=\frac{\sqrt{1+2t}-(t+1)}{t^2}+\frac{(t+1)-\sqrt[3]{1+3t}}{t^2}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1+2t}+(t+1)}+\frac{t+3}{(t+1)^2+(t+1)\sqrt[3]{1+3t}+\sqrt[3]{(1+3t)^2}}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}-\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}\right)=\lim\limits_{t\to0}\left[\dfrac{-1}{\sqrt{1+2t}+(t+1)}+\dfrac{t+3}{(t+1)^2+(t+1)\sqrt[3]{1+3t}+\sqrt[3]{(1+3t)^2}}\right]$

Câu 20: Đáp án C

Cách 1: Sử dụng MTCT.

Cách 2: Đặt $t=\dfrac{\pi}{4}-x$ thì $x=\dfrac{\pi}{4}-t$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}t=0$ **và**

$$\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\tan 2\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\tan t=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)\tan t$$

$$=\cot 2t\tan t=\frac{\cos 2t}{\sin 2t}.\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{2t}{\sin 2t}.\frac{\sin t}{t}.\frac{\cos 2t}{2\cos t}.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{2t}{\sin 2t}.\dfrac{\sin t}{t}.\dfrac{\cos 2t}{2\cos t}=\dfrac{1}{2}.$

Dạng 5: Dạng vô định $\infty-\infty$.

Câu 21: Đáp án B

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giới hạn với một giá trị cụ thể của n rooif so sánh với đáp án. Chẳng hạn $n=3$ ta có $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)=1.$

Cách 2: $\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}=\frac{n-\left(1+x+x^2+...+x^{n-1}\right)}{1-x^n}=\frac{1-x+1-x^2+...+1-x^{n-1}}{1-x^n}$

$=\frac{1+\left(1+x\right)+\left(1+x+x^2\right)+....+1+x+x^2+...+x^{n-2}}{1+x+x^2+...+x^{n-1}}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right)=\frac{n-1}{2}.$

Lưu ý: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right)=\frac{n-1}{2}.$

Câu 22: Đáp án B

Theo câu 41, ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{3}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}\right)=1.$

Lại có $\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(mx+2\right)=m+2.$ Để $f\left(x\right)$ có giới hạn tại điểm $x=1$ thì $\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)\Leftrightarrow m+2=1\Leftrightarrow m=-1.$

Câu 23: Đáp án A

Ta có $\frac{1}{x-1}-\frac{k}{x^2-1}=\frac{x+1-k}{x^2-1}.$ Mà $\lim\limits_{x\to 1}\left(x+1-k\right)=2-k;\ \lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-1\right)=0$ nên để $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{k}{x^2-1}\right)$ là hữu hạn thì điều kiện cần là $2-k=0\Leftrightarrow k=2.$

Thật vậy, khi $k=2,\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}.$ Nên $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{k}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$

Lưu ý: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{k}{x^n-1}\right)$ hữu hạn $\Leftrightarrow k=n.$

Câu 24: Đáp án B

Cách 1: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn. Đến ý B ta được giới hạn bằng -1. Vậy đáp án đúng là **B.**

Cách 2: Ta thấy ngay A và C là các giới hạn vô cực, B và D là dạng vô định $\infty-\infty$. Ta xét giới hạn ở ý **B.**

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\dfrac{2x}{-x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}-1}=-1.$ Vậy đáp án là **B.**

Bổ sung:

$+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=+\infty$ $+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)=+\infty$

$+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}=1.$

Câu 25: Đáp án D

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giới hạn khi $a=1$ va` $a=0$, ta được

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+5}+x\right)=\dfrac{3}{2};\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x+5}=+\infty.$ Từ đó suy ra đáp án đúng là **D**

Cách 2: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+5}+ax\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(a-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}\right).$

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty$ nên để $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+5}+ax\right)=+\infty$ thì $a-1<0\Leftrightarrow a<1.$

Câu 26: Đáp án D

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(a-\sqrt{1+\dfrac{b}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\right).$

Do đó nếu $a\neq1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=\infty.$ Vậy $a=1.$ Khi đó

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-bx-2}{x+\sqrt{x^2+bx+2}}=-\dfrac{b}{2}.$

Vậy: $-\dfrac{b}{2}=3\Leftrightarrow b=-6.$ Do đó $a+b=-5.$

Câu 27: Đáp án C

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax+b-\sqrt{x^2-6x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(a-\sqrt{1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\right)+b.$

Do đó nếu $a\neq1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax+b-\sqrt{x^2-6x+2}\right)=\infty.$ Vậy $a=1.$ Khi đó ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+b-\sqrt{x^2-6x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x-2}{x+\sqrt{x^2-6x+2}}+b=\dfrac{6}{2}+b=b+3.$

Vậy: $-b+3=5\Leftrightarrow b=2.$ DO đó số lớn hơn trong hai số a và b là số 2. Chọn đáp án **C.**

Câu 28: Đáp án C

Cả bốn giới hạn đều có dạng $\infty-\infty$, tuy nhiên chỉ có giới hạn ở ý C, hệ số trong hai số hạng là khác nhau.Theo kết quả đã biết thì giới hạn ở ý C chắc chắn là $-\infty$. Do đó đáp án đúng là C, Thật vậy:

$$+\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+3}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2+3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3}{-x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2+\frac{3}{x}}\right)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

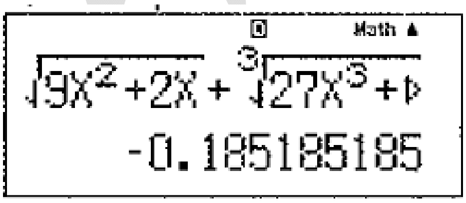
$$+\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+1}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)}=-\frac{1}{4}.$$

$$+\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x+1}+5x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{9+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+5\right)=-\infty.$$

$$+\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+5x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-5x}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3x^2+5x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-5x}{-x\left(\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3+\frac{5}{x}}\right)}=\frac{5}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

Câu 29: Đáp án A

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả



Áp dụng kĩ thuật tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn ta có

$0,(185)=\frac{5}{27}$. Vậy $\frac{m}{n}=\frac{5}{27}$.

Từ đó chọn đáp án đúng là **A.**

Cách 2: $\sqrt{9x^2+2x}+\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5}=\left(\sqrt{9x^2+2x}+3x\right)+\left(\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5}-3x\right)$

$$=\frac{2x}{\sqrt{9x^2+2x}-3x}-\frac{4x^2+5}{\sqrt[3]{\left(27x^3+4x^2+5\right)^2}+3x\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5}+9x^2}.$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+2x}+\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5}\right)=\frac{2}{-6}+\frac{4}{9+9+9}=-\frac{5}{27}$.

Từ đó chọn đáp án đúng là **A.**

Câu 30: Đáp án B

Làm tương tự như câu 49, ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}\right)=\frac{-a}{6}+\frac{b}{27}=\frac{2b-9a}{54}$.

Do đó $2b-9a=14$. Suy ra a là số chẵn. Vậy $a+2b$ là số chẵn. Từ đó loại được đáp án A và C.

Giải hệ $\begin{cases} a+2b=34 \\ 2b-9a=14 \end{cases}$ được $a=2; b=16$.

Giải hệ $\begin{cases} a+2b=36 \\ 2b-9a=14 \end{cases}$ được $a=\frac{11}{5}$ (loại).

Vậy B là đáp án đúng.

HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng (a,b) và $x_0\in(a;b)$. Hàm số $y=f(x)$ được gọi là *liên tục* tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

STUDY TIP

Khi xét tính liên tục của hàm số tại một điểm, đặc biệt lưu ý đến điều kiện hàm số xác định trên một khoảng (dù nhỏ) chứa điểm đó.

Định nghĩa 2

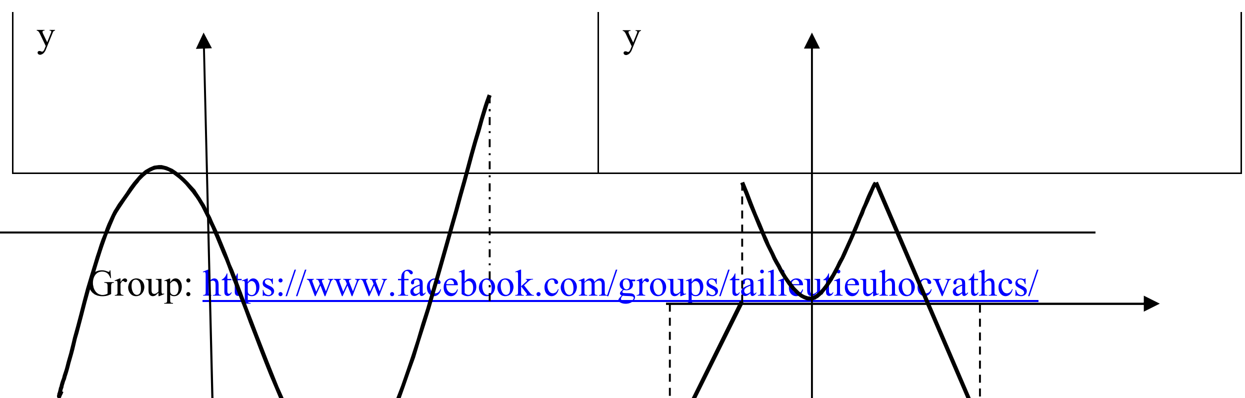
Hàm số $y=f(x)$ được gọi là ***liên tục trên một khoảng*** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

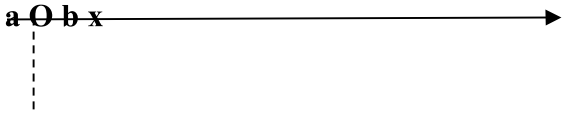
Hàm số $y=f(x)$ được gọi là ***liên tục trên một đoạn*** $[a,b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$; $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

Khái niệm liên tục của hàm số trên nửa khoảng như $[a;b),(a;b],[a;+\infty),(-\infty;b]$ được định nghĩa một cách tương tự.

STUDY TIP

Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó



 a O b x	a O b x
Đồ thị của hàm số liên tục trên khoảng $(a;b)$.	Đồ thị của hàm số không liên tục trên khoảng $(a;b)$.

Định lý 2

Giả sử $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_o. Khi đó:

a) Các hàm số $y=f(x)+g(x), y=f(x)-g(x), y=f(x).g(x)$ liên tục tại điểm x_o.

b) Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm x_o nếu $g(x)\neq 0$.

STUDY TIP

Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó (trong trường hợp thương, giá trị của mẫu tại điểm đó phải khác 0).

2. **Một số định lí cơ bản**

Định lí 1

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.
b) Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức), các hàm số lượng giác, hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

(Các hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit sẽ được học trong chương trình lớp 12)

STUDY TIP

Các hàm số sơ cấp liên tục trên từng khoảng xác định của chúng

Định lí 3

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

Nói cách khác:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a;b)$.

STUDY TIP

Một phương pháp chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(a;b)$:

- Chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.
- Chứng minh $f(a).f(b) < 0$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM SỐ LIÊN TỤC

DẠNG 1. XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

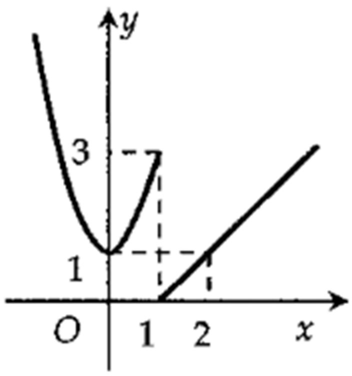
Phương pháp chung:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 ta làm như sau:

- Tính $f(x_0)$;
- Tính $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ thì kết luận hàm số liên tục tại x_0.
- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại hoặc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì kết luận hàm số không liên tục tại x_0.

Khi xét tính liên tục của hàm số trên một tập, ta sử dụng Định lí 1, Định lí 2 đã nêu trong phần Lí thuyết.

Câu 48: Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị dưới đây gián đoạn tại điểm có hoành độ bằng bao nhiêu?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Đáp án B.

Lời giải

Quan sát đồ thị ta thấy $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3; \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$. Vậy $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ nên $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ không tồn tại. Do đó hàm số gián đoạn tại điểm $x = 1$.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-3;2)$. **D.** $(-3;+\infty)$.

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số có dạng phân thức hữu tỉ xác định trên tập hợp $D=(-\infty;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;+\infty)$ nên theo Định lí 1, hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;-3);(-3;-2);(-2;+\infty)$. Vì $(2;3)\subset(-2;+\infty)$ nên đáp án đúng là **B.**

STUDY TIP

Các hàm số sơ cấp liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

D. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(1;2)$ và $(2;+\infty)$.

Đáp án D.

Lời giải

$f(x)$ là hàm phân thức hữu tỉ, có tập xác định là $(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$ nên theo Định lí 1, $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(1;2)$ và $(2;+\infty)$.

STUDY TIP

Thật ra rút gọn ta được $f(x)=\dfrac{x-2}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{x-1}$ nhưng không vì thế mà kết luận $f(x)$ trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Chú ý: Không được rút gọn biểu thức của hàm số trước khi tìm tập xác định!

Câu 51: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-5} & \text{khi } x>5\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau?

A. $f(x)$ liên tục tại $x=7$. **B.** $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

C. $f(x)$ liên tục trên $[5;+\infty)$. **D.** $f(x)$ liên tục trên $(5;+\infty)$.

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ xác định trên $D=[5;+\infty)\cup\{0\}$. Theo định lí 1, $f(x)$ liên tục trên $[5;+\infty)$. Do đó $f(x)$ liên tục trên $(5;+\infty)$ và tại $x=7$. Vậy A, C, D đúng suy ra B sai .

Thật vậy, vì không tồn tại khoảng $(a;b)$ nào chứa điểm $x=0$ mà $f(x)$ xác định trên $(a;b)$ nên không thể xét tính liên tục của $f(x)$ tại $x=0$. Do đó không thể khẳng định $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Câu 52: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x+2 \text{ khi } x<-1\\ x^2-1 \text{ khi } x\ge -1\end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;-1]$.

C. $f(x)$ liên tục trên $[-1;+\infty)$.

D. $f(x)$ liên tục tại $x=-1$.

Đáp án C.

Lời giải

Trên $[-1;+\infty)$, $f(x)=x^2-1$ nên theo định lí 1, $f(x)$ liên tục trên $[-1;+\infty)$. Vậy chọn đáp án đúng là C.

Giải thích thêm:

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(3x+2)=-1$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(x^2-1\right)=0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\ne\lim\limits_{x\to(-1)^+}$ nên $\lim\limits_{x\to(-1)}$ không tồn tại.

Do đó $f(x)$ không liên tục tại $x=-1$ nên A, D sai.

Mặt khác $f(-1)=(-1)^2-1=0$. Vậy $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\ne f(-1)$ nên $f(x)$ không liên tục trên $(-\infty;-1]$. Do đó B sai.

Câu 53: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} \text{ khi } x\ne 2\\ mx+1 \text{ khi x=2}\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=2$.

A. $m=\dfrac{17}{2}$.

B. $m=\dfrac{15}{2}$.

C. $m=\dfrac{13}{2}$.

D. $m=\dfrac{11}{2}$.

Đáp án D.

Lời giải

$f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(2)=2m+1$ và $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+2x+4\right)=12$.

(có thể dùng MTCT để tính giới hạn của hàm số)

Để $f(x)$ liên tục tại $x=2$ thì $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow 2m+1=12\Leftrightarrow m=\dfrac{11}{2}$.

Câu 54: Chon hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} & \text{khi } x\neq 3\\ m & \text{khi } x=3\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=3$.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Đáp án A.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

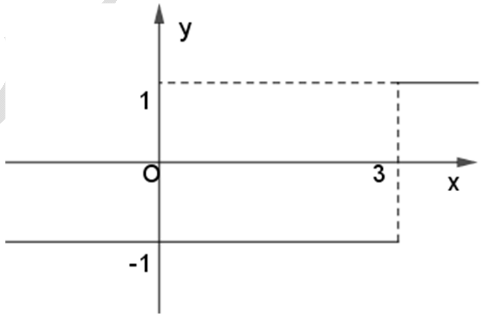
Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}(-1)=-1$.

Tương tự ta có $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=1$.(có thể dùng MTCT để tính giới hạn của hàm số)

Vậy $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ không tồn tại. Vậy với mọi m, hàm số đã cho không liên tục tại $x=3$.

Do đó đáp án đúng là **A.**

Ta có thể tam khảo thêm đồ thị của hàm số khi $x\neq 3$ để hiểu rõ hơn.



Câu 55: Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 4x^2+5b & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

A. $a=5b$. **B.** $a=10b$. **C.** $a=b$. **D.** $a=2b$.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Theo kết quả đã biết thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+1}-1}{x}=\dfrac{a}{2}$. Mặt khác $f(0)=5b$. Để hàm số đã cho liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \dfrac{a}{2}=5b\Leftrightarrow a=10b$. Vậy đáp án đúng là **B**.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Chọn các giá trị cụ thể của a và b thỏa mãn từng hệ thức rồi tính toán cho đến khi được kết quả $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Chẳng hạn với hệ thức ở đáp án A, chọn $a=5;b=1$ ta tìm được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5x+1}-1}{x}=\dfrac{5}{2};f(0)=5$ nên không thỏa mãn.

Với hệ thức ở đáp án B, chọn $a=10;b=1$ ta được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{10x+1}-1}{x}=5;f(0)=5$ nên thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Do đó đáp án là B.

STUDY TIP

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{ax+1}-1}{x}=\dfrac{a}{n}$.

Câu 56: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x\ge 2\\ \dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=3$. **B.** $m=4$. **C.** $m=5$. **D.** $m=6$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$.

Ta có $f(2)=3;\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{2x-4}+3\right)=3$.

Nếu $m=6$ thì $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x^2-12x+20}=-\infty$ nên hàm số không liên tục tại $x=2$.

Nếu $m\ne 6$ thì ta có $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2}=\dfrac{3}{6-m}$.

Để hàm số liên tục tại $x=2$ thì $\dfrac{3}{6-m}=3\Leftrightarrow 6-m=1\Leftrightarrow m=5$.

Với $m=5$ thì khi $x<2$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-10x+17}$ liên tục trên $(-\infty;2)$.

Tóm lại với $m=5$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Cách 2: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$.

Ta có $f(2)=3;\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{2x-4}+3\right)=3$.

Thử lần lượt các giá trị từ A dến C thấy $m=5$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3$. Do đó chọn đáp án C.

DẠNG 2. CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

Phương pháp chung:

Một phương pháp chứng minh phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên khoảng $(a;b)$:

- Chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.
- Chứng minh $f(a).f(b)<0$.
- Từ đó kết luận phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm ta cần tìm được hai số a và b sao cho hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a;b]$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

B. Nếu $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

C. Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ phải liên tục trên khoảng $(a;b)$.

D. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục, tăng trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

Đáp án D.

Lời giải

A sai. Chẳng hạn xét hàm số $f(x)=x^2-5$. Hàm số này xác định trên đoạn $[-3;3]$ và liên tục trên đó, đồng thời $f(-3).f(3)=4.4=16>0$ nhưng lại có hai nghiệm $x_1=-\sqrt{5};x_2=\sqrt{5}$ thuộc vào khoảng $(-3;3)$.

B sai . vì thiếu điều kiện $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

C sai. Chẳng hạn xét hàm số $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ khi } x<0 \\ x+2 \text{ khi } x\geq 0 \end{cases}$. Hàm số này xác định trên đoạn $[-3;3]$, có nghiệm $x=-1$ thuộc vào khoảng $(-3;3)$ nhưng gián đoạn tại điểm $x=0\in(-3;3)$, tức là không liên tục trên $(-3;3)$.

Vậy D đúng. Thật vậy:

- Vì hàm số $y=f(x)$ liên tục, tăng trên đoạn $[a;b]$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là $f(a)$, giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là $f(b)$.
- Nếu $f(a)>0$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là một số dương nên không có giá trị nào của x trên khoảng $(a;b)$ làm cho $f(x)=0$. Do

đó phương trình $f(x)=0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

+ Nếu $f(a)<0,$ do $f(a).f(b)>0$ nên suy ra $f(b)<0.$ Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là một số âm nên không có giá trị nào của x trên khoảng $(a;b)$ làm cho $f(x)=0$. Do đó phương trình $f(x)=0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

Câu 57: Cho phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0 \quad (1)$ trong đó a,b,c là các tham số thực. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. Phương trình (1) vô nghiệm với mọi a,b,c.

B. Phương trình (1) có ít nhất một nghiệm với mọi a,b,c.

C. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm với mọi a,b,c.

D. Phương trình (1) có ít nhất ba nghiệm với mọi a,b,c.

Lời giải

Đáp án B.

Dễ thấy $a=b=c=0$ thì phương trình (1) trở thành $x^3=0 \Leftrightarrow x=0.$ Vậy A, C, D sai. Do đó B đúng.

Giải thích thêm: Xét bài toán "Chứng minh rằng phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0 \quad (1)$ luôn có ít nhất một nghiệm với mọi a,b,c". Ta có lời giải cụ thể như sau:

Đặt $f(x)=x^3+ax^2+bx+c.$ Ta có:

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+ax^2+bx+c)=-\infty$ với mọi a,b,c nên tồn tại một giá trị $x=x_1$ sao cho $f(x_1)<0$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+ax^2+bx+c)=+\infty$ với mọi a,b,c nên tồn tại một giá trị $x=x_2$ sao cho $f(x_2)>0$.

Vậy $f(x_1).f(x_2)<0$ mà $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên suy ra $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(x_1;x_2)$. Từ đó suy ra ĐPCM.

STUDY TIP

Phương trình đa thức bậc lẻ $a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+...+a_1x+a_0=0$ trong đó $a_{2n+1}\neq 0$ luôn có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của $a_i, i=\overline{2n+1,0}$.

Câu 58: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình: $\left(m^2-3m+2\right)x^3-3x+1=0$ có nghiệm.

A. $m\in\{1;2\}$.　**B.** $m\in\mathbb{R}$.　**C.** $m\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.　**D.** $m\in\varnothing$.

Lời giải

Đáp án B.

Nếu $m^2-3m+2=0$: Phương trình đã cho trở thành $-3x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

Nếu $m^2-3m+2\neq 0$: theo **STUDY TIP** vừa nêu thì phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Tóm lại với mọi $m\in\mathbb{R}$ thì phương trình đã cho luôn có nghiệm. Do đó B đúng.

Câu 59: Cho phương trình $x^4-3x^3+x-\frac{1}{8}=0$ (1). Chọn khẳng định đúng:

A. Phương trình (1) có đúng một nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

B. Phương trình (1) có đúng hai nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

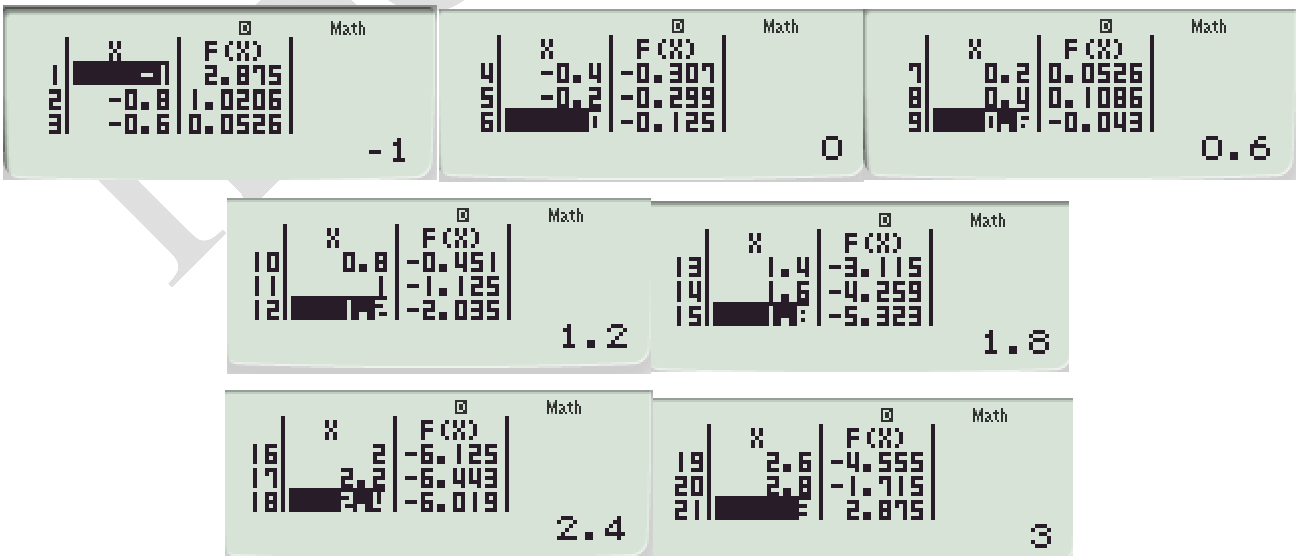
C. Phương trình (1) có đúng ba nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

D. Phương trình (1) có đúng bốn nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

Lời giải

Đáp án D.

Cách 1: Sử dụng chức năng Table trên MTCT: $f(X)=X^4-3X^3+X-\frac{1}{8}$, Start: -1, End: 3, Step: 0.2 ta được kết quả như sau:



Quan sát kết quả ta thấy giá trị của $f(x)$ tại các điểm trong khoảng $(-1;3)$ đổi dấu 4 lần. Mà phương trình bậc 4 thì có tối đa 4 nghiệm thực. Vậy phương trình (1) có đúng bốn nghiệm trên khoảng $(-1;3)$. Do đó D là đáp án đúng.

Cách 2: Sử dụng chức năng Shift Calc (Solve) của MTCT để tìm nghiệm xáp xỉ của phương trình trong khoảng $(-1;3)$. Tuy nhiên cách này tiềm ẩn nhiều may rủi hơn cách sử dụng chức năng Table như trên.

STUDY TIP

Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(x)$ đổi dấu khi x từ a qua b thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

Câu 60: Cho phương trình $2x^4-5x^2+x-+1=0$ (1). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

B. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

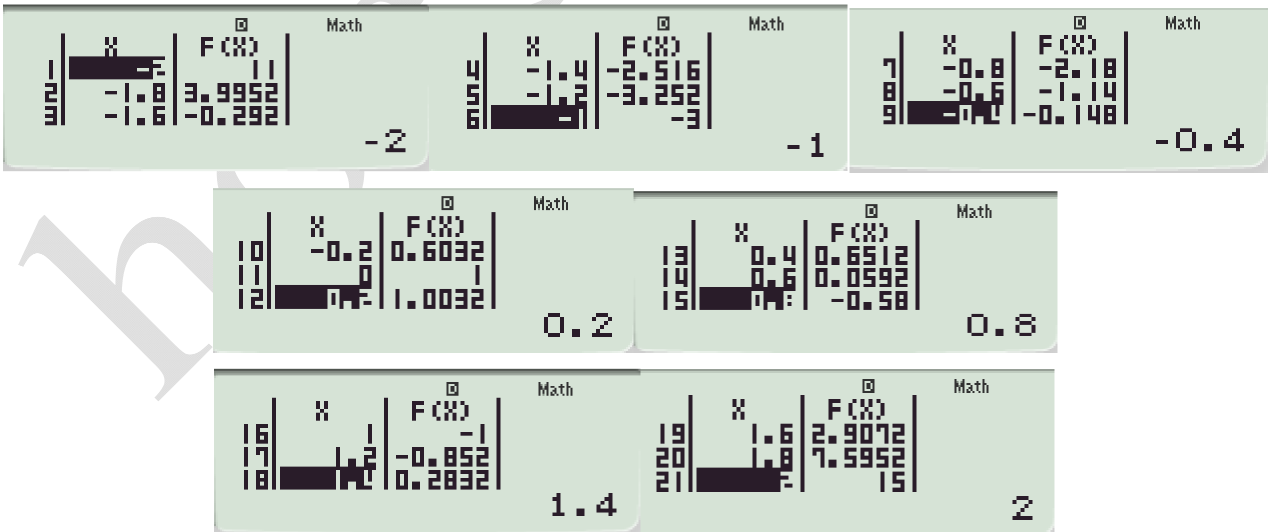
C. Phương trình (1) chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2;1)$.

D. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0;2)$.

Lời giải

Đáp án D.

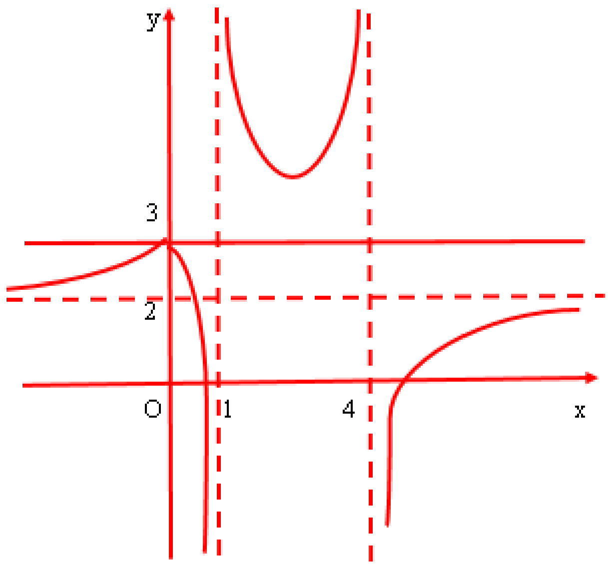
Cách 1: Sử dụng chức năng Table trên MTCT: $f(X)=2X^4-5X^2+X+1$, Start: -2, End: 2, Step: 0.2 ta được kết quả như sau:



Quan sát kết quả ta thấy trên khoảng $(-1;1)$ phương trình có ít nhất hai nghiệm, trên khoảng $(-2;0)$ phương trình có ít nhất hai nghiệm, trên khoảng $(-2;1)$ phương trình có ít nhất ba nghiệm, trên khoảng $(0;2)$ phương trình có ít nhất hai nghiệm. Vậy D là đáp án đúng.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Chọn khẳng định đúng:

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số liên tục trên $(-\infty;4)$.

C. Hàm số liên tục trên $(1;+\infty)$.

D. Hàm số liên tục trên $(1;4)$.

Câu 2. Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}, & x>1 \\ \dfrac{1}{4}, & x=1 \\ \dfrac{x^2-1}{x^2-7x+6}, & x<1. \end{cases}$$

Chọn khẳng định đúng:

A. $f(x)$ liên tục tại $x=6$ và không liên tục tại $x=1$.

B. $f(x)$ liên tục tại $x=6$ và tại $x=1$.

C. $f(x)$ không liên tục tại $x=6$ và liên tục tại $x=1$.

D. $f(x)$ liên tục tại $x=6$ và tại $x=1$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^4+4x^2}}{x} & khi\ x\neq 0\\ m-3 & khi\ x=0\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=0$.

A. Không có giá trị nào của m thỏa mãn. **B.** $m=5$.

C. $m=1$. **D.** $m\in\{1;5\}$.

Câu 4. Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để hàm số sau liên tục tại $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax+1}\sqrt[3]{bx+1}-1}{x} & khi\ x\neq 0\\ a+b & khi\ x=0\end{cases}.$$

A. $a+b=0$. **B.** $2a+b=0$. **C.** $3a+4b=0$. **D.** $3a+2b=0$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right) & khi\ x<1\\ m^3x+3-3m & khi\ x\geq 1\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m\in\{1;2\}$. **B.** $m\in\{1;-2\}$. **C.** $m\in\{-1;2\}$. **D.** $m\in\{-1;-2\}$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+6}-a}{\sqrt{x+1}-2} & khi\ x\neq 3\\ x^3-(2b+1)x & khi\ x=3\end{cases}$. Trong đó a và b là các tham số thực. Biết hàm số liên tục tại $x=3$. Số nhỏ hơn trong hai số a và b là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{2}{x} & khi\ x>0\\ a\cos x-5 & khi\ x\leq 0\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a=5$. **B.** $a=7$.

C. $a=\dfrac{11}{2}$. **D.** Không có giá trị nào của a thỏa mãn.

Câu 8. Cho phương trình $4x^4+2x^2-x-3=0$ (1). Chọn khẳng định đúng:

A. Phương trình (1) vô nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

B. Phương trình (1) có đúng một nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

C. Phương trình (1) có đúng hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

D. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $\left(m^2-5m+4\right)x^5+2x^2+1=0$ có nghiệm.

A. $m\in\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$. **B.** $m\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

C. $m\in\{1;4\}$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình sau có nghiệm $\left(2m^2-5m+2\right)(x-1)^{2017}\left(x^{2018}-2\right)+2x+3=0$.

A. $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2};2\right\}$. **B.** $m\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

C. $m\in\left\{\frac{1}{2};2\right\}$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 42. Đáp án D.

Rõ ràng hàm số không liên tục tại $x=1$ và $x=4$. Do đó đáp án đúng là D.

Câu 43. Đáp án A.

Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. Do đó hàm số liên tục tại $x=6$. Ta có

$+\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\dfrac{1}{4}$;

$+\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x^2-7x+6}=-\dfrac{2}{5}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ không tồn tại nên hàm số không liên tục tại $x=1$. Do đó đáp án đúng là A.

Câu 44. Đáp án A.

Ta có $\dfrac{\sqrt{x^4+4x^2}}{x}=\dfrac{|x|\sqrt{x^2+4}}{x}=\begin{cases}\sqrt{x^2+4} & khi\, x>0\\ -\sqrt{x^2+4} & khi\, x<0\end{cases}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=2; \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-2$. (có thể dùng MTCT để tìm giới hạn một bên).

Vậy hàm số không có giới hạn tại $x=0$ nên không liên tục tại $x=0$. Vậy không có giá trị nào của m để hàm số liên tục tại $x=0$. Đáp án đúng là A.

Câu 45. Đáp án C.

Theo kết quả đã biết thì $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{ax+1}.\sqrt[3]{bx+1}-1}{x}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}$.

Để hàm số liên tục tại $x=0$ thì $\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}=a+b\Leftrightarrow 3a+4b=0$.

Vậy C là đáp án đúng.

Nếu sử dụng MTCT, với mỗi hệ thức ta chọn các giá trị của a và b thỏa mãn hệ thức, thay vào hàm số tính $f(0)$ và $\lim\limits_{x\to0}f(x)$. Nếu $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$ thì đó là hệ thức đúng.

Câu 46. Đáp án B.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Theo kết quả đã biết thì $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{3-1}{2}=1$. (Có thể dùng MTCT để tìm giới hạn trên).

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(m^3x+3-3m\right)=m^3-3m+3=f(1)$

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow m^3-3m+3=1 \Leftrightarrow m^3-3m+2=0 \Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=-2$. (Sử dụng chức năng giải phương trình bậc 3 của MTCT). Vậy đáp án đúng là B.

Câu 47. Đáp án B.

$f(3)=27-3(2b+1)$. Đặt $g(x)=\sqrt{x+6}-a$. Ta có $g(3)=3-a$.

Ta thấy nếu $g(3)\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 3$ thì $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{g(x)}{\sqrt{x+1}-2}=\infty$ nên hàm số không thể liên tục tại $x=3$.

Nếu $a=3$ thì $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}=\dfrac{2}{3}$.

Hàm số liên tục tại $x=3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3) \Leftrightarrow 27-3(2b+1)=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow b=\dfrac{35}{9}$.

Vậy $a=3$ và $b=\dfrac{35}{9}$. Số nhỏ hơn là $a=3$.

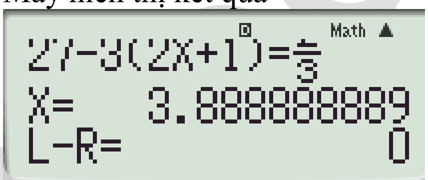
Do đó đáp án đúng là B.

Lưu ý: Để giải phương trình $27-3(2b+1)=\dfrac{2}{3}$ ta có thể làm như sau:

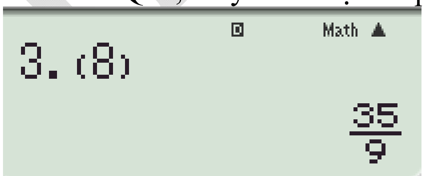
+ Nhập vào màn hình $27-3(2X+1)=\dfrac{2}{3}$.

+ Bấm SHIFT CALC (SOLVE), máy báo SOLVE FOR X nhập 1=

Máy hiển thị kết quả



+ Bấm 3.Qs=, máy hiển thị kết quả



Vậy phương trình có nghiệm $b=\dfrac{35}{9}$.

Câu 48. Đáp án A.

Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(a\cos x - 5) = a - 5 = f(0)$.

Ta có với mọi $x: \left|x\sin\dfrac{2}{x}\right| \le |x|$. Suy ra $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x\sin\dfrac{2}{x}\right) = 0$.

Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow a - 5 = 0 \Leftrightarrow a = 5$.

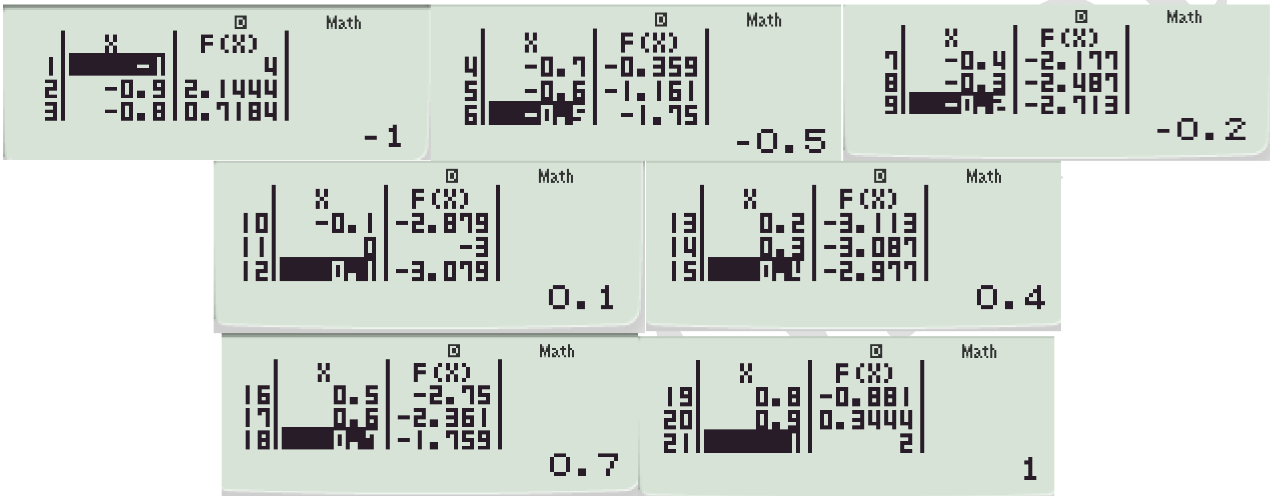
Vậy đáp án đúng là A.

Câu 49. Đáp án D.

Sử dụng chức năng TABLE của MTCT với

$+\ f(X) = 4X^4 + 2X^2 - X - 3$.

$+$ Start: -1; End: 1; Step: $0,1$.



Ta thấy giá trị $f(x)$ tại các điểm đổi dấu hai lần. Suy ra $f(x)$ xót ít nhất hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$. Vậy đáp án đúng là D.

Câu 50. Đáp án A.

+ Nếu $m^2 - 5m - 4 = 0 \Leftrightarrow m \in \{1;4\}$ thì phương trình đã cho trở thành $2x^2 + 1 = 0$. Đây là một phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $m^2 - 5m - 4 \ne 0$ thì theo kết quả đã biết, phương trình luôn có ít nhất một nghiệm.

Vậy để phương trình đã cho có nghiệm thì $m \in \mathbb{R}\setminus\{1;4\}$.

Câu 51. Đáp án D.

+ Nếu $2m^2 - 5m + 2 = 0$ thì phương trình đã cho trở thành $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$.

+ Nếu $2m^2 - 5m + 2 \ne 0$, phương trình đã cho là một đa thức bậc lẻ (bậc 4035) nên theo kết quả đã biết, phương trình có ít nhất một nghiệm.

Vậy với mọi $m \in \mathbb{R}$, phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm.