CHỦ ĐỀ. ĐẠO HÀM
KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0.

Kí hiệu: $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$. Vậy $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Nếu $\Delta x=x-x_0$ và $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ thì $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

- ✓ Δx gọi là số gia của đối số tại điểm x_0.
- ✓ Δy gọi là số gia của hàm số tương ứng.

2. Đạo hàm bên trái, bên phải.

a) Đạo hàm bên trái.

$f'(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ trong đó $x\to x_0^-$ được hiểu là $x\to x_0$ và $x<x_0$.

b) Đạo hàm bên phải.

$f'(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ trong đó $x\to x_0^+$ được hiểu là $x\to x_0$ và $x>x_0$.

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 $\Leftrightarrow f'(x_0^+)$ và $f'(x_0^-)$ tồn tại và bằng nhau. Khi đó $f'(x_0^+)=f'(x_0^-)=f'(x_0)$.

3. Đạo hàm trên khoảng, trên đoạn.

a) Hàm số $y=f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu có đạo hàm tại mọi điểm trên khoảng đó.

b) Hàm số $y=f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$ nếu có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và có đạo hàm phải tại a và đạo hàm trái tại b.

4. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số.

- Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

STUDY TIP

- ✓ Hàm số liên tục tại điểm x_0 có thể không có đạo hàm tại điểm đó.
- ✓ Hàm số không liên tục tại x_0 thì không có đạo hàm tại điểm đó.

B. CÁC DẠNG TOÁN TÍNH ĐẠO HÀM BẰNG ĐỊNH NGHĨA

Phương pháp:

1. Tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa.

Cách 1:

- Tính $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (1).

- Nếu tồn tại giới hạn (1) thì hàm số có đạo hàm tại x_0 và ngược lại thì hàm số không có đạo hàm tại x_0.

Cách 2: Tính theo số gia.

- Cho x_0 một số gia Δx : $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow \Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$.
- Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Tính giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. Mối quan hệ giữa tính liên tục vào đạo hàm.

- Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(x_0\right) \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} = 0$.
- Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 $\Rightarrow y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0.
- Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 chưa chắc có đạo hàm tại điểm x_0.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x+1}$. Tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x_0 = 1$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.   B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.   C. $2\sqrt{2}$.   D. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Đáp án A.

Cách 1: Xét $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{2}\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Cách 2:

$\Delta y = f(\Delta x + 1) - f(1) = \sqrt{\Delta x + 2} - \sqrt{2}$.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{\Delta x + 2} - \sqrt{2}}{\Delta x}$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x + 2} - \sqrt{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{2 + \Delta x} + \sqrt{2}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{2 + \Delta x} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

STUDY TIP

Nhân lượng liên hợp: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ và $\sqrt{a} - b = \dfrac{a - b^2}{\sqrt{a} + b}$.

Giải theo cách 1 tỏ ra đơn giản và nhanh hơn cách 2.

Câu 2: Khi tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^2 + 5x - 3$ tại điểm $x_0 = 2$, một học sinh đã tính theo các bước sau:

Bước 1: $f(x)-f(2)=f(x)-11$.

Bước 2: $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{x^2+5x-3-11}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x+7)}{x-2}=x+7$.

Bước 3: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+7)=9$. Vậy $f'(2)=9$.

Tính toán trên nếu sai thì sai ở bước nào.

A. Bước 1. B. Bước 2. C. Bước 3 . D. Tính toán đúng.

Lời giải

Học sinh tính đạo hàm bằng định nghĩa theo cách 1 các bước đều đúng.

STUDY TIP

Phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2 \Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)=0$.

Câu 3: Số gia của hàm số $f(x)=x^2$ ứng với số gia Δx của đối số x tại $x_0=-1$ là:

A. $(\Delta x)^2-2\Delta x-1$. B. $(\Delta x)^2+2\Delta x+2$. C. $(\Delta x)^2+2\Delta x$. D. $(\Delta x)^2-2\Delta x$.

Lời giải

Đáp án D.

Với số gia Δx của đối số x tại điểm $x_0=-1$, ta có: $\Delta y=(-1+\Delta x)^2-1=(\Delta x)^2-2\Delta x$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=x^2-x$, đạo hàm của hàm số ứng với số gia Δx của đối số x tại x_0 là:

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^2-2x_0.\Delta x-\Delta x\right)$.

B. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0-1)$.

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0+1)$.

D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^2+2x_0.\Delta x+\Delta x\right)$.

Lời giải

Đáp án B.

Ta có: $\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-(x_0+\Delta x)-(x_0^2-x_0)=(\Delta x)^2+2x_0.\Delta x-\Delta x$

$\Rightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0-1)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây là sai.

A. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

B. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Lời giải

Đáp án D.

- A đúng theo định nghĩa.

- B đúng vì $\Delta x = x - x_0$ nên $x \to x_0 \Rightarrow \Delta x \to 0$.

- C đúng. Đặt $h = \Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = h + x_0$, $h \to 0$ khi $x \to x_0$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h + x_0 - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Vậy D sai.

Câu 6: Xét ba mệnh đề sau:

(1) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại điểm đó.

(2) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại điểm đó .

(3) Nếu hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = x_0$ thì chắc chắn $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm đó .

Trong ba mệnh trên:

A. (1) và (3) đúng. B. (2) đúng. C. (1) và (2) đúng . D. (2) và (3) đúng.

Lời giải

Đáp án A.

Mệnh đề (2) sai vì: Xét hàm số $f(x) = |x|$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, nhưng ta có: $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ và $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

STUDY TIP

- Khi $x \to 0^+ \Rightarrow x > 0$ nên $|x| = x$.

- Khi $x \to 0^- \Rightarrow x < 0$ nên $|x| = -x$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + |x+1|}{x}$. Tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x_0 = -1$.

A. 2. B. 1. C. 0 . D. Không tồn tại.

Lời giải

Đáp án D.

Hàm số liên tục tại $x_0 = -1$.

Ta có $\lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 + 2x + 1}{x(x+1)} = 0$ (1).

$\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2-1}{x(x+1)}=2$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ hàm số không có đạo hàm tại điểm $x_0=-1$.

STUDY TIP

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0^+)=f'(x_0^-)=f'(x_0)$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3-\sqrt{4-x} & khi\, x\neq 0\\ 1 & khi\, x=0\end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

A. $\dfrac{1}{4}$. B. $\dfrac{1}{16}$. C. $\dfrac{1}{2}$. D. 2.

Lời giải

Đáp án A.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2+\sqrt{4-x}}=\dfrac{1}{4}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & khi\, x>1\\ x^2 & khi\, x\leq 1\end{cases}$. Khi đó $f'(1)$ là kết quả nào sau đây.

A. $\dfrac{1}{2}$. B. 1. C. 2. D. $f'(1)$ không tồn tại.

Lời giải

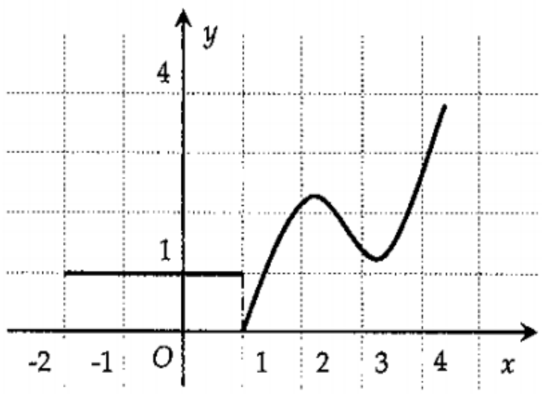
Đáp án D.

Ta có: $f(1)=1^2=1$.

$f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$ và $f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$.

Vì $f'(1^+)\neq f'(1^-)$ nên hàm số $f(x)$ không tồn tại đạo hàm tại $x_0=1$.

Câu 10: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây sai.



A. Hàm số có đạo hàm tại $x=0$.
B. Hàm số có đạo hàm tại $x=1$.
C. Hàm số có đạo hàm tại $x=2$.
D. Hàm số có đạo hàm tại $x=3$.

Lời giải

Đáp án B.

Tại $x=1$ đồ thị hàm số bị ngắt nên hàm số không liên tục. Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x=1$.

STUDY TIP

- Đồ thị của hàm số liên tục trên khoảng là một đường liền trên khoảng đó.
- Hàm số không liên tục tại điểm x_0 thì không có đạo hàm tại x_0.

Câu 11: Tìm a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & khi\, x\neq 1\\ a & khi\, x=1\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=1$.

A. $a=-2$.
B. $a=2$.
C. $a=1$.
D. $a=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Đáp án B.

Để hàm số có đạo hàm tại $x=1$ thì trước hết $f\left(x\right)$ phải liên tục tại $x=1$.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2=f\left(1\right)=a$. Khi đó $f'\left(1\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x-1}-2}{x-1}=1$.

Vậy $a=2$.

STUDY TIP

Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$.

Câu 12: Tìm a,b để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & khi\, x\geq 0\\ ax+b & khi\, x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

A. $\begin{cases}a=-11\\ b=11\end{cases}$.
B. $\begin{cases}a=-10\\ b=10\end{cases}$.
C. $\begin{cases}a=-12\\ b=12\end{cases}$.
D. $\begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}$.

Lời giải

Đáp án D.

Trước tiên hàm số phải liên tục tại $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1=f(0), \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b \Rightarrow b=1$

Xét $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{x+1}=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}a=a$

Hàm số có đạo hàm tại $x=0\Leftrightarrow a=-1$

STUDY TIP

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$

Câu 13: Tìm a,b để hàm số $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & khi\, x\ge 0 \\ a\sin x+b\cos x & khi\, x<0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x_0=0$

A. $a=1;b=1$. B. $a=-1;b=1$. C. $a=-1;b=-1$. D. $a=0;b=1$.

Lời giải

Đáp án A

Ta có: $f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax^2+bx+1)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a\sin x+b\cos x)=b$

Để hàm số liên tục thì $b=1$

$f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ax^2+x+1-1}{x}=1$

$f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{a\sin x+b\cos x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.\lim\limits_{x\to 0^-}\left(a\cos\dfrac{x}{2}\right)-\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.\lim\limits_{x\to 0^-}\sin\dfrac{x}{2}=a$

Để tồn tại $f'(0)\Rightarrow f'(0^+)=f'(0^-)\Leftrightarrow a=1$

STUDY TIP

Giới hạn lượng giác $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\Rightarrow \lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=x(x-1)(x-2)...(x-1000)$. Tính $f'(0)$.

A. $10000!$. B. $1000!$. C. $1100!$. D. $1110!$.

Lời giải

Đáp án B.

$f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-1)(x-2)...(x-1000)-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)(x-2)...(x-1000)$

$=(-1)(-2)...(-1000)=1000!$

STUDY TIP

Hoán vị n phần tử: $P_n = n! = 1.2...(n-1)n$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Số gia của hàm số $f(x) = x^3$ ứng với $x_0 = 2$ và $\Delta x = 1$ bằng bao nhiêu?

A. -19. B. 7. C. 19. D. -7.

Câu 2. Tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $f(x) = 2x(x-1)$ theo x và Δx là:

A. $4x + 2\Delta x + 2$.
B. $4x + 2(\Delta x)^2 - 2$.
C. $4x + 2\Delta x - 2$.
D. $4x.\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 2\Delta x$.

Câu 3. Số gia của hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ứng với x và Δx là:

A. $\Delta x(\Delta x + 2x - 4)$. B. $2x + \Delta x$. C. $\Delta x(2x - 4\Delta x)$. D. $2x - 4\Delta x$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & khi\, x \neq 0 \\ 0 & khi\, x = 0 \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. -2. D. Không tồn tại.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2} & khi\, x \neq 1 \\ 0 & khi\, x = 1 \end{cases}$. Giá trị $f'(1)$ bằng:

A. $\frac{3}{2}$. B. 1. C. 0. D. Không tồn tại.

Câu 6. Xét hai mệnh đề:

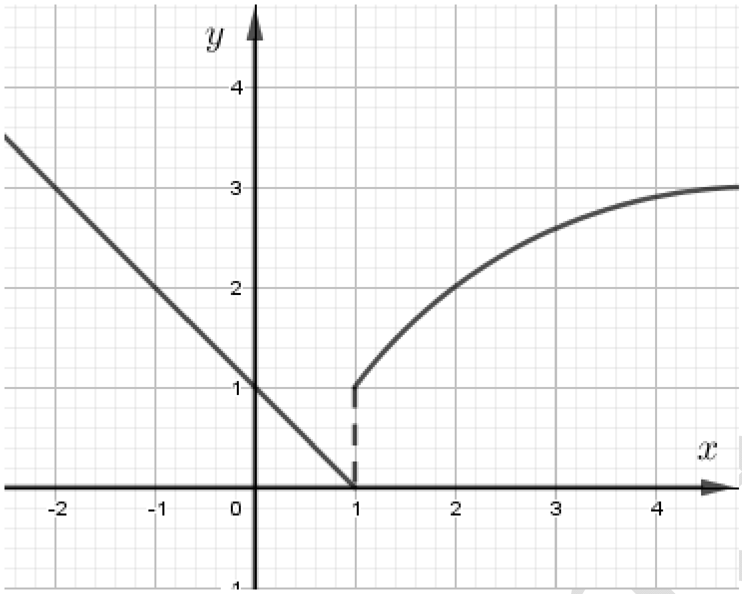
(I) $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0.

(II) $f(x)$ có liên tục tại x_0 thì $f(x)$ đạo hàm tại x_0.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I). B. Chỉ (II). C. Cả hai đều sai. D. Cả hai đều đúng.

Câu 7. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ:



Hàm số không có đạo hàm tại các điểm nào sau đây?

A. $x=0$. B. $x=1$. C. $x=2$. D. $x=3$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{x-1} & khi\, x\neq 1\\ 0 & khi\, x=1\end{cases}$ .Giá trị $f'(1)$ bằng:

A. $\dfrac{1}{3}$. B. $\dfrac{1}{5}$. C. $\dfrac{1}{2}$. D. $\dfrac{1}{4}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+3 & khi\, x\geq 1\\ \dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} & khi\, x<1\end{cases}$ .Giá trị $f'(1)$ bằng:

A. 0. B. 4. C. 5. D. Không tồn tại.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^+$ bởi $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{x} & khi\;\; x\neq 0\\ 0 & khi\;\; x=0\end{cases}$ Xét hai mệnh đề sau:

(I) $f'(0)=1$.

(II) Hàm số không có đạo hàm tại $x_0=0$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I). B. Chỉ (II). C. Cả hai đều đúng. D. Cả hai đều sai.

Câu 11. Xét hai câu sau:

(1) Hàm số $y=\dfrac{|x|}{x+1}$ liên tục tại $x=0$.

(2) Hàm số $y=\dfrac{|x|}{x+1}$ có đạo hàm tại $x=0$.

Trong 2 câu trên:

A. (2) đúng. B. (1) đúng. C. Cả (1), (2) đều đúng. D. Cả (1), (2) đều sai.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x} & khi\ x\neq 0\\ 0 & khi\ x=0\end{cases}$. Giá trị của $f'(0)$ bằng:

A. $\dfrac{1}{3}$. B. $-\dfrac{5}{3}$. C. $\dfrac{4}{3}$. D. Không tồn tại.

Câu 13. Với hàm số $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{\pi}{x} & khi\ \ x\neq 0\\ 0 & khi\ \ x=0\end{cases}$. Để tìm đạo hàm $f'(x)=0$ một học sinh lập luận qua các bước như sau:

1. $|f(x)|=|x|.\left|\sin\dfrac{\pi}{x}\right|\leq|x|$.

2. Khi $x\to 0$ thì $|x|\to 0$ nên $|f(x)|\to 0\Rightarrow f(x)\to 0$.

3. Do $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=0$ nên hàm số liên tục tại $x=0$.

4. Từ $f(x)$ liên tục tại $x=0\Rightarrow f(x)$ có đạo hàm tại $x=0$.

Lập luận trên nếu sai thì bắt đầu từ bước:

A. Bước 1. B. Bước 2. C. Bước 3. D. Bước 4.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x^2} & khi\ x\neq 0\\ 0 & khi\ x=0\end{cases}$.

(1) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=0$.

(2) Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm $x=0$.

Trong các mệnh đề trên:

A. Chỉ (1) đúng. B. Chỉ (2) đúng. C. Cả $(1),(2)$ đều đúng. D. Cả $(1),(2)$ đều sai.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx & khi\ \ x\geq 1\\ 2x-1 & khi\ \ x<1\end{cases}$. Tìm a,b để hàm số có đạo hàm tại $x=1$

A. $a=-1,b=0$. B. $a=-1,b=1$. C. $a=1,b=0$. D. $a=1,b=1$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{x} & khi\ \ x>0\\ x^2+x & khi\ \ x\leq 0\end{cases}$. Giá trị của $f'(0)$ bằng:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 17. Xét hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là đoạn $[a;b]$ đồng thời nếu $x\to x_0\in[a;b]$ thì $f(x)\to 1$ với 3 điều kiện:

I. $f(x)$ là hàm số liên tục trái và liên tục phải của x_0.

II. $f(x_0)=1$.

III. $f(x)$ có đạo hàm tại x_0.

Trong ba điều kiện trên, điều kiện cần và đủ để $f(x)$ liên tục tại x_0 là:

A. Chỉ I. B. Chỉ II. C. Chỉ I và II. D. Chỉ II và III.

Câu 18. Xét ba hàm số:

I. $f(x)=|x|.x$

II. $g(x)=\sqrt{x}$

III. $h(x)=|x+1|x$

Hàm số không có đạo hàm tại $x=0$ là:

A. Chỉ I. B. Chỉ II. C. Chỉ I và II. D. Chỉ I và III.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 20. Đáp án C.

$\Delta y = f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=\left(x_0+\Delta x\right)^3-x_0^3$

Với $x_0=2, \Delta x=1 \Rightarrow \Delta y=19$

Câu 21. Đáp án C.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\frac{2\left(x-x_0\right)\left(x+x_0\right)-2\left(x-x_0\right)}{x-x_0}=2x+2x_0-2$$

(Với $x_0=x-\Delta x$)

Câu 22. Đáp án A.

$$\Delta y = f\left(\Delta x+x\right)-f\left(x\right)=\left(\Delta x+x\right)^2-4\left(\Delta x+x\right)+1-\left(x^2-4x+1\right)=\Delta x\left(\Delta x+2x-4\right)$$

Câu 23. Đáp án A.

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\dfrac{1}{2}$

Vậy $f'(0)=\dfrac{1}{2}$

Câu 24. Đáp án D.

Xét $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+3x}{(x-1)\left(x^2-3x+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-3)}{(x-1)(x-2)}=\infty$

Câu 25. Đáp án A.

(II) Sai : ví dụ: $f(x)=|x|$ thì $f(x)$ liên tục tại $x=0$ nhưng $f(x)$ không có đạo hàm tại $x=0$

(I) Đúng theo đáp án đã trình bày

Câu 26. Đáp án B.

Tại $x = 1$, đồ thị hàm số bị gián đoạn nên hàm số không liên tục tại đó

$\Rightarrow$ hàm số không có đạo hàm

Câu 27. Đáp án C.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

Câu 28. Đáp án D.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2x+3)=5$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\left(x^2+3x-4\right)=0$$

Vậy không tồn tại $f'(1)$

Câu 29. Đáp án B.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{x}}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\sqrt{x}}=+\infty$$

Vậy (I) sai, (II) đúng

Câu 30. Đáp án B.

Ta có: $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x+1}=0=f(0)\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{(x+1)}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{(x+1)}=-1$$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x=0$

Câu 31. Đáp án B.

Ta có:
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{4x^2+8}-2+2-\sqrt{8x^2+4}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{4x^2}{\sqrt[3]{\left(4x^2+8\right)^2}+2\sqrt[3]{4x^2+8}+4}-\frac{8x^2}{2+\sqrt{8x^2+4}}\right)=\frac{1}{3}-2=-\frac{5}{3}$$

Câu 32. Đáp án D.

Một hàm số liên tục tại x_0 chưa chắc có đạo hàm tại điểm đó, hơn nữa $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\sin\frac{\pi}{x}$

không có giới hạn khi $x\to 0$

Câu 33. Đáp án C.

Ta có: $-|x| \le x.\sin\frac{1}{x^2} \le |x|$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(-|x|) \le \lim\limits_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x^2} \le \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x^2} = 0 = f(0)$

Vậy hàm số liên tục tại $x=0$

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\left(\sin\frac{1}{x^2}\right)$

Lấy dãy (x_n): $x_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}$ có:

$\lim x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1$

Lấy dãy (x_n'): $x_n' = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{6}+2\pi n}} = \frac{1}{2}$, tương tự ta cũng có:

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n' = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n') = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x^2}$

không tồn tại

Câu 34. Đáp án C.

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = a+b = f(1)\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2x-1) = 1\end{cases} \Rightarrow a+b=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{ax^2+bx-(a+b)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}[a(x+1)+b] = 2a+b$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x^2-1-(a+b)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x-1-1}{x-1} = 2$

Ta có hệ: $\begin{cases}a+b=1\\ 2a+b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$

Câu 35. Đáp án A.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}.\sin x\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+x) = 0$

Suy ra hàm số liên tục tại $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2 x}{x}=1; \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+x}{x}=1$

Vậy: $f'(0)=f'(0^-)=f'(0^+)=1$

Câu 36. Đáp án C.

- *f(x)* liên tục tại x_0 tức là $x\to x_0$ thì $f(x)\to f(x_0)$ nên (I) và (II) đúng.
- *f*(*x*) có đạo hàm tại x_0 là điều điện đủ để *f*(*x*) liên tục tại x_0. *f*(*x*) liên tục tại x_0 nhưng có thể *f*(*x*) không có đạo hàm tại điểm đó.

Câu 37. Đáp án B.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$. Vậy $g(x)$ không có đạo hàm tại $x=0$.

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. LÝ THUYẾT

1. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

Cho các hàm số $u=u(x);\ v=v(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có:

1. $(u+v)'=u'+v'$
2. $(u-v)'=u'-v'$
3. $(u.v)'=u'v+v'u$
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}\Rightarrow\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$

STUDY TIP

Mở rộng:

1. $(u_1\pm u_2\pm...\pm u_n)'=u_1'\pm u_2'\pm...\pm u_n'$
2. $(u.v.\mathrm{w})'=u'.v.\mathrm{w}+u.v'.\mathrm{w}+u.v.\mathrm{w}'$

2. Đạo hàm của hàm số hợp

Cho hàm số $y=f(u(x))=f(u)$ với $u=u(x)$. Khi đó: $\boxed{y_x'=y_u'.u_x'}$

3. Bảng công thức đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

Đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản	Đạo hàm các hàm hợp $u=u(x)$
$(c)'=0$, c là hằng số	
$(x)'=1$	
$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(x^\alpha)'=\alpha.x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)'=\alpha.u'.u^{\alpha-1}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=u'.\cos u$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-u'.\sin u$
$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$(\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}=u'.(1+\tan^2 x)$
$(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$	$(\cot u)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}=-u'.(1+\cot^2 u)$

STUDY TIP

Với các hàm số đã cho trong bảng được xác định với điều kiện đầy đủ.

B. Các dạng toán về quy tắc tính đạo hàm

Đạo hàm của hàm đa thức - hữu tỉ - căn thức và hàm hợp

Phương pháp:
- Sử dụng các quy tắc, công thức tính đạo hàm trong phần lý thuyết.
- Nhận biết và tính đạo hàm của hàm số hợp, hàm số có nhiều biểu thức.
- Sử dụng đạo hàm để giải phương trình, bất phương trình, chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức..

Câu 15: Đạo hàm của hàm số $y=-2x^5+4\sqrt{x}$ bằng biểu thức nào dưới đây?

A. $-10x^4+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ B. $-10x^4+\dfrac{4}{\sqrt{x}}$ C. $-10x^4+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ D. $-10x^4-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Lời giải

Đáp án C.

Lời giải

$y' = -10x^4 + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Ví dụ 2. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ bằng biểu thức có dạng $\frac{a}{(x+2)^2}$. Khi đó a nhận giá trị nào sau đây:

A. $a = -3$.　　B. $a = 5$.　　C. $a = 3$.　　D. $a = -5$.

Lời giải

Đáp án C.

$$y' = \frac{(2x+1)'(x+2) - (2x+1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} \Rightarrow a = 3.$$

STUDY TIP

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$ với $c \neq 0$ và $ad - bc \neq 0$

Ví dụ 3. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$ bằng biểu thức có dạng $\frac{ax^2 + bx}{(x-1)^2}$. Khi đó $a.b$ bằng:

A. $a.b = -2$.　　B. $a.b = -1$.　　C. $a.b = 3$.　　D. $a.b = 4$.

Lời giải

Đáp án A.

Cách 1: $y' = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \Rightarrow a.b = -2.$

Cách 2: $y=x+\dfrac{1}{x-1}\Rightarrow y'=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

STUDY TIP

Với $a.a'\neq 0$ ta có $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}\right)'=\dfrac{aa'x^2+2ab'x+bb'-ac'}{(a'x+b')^2}$

Ví dụ 4. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x^2+x+3}{x^2+x-1}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax+b}{(x^2+x-1)^2}$. Khi đó $a+b$ bằng:

A. $a+b=4$. B. $a+b=5$. C. $a+b=-10$. D. $a+b=-12$.

Lời giải

Đáp án D.

Cách 1: $y=\dfrac{x^2+x-1+4}{x^2+x-1}=1+\dfrac{4}{x^2+x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{-4(2x+1)}{(x^2+x-1)^2}=-\dfrac{8x+4}{(x^2+x-1)^2}$

Cách 2: Áp dụng $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$y'=\frac{(2x+1)(x^2+x-1)-(x^2+x+3)(2x+1)}{(x^2+x-1)^2}=\frac{-8x-4}{(x^2+x-1)^2}\Rightarrow a+b=-12$$

STUDY TIP

$$\left(\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}\right)'=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix}a & c\\ a_1 & c_1\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}b & c\\ b_1 & c_1\end{vmatrix}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2}$$

Ví dụ 5. Đạo hàm của hàm số $y=ax^2+(a-1)x+a^3-a^2$ (với *a* là hằng số) tại mọi $x\in\mathbb{R}$ là:

A. $2x+a-1$. B. $2ax+1-a$. C. $2ax+3a^2-2a+1$. D. $2ax+a-1$.

Lời giải

Đáp án D. $y'=2ax+a-1$

STUDY TIP

Với *c* là hằng số thì $(c)'=0$

$$(c.u)' = c.u'$$
$$(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$$

Ví dụ 6. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x^2+x+1}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax+b}{2\sqrt{x^2+x+1}}$. Khi đó $a-b$ bằng:

A. $a-b=2$. B. $a-b=-1$. C. $a-b=1$. D. $a-b=-2$.

Lời giải

Đáp án C. $y'=\dfrac{(x^2+x+1)'}{2\sqrt{x^2+x+1}}=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} \Rightarrow a-b=1$

Ví dụ 7. Đạo hàm của hàm số $y=(x^2-x+1)^5$ là:

A. $4(x^2-x+1)^4(2x-1)$. B. $5(x^2-x+1)^4$.

C. $5(x^2-x+1)^4(2x-1)$. D. $(x^2-x+1)^4(2x-1)$.

Lời giải

Đáp án C. $y'=5(x^2-x+1)^4(x^2-x+1)'=5(x^2-x+1)^4(2x-1)$

STUDY TIP

Với $u=u(x)$: $(u^n)'=n.u'u^{n-1}, n\in\mathbb{N}^*$
$$(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Ví dụ 8. Đạo hàm của hàm số $y=(x^2+1)(5-3x^2)$ bằng biểu thức có dạng ax^3+bx. Khi đó $T=\dfrac{a}{b}$ bằng:

A. -1. B. -2. C. 3. D. -3.

Lời giải

Đáp án D.

$$y'=(x^2+1)'(5-3x^2)+(x^2+1)(5-3x^2)'=2x(5-3x^2)+(x^2+1)(-6x)=-12x^3+4x$$

STUDY TIP

Với $u=u(x), v=v(x)$: $(uv)'=u'v+uv'$

Ví dụ 9. Đạo hàm của hàm số $y=x^2(2x+1)(5x-3)$ bằng biểu thức có dạng ax^3+bx^2+cx. Khi đó $a+b+c$ bằng:

A. 31. B. 24. C. 51. D. 34.

Lời giải

Đáp án A.

Cách 1: $y' = 2x(2x+1)(5x-3) + x^2.2(5x-3) + x^2(2x+1).5 = 40x^3 - 3x^2 - 6x$

Cách 2: Nhân vào rút gọn ta được $y = 10x^4 - x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 40x^3 - 3x^2 - 6x$ nên $a+b+c = 31$

STUDY TIP

$$u = u(x), v = v(x), \omega = \omega(x) \Rightarrow (uv\omega)' = u'v\omega + uv'\omega + uv\omega'$$

Ví dụ 10. Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a là hằng số) là:

A. $-\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$. B. $\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. C. $\dfrac{2a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$. D. $\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$.

Lời giải

Đáp án D.

$$y' = \frac{\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$$

Ví dụ 11. Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. Khi đó a nhận giá trị nào sau đây:

A. $a = -4$. B. $a = -1$. C. $a = 2$. D. $a = -3$.

Lời giải

Đáp án B.

$$y' = -\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1} = \frac{-(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}.(x^2+1)} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}.(x^2+1)} \Rightarrow a = -1$$

STUDY TIP

$$u = u(x): \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Ví dụ 12. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & khi\ \ x \le 1 \\ \sqrt{x-1} + 3 & khi\ \ x > 1 \end{cases}$ là:

A. $f'(x)=\begin{cases} 2x & khi\ \ x<1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & khi\ \ x>1 \end{cases}$.

B. $f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & khi\ \ x<1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & khi\ \ x>1 \end{cases}$.

C. $f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & khi\ \ x\le 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & khi\ \ x>1 \end{cases}$.

D. $f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & khi\ \ x<1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & khi\ \ x>1 \end{cases}$.

Lời giải

Đáp án D.

Với $x<1: f'(x)=2x+1$

Với $x>1: f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

Với $x=1$, ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}=+\infty$ nên không có đạo hàm tại $x=1$.

Vậy $f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & khi\ \ x<1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & khi\ \ x>1 \end{cases}$

STUDY TIP

Loại bài toán kết hợp giữa tính đạo hàm bằng công thức và tính đạo hàm bằng định nghĩa tại 1 điểm x_0.

Ví dụ 13. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & khi\ \ x<1 \\ \dfrac{1}{x} & khi\ \ x\ge 1 \end{cases}$.

A. $f'(x)=\begin{cases} -x & khi\ \ x<1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & khi\ \ x>1 \end{cases}$.

B. $f'(x)=\begin{cases} -x & khi\ \ x<1 \\ -1 & khi\ \ x=1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & khi\ \ x>1 \end{cases}$.

C. $f'(x)=\begin{cases} -x & khi\ \ x<1 \\ \dfrac{1}{x^2} & khi\ \ x>1 \end{cases}$.

D. $f'(x)=\begin{cases} -x & khi\ \ x<1 \\ 1 & khi\ \ x=1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & khi\ \ x>1 \end{cases}$.

Lời giải

Đáp án B.

Với $x<1: f'(x)=-x$

Với $x>1: f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

Với $x=1$, ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3-x^2}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1=f(1)$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=1$.

Xét $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{3-x^2}{2}-1}{x-1}=-1 \end{cases} \Rightarrow f'(1)=-1$

Vậy $f'(x)=\begin{cases} -x & khi\ \ x<1 \\ -1 & khi\ \ x=1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & khi\ \ x>1 \end{cases}$

STUDY TIP

- Trên các khoảng xác định ta tính đạo hàm bằng quy tắc.
- Tại điểm $x=x_0$ ta xét đạo hàm bằng định nghĩa.

Ví dụ 14. Cho hàm số $f(x)=\left(3x^2-1\right)^2$. Giá trị $f'(1)$ là:

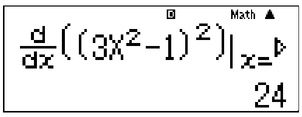
A. 4. B. 8. C. -4. D. 24.

Lời giải

Đáp án D.

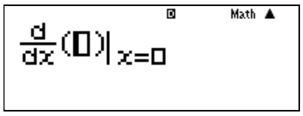
Cách 1: $f'(x)=2\left(3x^2-1\right)\left(3x^2-1\right)'=12x\left(3x^2-1\right)\Rightarrow f'(1)=24$

Cách 2: Sử dụng MTCT

Nhập vào màn hình: 

Nhận xét: Bằng cách 2 ta có thể tính nhanh chóng đạo hàm tại một điểm xác định $x=x_0$.

STUDY TIP

Dùng MTCT: 

Tính đạo hàm của hàm số tại một điểm chỉ ra $x = x_0$.

Ví dụ 15. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$. Đạo hàm của hàm số tại $x = 1$ là:

A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. 0. D. Không tồn tại.

Lời giải

Đáp án D.

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow$ Không tồn tại $f'(1)$ vì $f'(x)$ xác định với $x > 1$.

STUDY TIP

Với bài toán này nếu sử dụng MTCT thì kết quả là màn hình hiển thị thông báo “Math ERROR” và không tính được.

Ví dụ 16. Cho hàm số $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 1$. Tập các giá trị của x để $f'(x) < 0$ là:

A. $(-1;0) \cup (1;+\infty)$. B. $(-1;0)$. C. $(1;+\infty)$. D. $(-\infty;0)$.

Lời giải

Đáp án A.

$$f'(x) = -8x^3 + 8x \Rightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right.$$

STUDY TIP

Nhận biết được loại bài toán kết hợp việc tính đạo hàm và giải bất phương trình.

Ví dụ 17. Cho hàm số $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$. Tập các giá trị của x để $2x.f'(x) - f(x) \ge 0$ là:

A. $\left[\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$. B. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$. C. $\left(-\infty;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. D. $\left[\frac{2}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.

Lời giải

Đáp án A.

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow 2x.f'(x) - f(x) \ge 0 \Leftrightarrow 2x.\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} - f(x) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \ge \sqrt{x^2+1} \quad \left(do\ \ f(x) > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \ge 0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 3x^2 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$

STUDY TIP

$\bullet |x| \ge x \Rightarrow |x| + x \ge 0$

$\bullet \sqrt{f(x)} \le \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, g(x) \ge 0 \\ f(x) \le g(x) \end{cases}$

Ví dụ 18. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + 8x - 1$. Tập các giá trị của x để $f'(x) = 0$ là:

A. $\{-2\sqrt{2}\}$. B. $\{2; \sqrt{2}\}$. C. $\{-4\sqrt{2}\}$. D. $\{2\sqrt{2}\}$.

Lời giải

Đáp án D.

$f'(x) = x^2 - 4\sqrt{2}x + 8$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$

STUDY TIP

- Nhận biết được loại bài toán kết hợp giữa việc tính đạo hàm và giải phương trình.
- Sau khi tính được đạo hàm ta có thể thử các đáp án vào phương trình để tìm ra kết quả.

Ví dụ 19. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là:

A. $\left\{0; \frac{2}{3}\right\}$. B. $\left\{0; -\frac{2}{3}\right\}$. C. $\left\{0; \frac{3}{2}\right\}$. D. $\left\{0; -\frac{3}{2}\right\}$.

Lời giải

Đáp án C.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{array}\right.$$ (thỏa mãn)

Ví dụ 20. Cho hàm số $f(x) = \frac{mx^3}{3} - mx^2 + (3m-1)x + 1$. Tập các giá trị của tham số m để $y' \le 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ là:

A. $(-\infty; \sqrt{2}]$. B. $(-\infty; 2]$. C. $(-\infty; 0]$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Đáp án C.

$y' = mx^2 - 2mx + 3m - 1$

$y' \le 0 \Leftrightarrow mx^2 - 2mx + 3m - 1 \le 0 \ (1)$

+ Với $m = 0$ thì (1) trở thành $-1 \le 0$ nên đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

+ Với $m \neq 0$ khi đó (1) đúng với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 1 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$

Vậy $m \leq 0$

STUDY TIP

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

$f(x) \geq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

$f(x) \leq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Ví dụ 21. Cho hàm số $f(x) = 2mx - mx^3$. Số $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 1$ khi và chỉ khi:

A. $m \leq -1$. B. $m > -1$. C. $-1 \leq m \leq 1$. D. $m \geq -1$.

Lời giải

Đáp án D.

$f'(x) = 2m - 3mx^2$

Số $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 1 \Leftrightarrow 2m - 3m \leq 1 \Leftrightarrow m \geq -1$.

DẠNG 2. ĐẠO HÀM CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Phương pháp chung:

- Vận dụng các công thức đạo hàm bốn hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ và hàm hợp của nó.

- Vận dụng phối hợp các quy tắc đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương và hàm số hợp

- Vận dụng các phương trình lượng giác cơ bản, phương trình bậc nhất với sinx và cosx, phương trình tích số…để giải phương trình $y' = 0$

Chú ý: Biến đổi lượng giác để thu gọn các hàm số, biểu thức lượng giác

STUDY TIP

$$(\sin^n u)' = n\sin^{n-1} u.(\sin u)'$$
$$(\cos^n u)' = n\cos^{n-1} u.(\cos u)'$$
$$(\tan^n u)' = n\tan^{n-1} u.(\tan u)'$$
$$(\cot^n u)' = n\cot^{n-1} u.(\cot u)'$$

Câu 16: Đạo hàm của hàm số $y = 2\sin 3x.\cos 5x$ có biểu thức nào sau đây?

A. $30\cos 3x.\sin 5x$. B. $-8\cos 8x + 2\cos 2x$.

C. $8\cos 8x - 2\cos 2x$. D. $-30\cos 3x + 30\sin 5x$.

Đáp án C

Lời giải

Cách 1: Ta có $y = \sin 8x - \sin 2x \Rightarrow y' = 8\cos 8x - 2\cos 2x$

Cách 2: $y' = 6\cos 3x.\cos 5x - 10\sin 3x.\sin 5x$

$=3\cos 8x+3\cos 2x-5\cos 2x+5\cos 8x$

$=8\cos 8x-2\cos 2x$

Nhận xét: Nếu dùng cách 1 sử dụng công thức biến đổi từ tích sang tổng rút gọn rồi sau đó việc tính đạo hàm y' sẽ đơn giản hơn.

STUDY TIP

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)]$$

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$$

Câu 17: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ có biểu thức dạng $\dfrac{a}{(\sin x-\cos x)^2}$. Vậy giá trị *a* là:

A. $a=1$. B. $a=-2$. C. $a=3$. D. $a=2$.

Đáp án B

Lời giải

$$y'=\frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2}=\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}.$$

$\Rightarrow a=-2$

STUDY TIP

Áp dụng quy tắc: $(\dfrac{u}{v})'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ và $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

Câu 18: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\cot x}$ là:

A. $\dfrac{-1}{\sin^2 x\sqrt{\cot x}}$. B. $\dfrac{-1}{2\sin^2 x\sqrt{\cot x}}$. C. $\dfrac{1}{2\sqrt{\cot x}}$. D. $\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cot x}}$.

Đáp án B

Lời giải

Cách 1: $y'=\dfrac{(\cot x)'}{2\sqrt{\cot x}}=\dfrac{-1}{2\sin^2 x\sqrt{\cot x}}$

Cách 2: Học sin có thể sử dụng MTCT tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\cot x}$ tại một điểm $x=\dfrac{\pi}{4}$ ta được kết quả -1

Với $x=\dfrac{\pi}{4}$ thay vào từng đáp án ta được đáp án B

STUDY TIP

Câu 19: Đạo hàm của hàm số $y=\cos^2(\sin^3 x)$ là biểu thức nào sau đây?

A. $-\sin(2\sin^3 x).\sin^2 x.\cos x$. B. $-6\sin(2\sin^3 x).\sin^2 x.\cos x$.

C. $-7\sin(2\sin^3 x).\sin^2 x.\cos x$. D. $-3\sin(2\sin^3 x).\sin^2 x.\cos x$.

Đáp án D

Lời giải

Cách 1: $y=\cos^2 u$, với $u=\sin^3 x$ $\Rightarrow y'=-3\sin(2\sin^3 x).\sin^2 x.\cos x$

Cách 2: Sử dụng MTCT

- Nhập biểu thức của hàm số $y=\cos^2(\sin^3 x)$ ở đơn vị radian

- Thay $x=\dfrac{\pi}{4}$ vào từng đáp án ta được đáp án D

Nhận xét: Với bài toán này việc sử dụng MTCT trở nên phức tạp hơn nhiều với việc giải tự luận thuần túy

STUDY TIP

Câu 20: Đạo hàm của hàm số $y=-\dfrac{\cos x}{3\sin^3 x}+\dfrac{4}{3}\cot x$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\cot^3 x-1$. B. $3\cot^4 x-1$. C. $\cot^4 x-1$. D. $\cot^4 x$.

Đáp án C

Lời giải

Ta rút gọn hàm số đã cho $y=-\dfrac{1}{3}\cot x(1+\cot^2 x)+\dfrac{4}{3}\cot x=-\dfrac{1}{3}\cot^3 x+\cot x$

$\Rightarrow y'=\cot^2 x(1+\cot^2 x)-1-\cot^2 x=\cot^4 x-1$

STUDY TIP

Học sinh cần biến đổi hàm số đã cho về dạng đơn giản hơn thì việc tính toán đạo hàm sẽ nhanh hơn.

Câu 21: Đạo hàm của hàm số $y=\tan^2 x-\cot^2 x$ là:

A. $2\dfrac{\tan x}{\cos^2 x}+2\dfrac{\cot x}{\sin^2 x}$. B. $2\dfrac{\tan x}{\cos^2 x}-2\dfrac{\cot x}{\sin^2 x}$. C. $2\dfrac{\tan x}{\sin^2 x}+2\dfrac{\cot x}{\cos^2 x}$. D. $2\tan x-2\cot x$.

Đáp án A

Lời giải

$$y'=2\tan x.\frac{1}{\cos^2 x}-2\cot x\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\frac{2\tan x}{\cos^2 x}+\frac{2\cot x}{\sin^2 x}$$

Câu 22: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^3.\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$. Đạo hàm $f'(x)$ là biểu thức nào sau đây?

A. $f'(x)=\begin{cases} x^2.\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ -1 & \text{khi } x=0 \end{cases}$. B. $f'(x)=\begin{cases} 3x^2.\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 1 & \text{khi } x=0 \end{cases}$.

C. $f'(x)=\begin{cases}3x^2.\sin\frac{1}{x}+x\cos\frac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$.

D. $f'(x)=\begin{cases}3x^2.\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$.

Đáp án D

Lời giải

Với $x\neq 0\Rightarrow f'(x)=3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}$

Với $x=0\Rightarrow f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$

$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}3x^2.\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$

STUDY TIP

Bạn đọc nhận biết loại bài toán tính đạo hàm của hàm số có nhiều biểu thức:

- Với $x\neq x_0$ tính đạo hàm bằng công thức

- Với $x=x_0$ tính đạo hàm bằng định nghĩa

Câu 23: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{3\tan^2 x+\cot 2x}$ là:

A. $\frac{3\tan x(1+\tan^2 x)-(1+\cot^2 2x)}{3\sqrt{3\tan^2 x+\cot 2x}}$.

B. $\frac{3\tan x(1+\tan^2 x)-(1+\cot^2 2x)}{2\sqrt{3\tan^2 x+\cot 2x}}$.

C. $\frac{3\tan x(1+\tan^2 x)+(1+\cot^2 2x)}{\sqrt{3\tan^2 x+\cot 2x}}$.

D. $\frac{3\tan x(1+\tan^2 x)-(1+\cot^2 2x)}{\sqrt{3\tan^2 x+\cot 2x}}$.

Đáp án D

Lời giải

Ta có: $y=\sqrt{u}$ với $u=3\tan^2 x+\cot 2x\ \Rightarrow y'=\frac{3\tan x(1+\tan^2 x)-(1+\cot^2 2x)}{\sqrt{3\tan^2 x+\cot 2x}}$

STUDY TIP

Vận dụng giữa các quy tắc tính đạo hàm và đạo hàm của hàm số hợp $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Câu 24: Cho hàm số $f(x)=\frac{\cos x}{1+2\sin x}$, chọn kết quả sai?

A. $f'(\frac{\pi}{6})=-\frac{5}{4}$.

B. $f'(0)=-2$.

C. $f'(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{3}$.

D. $f'(\pi)=-2$.

Đáp án A

Lời giải

Cách 1: Ta có $f'(x)=\frac{-\sin x-2}{(1+2\sin x)^2}\Rightarrow f'(\frac{\pi}{6})=-\frac{5}{8}$

Cách 2: Sử dụng MTCT tính đạo hàm của hàm số tại một điểm

STUDY TIP

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)-\cos^2 x$ với $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong 4 biểu thức dưới đây, biểu thức nào xác định $f(x)$ thỏa mãn $y'=1\forall x\in\mathbb{R}$?

A. $x+\frac{1}{2}\cos 2x$. B. $x-\frac{1}{2}\cos 2x$. C. $x-\sin 2x$. D. $x+\sin 2x$.

Đáp án A

Lời giải

Ta có: $y'=f'(x)+2\cos x\sin x=f'(x)+\sin 2x$

$y'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)+\sin 2x=1\Leftrightarrow f'(x)=1-\sin 2x\Rightarrow f(x)=x+\frac{1}{2}\cos 2x$

STUDY TIP

Bài toán ngược xác định hàm số $f(x)$ khi biết được $f'(x)$

Câu 26: Cho hàm số $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$. Khi đó $f'(x)$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 1. B. 2. C. 0. D. -1.

Đáp án C

Lời giải

Cách 1: $f'(x)=6\sin^5 x\cos x-6\cos^5 x\sin x+3(2\sin x\cos^3 x-2\cos x\sin^3 x)$

$=6\sin x\cos x(\sin^4 x-\cos^4 x+\cos^2 x-\sin^2 x)$

$=6\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x)=0$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính đạo hàm tại điểm x bất kì ta được kết quả $f'(x)=0$

STUDY TIP

Ta có thể rút gọn biểu thức rồi tính đạo hàm sau

Câu 27: Cho hàm số $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x; g(x)=\frac{1}{4}\cos 4x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $f'(x)-g'(x)=0$. B. $f(x)=g(x)+\frac{1}{4}$.

C. $2f'(x)-3g'(x)=1$. D. $3f'(x)+2g'(x)=-1$.

Đáp án A

Lời giải

Ta có:

$f'(x)=4\sin^3 x\cos x+4\cos^3 x(-\sin x)=4\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x)=-\sin 4x$.

$g'(x)=-\sin 4x$.

Vậy $f'(x)-g'(x)=0$

STUDY TIP

Dùng biến đổi lượng giác thì ta được $f(x)=g(x)+\frac{3}{4}$ do 2 hàm số khác nhau một hằng số nên cùng đạo hàm.

Câu 28: Cho hàm số $y=\cos^2 x+\sin x$. Phương trình $y'=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$

A. 1 nghiệm. B. 2 nghiệm. C. 3 nghiệm. D. 4 nghiệm.

Đáp án C

Lời giải

$y'=-2\cos x\sin x+\cos x=\cos x(1-2\sin x)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.;(k\in\mathbb{Z})$$

Vì $x\in(0;\pi)\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right\}$. Vậy có 3 nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$

STUDY TIP

Loại bài toán kết hợp giữa tính đạo hàm và giải phương trình lượng giác

Câu 29: Cho hàm số $y=(m+1)\sin x+m\cos x-(m+2)x+1$. Tìm giá trị của *m* để $y'=0$ có nghiệm?

A. $\left[\begin{array}{l}m\le -1\\ m\ge 3\end{array}\right.$. B. $m\ge 2$. C. $-1\le m\le 3$. D. $m\le -2$.

Đáp án A

Lời giải

$y'=(m+1)\cos x-m\sin x-(m+2)$

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow(m+1)\cos x-m\sin x=(m+2)$

Điều kiện phương trình có nghiệm là $a^2+b^2\ge c^2$

$$\Leftrightarrow(m+1)^2+m^2\ge(m+2)^2\Leftrightarrow m^2-2m-3\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -1\\ m\ge 3\end{array}\right.$$

STUDY TIP

Phương trình bậc nhất với $\sin x$ và $\cos x$ $a\sin x+b\cos x=c$ có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+b^2\ge c^2$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Dạng 1: Đạo hàm của hàm đa thức – hữu tỷ - căn thức và hàm hợp

Câu 19. Đạo hàm của hàm số $y=2x^3-9x^2+12x-4$ là:

A. $5x^2-11x-4$. B. $6x^2-18x+12$. C. $6x^2+18x-12$. D. $6x^2-9x-12$.

Câu 20. Đạo hàm của hàm số $y=-x^3+3mx^2+3(1-m^2)x+m^3-m^2$ (với m là tham số) bằng:
A. $-3x^2+6mx+1-m^2$. B. $-x^2+3mx-1-3m$.
C. $3x^2-6mx-3+3m^2$. D. $-3x^2+6mx+3-3m^2$.

Câu 21. Đạo hàm của hàm số $y=(x^2+1)^2(3+5x^2)$ bằng biểu thức có dạng ax^5+bx^3+cx. Khi đó $a-b+c$ bằng:
A. 0. B. 1. C. 2. D. 5.

Câu 22. Đạo hàm của hàm số $y=(x^2+1)(x^3+2)(x^4+3)$ bằng biểu thức có dạng $ax^8+bx^6+cx^5+15x^4+dx^3+ex^2+gx$. Khi đó $a-b+c-d+e-g$ bằng:
A. 0. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 23. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{a}{(x-1)^2}$. Khi đó a nhận giá trị nào sau đây?
A. $a=-2$. B. $a=-1$. C. $a=-3$. D. $a=3$.

Câu 24. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x-3}{2(x-1)}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax^2+bx}{2(x-1)^2}$. Khi đó $a.b$ bằng:
A. -2. B. -1. C. 4. D. 6.

Câu 25. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x-1}{x^2-5x+2}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax^2+bx+c}{(x-5x+2)^2}$. Khi đó $a+b+c$ bằng:
A. -1. B. 2. C. 3. D. -2.

Câu 26. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x+3}{x^3-2}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{(x^3-2)^2}$. Khi đó $a+b+c+d+e$ bằng:
A. -12. B. -10. C. 8. D. 5.

Câu 27. Đạo hàm của hàm số $y=(x-2)\sqrt{x^2+1}$ biểu thức có dạng $\dfrac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x^2+1}}$. Khi đó $a.b.c$ bằng:
A. -2. B. -4. C. -6. D. -8.

Câu 28. Đạo hàm của hàm số $y=(x^6-3x^4)^2$ bằng biểu thức nào sau đây?
A. $12x^{11}-52x^9+64x^7$. B. $12x^{11}-73x^9+49x^7$.
C. $12x^{11}-62x^9+70x^7$. D. $12x^{11}-60x^9+72x^7$.

Câu 29. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{5x^2-2x+1}$ biểu thức có dạng $\dfrac{ax+b}{\sqrt{5x^2-2x+1}}$. Khi đó $T=\dfrac{a}{b}$ bằng:

A. $T=-5$. B. $T=5$. C. $T=-10$. D. $T=10$.

Câu 30. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\dfrac{1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}$. B. $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-1}}$.

C. $\dfrac{1}{4\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{4\sqrt{x-1}}$. D. $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Câu 31. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ biểu thức có dạng $\dfrac{ax+b}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. Khi đó $P=a.b$ bằng:

A. $P=1$. B. $P=-1$. C. $P=2$. D. $P=-2$.

Câu 32. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{x}-\frac{1}{x}}{x-\sqrt{x}}$ bằng biểu thức nào sau đây?.

A. $\dfrac{4\sqrt{x}-2x^2-3}{2\sqrt{x^3}(x-\sqrt{x})^2}$. B. $\dfrac{4\sqrt{x}+2x^2-3}{x\sqrt{x}(x-\sqrt{x})^2}$. C. $\dfrac{\sqrt{x}-2x^2-2}{2x\sqrt{x}(x-\sqrt{x})^2}$. D. $\dfrac{\sqrt{x}+2x^2+1}{2x\sqrt{x}(x-\sqrt{x})^2}$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{3x^2+2x+1}{2\sqrt{3x^2+2x+1}}$. Giá trị $f'(0)$ là:

A. 0. B. 1. C. $\dfrac{1}{2}$. D. Không tồn tại.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1-x}{2x+1}$ thì $f'(-\dfrac{1}{2})$ có giá trị là:

A. 0. B. 3. C. -3 . D. Không tồn tại.

Câu 17: Cho $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x-2)\cdots(x-2017)}$ thì $f'(0)$

A. $\dfrac{1}{2017!}$. **B.** $2017!$. **C.** $-\dfrac{1}{2017!}$. **D.** $-2017!$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2 & khi\, x\geq 1 \\ 2x-1 & khi\, x<1 \end{cases}$. Hãy chọn đáp án sai:

A. $f'(1)=1$. **B.** Hàm số có đạo hàm tại $x_0=1$.

C. Hàm số liên tục tại $x_0=1$. **D.** $f'(x)=\begin{cases} 2x & khi\, x\geq 1 \\ x & khi\, x<1 \end{cases}$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$. Tập các giá trị của x để $f'(x)>0$ là:

A. $(-\infty;0)$. **B.** $\left[-2;\sqrt{2}\right)$. **C.** $(-2;2]$. **D.** $\left(-2;\sqrt{2}\right)$

Câu 20: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x}{x^3+1}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x)\le 0$ là:

A. $\left(-\infty;\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$. **B.** $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$. **D.** $\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}};+\infty\right)$.

Câu 21: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}.\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$.

B. $\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}.\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$.

C. $\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}.\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$.

D. $\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1-\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}.\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$.

Câu 22: Cho $f(x)=x^5+x^3-2x-3$. Tính $f'(1)+f'(-1)+4f'(0)$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+x^2$. Tính $f'(1)$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 24: Cho hàm số $y=\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$. Hàm số có đạo hàm $f'(x)$ bằng:

A. $\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$. **B.** $x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

C. $\dfrac{3}{2}\left(-\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$. **D.** $\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$.

Câu 25: Đạo hàm của hàm số $y=\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}.\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$.

B. $2\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.\dfrac{-1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$.

C. $\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\dfrac{-1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$.

D. $2\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$.

Câu 26: Cho hàm số $y=\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^3$. Đạo hàm y' bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\dfrac{3(2x+1)^2}{(x-1)^4}$. **B.** $\dfrac{(2x+1)^2}{(x-1)^4}$. **C.** $\dfrac{-(2x+1)^2}{(x-1)^4}$. **D.** $\dfrac{-9(2x+1)^2}{(x-1)^4}$.

Câu 27: Cho hàm số $y=(m-1)x^3-3(m+2)x^2-6(m+2)x+1$. Tập giá trị của m để $y'\geq 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ là

A. $[3;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\left[4\sqrt{2};+\infty\right)$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+1}{x+1} & khi\,x\geq 0\\ x^2+ax+b & khi\,x<0\end{cases}$. Tìm a, b để hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

A. $a=0$, $b=11$. **B.** $a=10$, $b=11$. **C.** $a=20$, $b=21$. **D.** $a=0$, $b=1$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)=-\dfrac{mx^2}{3}+\dfrac{mx^2}{2}-(3-m)x+2$. Tìm m để $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

A. $m\in\left[\dfrac{3}{2};2\right]$. **B.** $m\in(-\infty;3)$. **C.** $m\in\left(\dfrac{12}{5};3\right)$. **D.** $m\in\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}$. Đạo hàm $f'(x)$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2} & khi\,x<-1,x>1\\ 1 & khi-1<x<1\end{cases}$.

B. $\begin{cases}\dfrac{2}{x^2} & khi\,x<-1,x>1\\ 1 & khi-1\leq x\leq 1\end{cases}$.

C. $\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & khi\,x<-1,x>1\\ -1 & khi-1\leq x\leq 1\end{cases}$.

D. $\begin{cases}-\dfrac{3}{x^2} & khi\,x<-1,x>1\\ 2 & khi-1<x<1\end{cases}$.

Dạng 2: Đạo hàm các hàm số lượng giác

Câu 31: Hàm số $y=\cos x.\sin^2 x$ có đạo hàm là biểu thức nào sau đây?

A. $\sin x\left(3\cos^2 x+1\right)$. **B.** $\sin x\left(3\cos^2 x-1\right)$. **C.** $\sin x\left(\cos^2 x-1\right)$. **D.** $\sin x\left(\cos^2 x+1\right)$.

Câu 32: Hàm số $y=\frac{1}{2}(1+\tan x)^2$ có đạo hàm là biểu thức nào sau đây?

A. $(1+\tan x)^2$.
B. $1+\tan^2 x$.
C. $(1+\tan x)(1+\tan^2 x)$.
D. $1+\tan x$.

Câu 33: Đạo hàm của hàm số $y=\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$ là biểu thức nào sau đây?

A. $-\frac{1+\sin^2 x}{2\sin^3 x}$.
B. $-\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$.
C. $\frac{1+\sin^2 x}{2\sin^3 x}$.
D. $\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)=\frac{\cos x}{1-\sin x}$. Giá trị của $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)-f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ là

A. $\frac{4}{3}$.
B. $\frac{4}{9}$.
C. $\frac{8}{9}$.
D. $\frac{8}{3}$.

Câu 35: Hàm số $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$ có $y'=\frac{ax^2+bx+c}{(\cos x+x\sin x)^2}$. Hỏi $T=a+b+c$ bằng:

A. 1.
B. 2.
C. 0.
D. -1.

Câu 36: Cho hàm số $y=\cos 2x.\sin^2\frac{x}{2}$. Xét hai kết quả:

(I) $y'=-2\sin 2x.\sin^2\frac{x}{2}+\sin x.\cos 2x$ (II) $y'=2\sin 2x.\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x.\cos 2x$.

Cách nào đúng?

A. Chỉ (I).
B. Chỉ (II).
C. Cả 2 đều đúng.
D. Không có cách nào.

Câu 37: Đạo hàm của hàm số $y=\cot^2(\cos x)+\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}$ là biểu thức nào sau đây?

A. $-2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)}+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}}$.
B. $2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)}\text{sinx}+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}}$.
C. $-2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)}+\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}}$.
D. $2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)}\text{sinx}+\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}}$.

Câu 38: Đạo hàm của hàm số $y=\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}$ là biểu thức nào sau đây?

A. $(x\cos x-\sin x)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.
B. $(x\cos x+\sin x)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.
C. $(x\sin x-\cos x)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.
D. $(x\sin x+\cos x)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

Câu 39: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{|\sin x|}$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\dfrac{-\cot x}{|\sin x|}$. **B.** $\dfrac{\cot x}{|\sin x|}$. **C.** $\dfrac{\cot x}{\sin x}$. **D.** $\dfrac{-\cot x}{\sin x}$.

Câu 40: Cho hàm số $y=\sin\left(\cos^2 x\right).\cos\left(\sin^2 x\right)$. Đạo hàm $y'=a.\sin 2x.\cos\left(\cos 2x\right)$. Giá trị của a là số nguyên thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(-1;5)$. **C.** $(-3;2)$. **D.** $(4;7)$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm với mọi x và thỏa mãn $f(2x)=4\cos x.f(x)-2x$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0)=0$. **B.** $f'(0)=1$. **C.** $f'(0)=-2$. **D.** $f'(0)=3$.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x)=0$ trên đường tròn lượng giác ta được mấy điểm phân biệt?

A. 1 điểm. **B.** 2 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** 6 điểm.

Câu 43: Cho hàm số $y=\cot 2x$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $y'+2y^2+2=0$. **B.** $y'-2y^2-2=0$. **C.** $y'+3y^2+5=0$. **D.** $y'+3y^2+7=0$.

Câu 44: Tìm số nguyên dương n sao cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^n.\sin\dfrac{1}{x} & khi\, x\neq 0 \\ 0 & khi\, x=0 \end{cases}$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

A. $n=1$. **B.** $n=2$. **C.** $n\geq 2$. **D.** $n=3$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)=\sin^2 x+\sin 2x$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$.

A. $m=-\sqrt{2}$, $M=\sqrt{2}$. **B.** $m=-1$, $M=1$. **C.** $m=-2$, $M=2$. **D.** $m=-\sqrt{5}$, $M=\sqrt{5}$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)=-\cos x+\sin x-\cos 2x$. Phương trình $f'(x)=1$ tương đương với phương trình nào sau đây?

A. $\sin x=0$. **B.** $\sin x-1=0$.

C. $(\sin x-1)(\cos x-1)=0$. **D.** $\cos x=0$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)=\sin^2 x+3\cos^2 x$. Tập giá trị của hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ là:

A. $[-4;4]$. **B.** $[-2;2]$. **C.** $[-1;1]$. **D.** $[-3;3]$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)=2\dfrac{\cos^3 x}{3}+\sin^3 x-2\cos x-3\sin x$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x)$ trên đường tròn ta được mấy điểm phân biệt?

A. 1 điểm. **B.** 2 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** 6 điểm.

Câu 49: Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có đạo hàm là $\sin^2 x$?

A. $y=\dfrac{\sin^3 x}{3}$. **B.** $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\sin 2x$. **C.** $y=x-\dfrac{\sin^3 x}{3}$. **D.** $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2x$.

Câu 50: Hàm số nào sau đây có đạo hàm luôn bằng 0?

A. $y=1-\sin^2 x$. **B.** $y=\sin^2 x-\cos^2 x$.

C. $y=\sin^2 x+\cos^2 x$. **D.** $y=\cos 2x$.

Câu 51: Hàm số nào sau đây có đạo hàm $y'=x.\sin x$?

A. $y=x\cos x$. **B.** $y=x\cos x-\sin x$.

C. $y=\sin x-x\cos x$. **D.** $y=\dfrac{1}{2}x^2.\sin x$.

Câu 52: Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{\cos 2x}$. Chọn câu sai:

A. $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$. **B.** $f'(x)=\dfrac{-2\sin 2x}{3\sqrt[3]{\cos^2 2x}}$.

C. $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$. **D.** $3y^2.y'+2\sin 2x=0$.

Câu 53: Cho hàm số $y=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos x}}}$ với $x\in(0;\pi)$ có y' là biểu thức có dạng $a.\sin\dfrac{x}{8}$. Khi đó a nhận giá trị nào sau đây:

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $-\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{8}$. **D.** $-\dfrac{1}{8}$.

Câu 54: Cho hàm số $f(x)=\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}+x\right)-2\sin^2 x$. Hàm số có $f'(x)$ bằng:

A. 6. **B.** $2\sin 2x$. **C.** 0. **D.** $2\cos 2x$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Dạng 1: Đạo hàm của hàm đa thức

Câu 1: **Đáp án** **B.**

$y'=6x^2-18x+12$.

Câu 2: Đáp án D.

$y' = -3x^2 + 6mx + 3(1 - m^2)$.

Câu 3: Đáp án A.

$y' = 2(x^2+1) + 2x.(3+5x^2) + (x^2+1)^2.10x$

$= (4x^3+4x)(3+5x^2) + 10x^5 + 20x^3 + 10x$

$= 30x^5 + 52x^3 + 22x.$

$\Rightarrow a - b + c = 0$.

Câu 4: Đáp án C.

$y' = 2x(x^3+2)(x^4+3) + 3x^2(x^2+1)(x^4+3) + 4x^3(x^2+1)(x^3+2)$

$= 2x(x^7+2x^4+3x^3+6) + 3x^2(x^6+x^4+3x^2+3) + 4x^3(x^5+x^3+2x^2+2)$

$= 9x^8 + 7x^6 + 12x^5 + 15x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 12x.$

$\Rightarrow a - b + c - d + e - g = 3$.

Câu 5: Đáp án C.

Câu 6: Đáp án A.

$$y' = \frac{(-2x+3)(x-1) - (-x^2+3x-3)}{2(x-1)^2} = \frac{-x^2+2x}{2(x-1)^2}.$$

Câu 7: Đáp án D.

$$y' = \frac{(6x^2+3)(x^2-5x+2) - (2x^3+3x-1)(2x-5)}{(x^2-5x+2)^2} = \frac{-13x^2+10x+1}{(x^2-5x+2)^2}.$$

$\Rightarrow a + b + c = -2$.

Câu 8: Đáp án A.

$$y' = \frac{(-2x+2)(x^3-2) - 3x^2(-x^2+2x+3)}{(x^3-2)^2} = \frac{x^4-4x^3-9x^2+4x-4}{(x^3-2)^2}$$

$\Rightarrow a + b + c + d + e = -12$

Câu 9: Đáp án B.

$$y' = \sqrt{x^2+1} + (x-2).\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Câu 10: Đáp án D.

$y' = 2(x^6-3x^4)(6x^5-12x^3) = 12x^{11} - 60x^9 + 72x^7$.

Câu 11: Đáp án A.

$$y' = \frac{10x-2}{2\sqrt{5x^2-2x+1}} = \frac{5x-1}{\sqrt{5x^2-2x+1}} \Rightarrow T = \frac{a}{b} = -5.$$

Câu 12: Đáp án C.

Nhân liên hợp ta có: $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{4\sqrt{x+1}} - \frac{1}{4\sqrt{x-1}}$.

Câu 13: Đáp án A.

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+1}-(x-1).\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2+x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}} = \frac{x+1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}.$$

$\Rightarrow P = a.b = 1$.

Câu 14: Đáp án A.

$$y' = \frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)\left(x-\sqrt{x}\right)-\left(x+\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{2x\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{\left(x-\sqrt{x}\right)^2} = \frac{4\sqrt{x}-2x^2-3}{2x\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x}\right)^2}.$$

Câu 15: Đáp án C.

Cách 1: Tính $f'(x) = \frac{9x^4+6x^3-9x^2+8x+4}{4\left(3x^3+2x^2+1\right)\sqrt{3x^3+2x^2+1}} \Rightarrow f'(0) = 1$.

Cách 2: Dùng MTCT ta được kết quả.

Câu 16: Đáp án D.

Câu 17: Đáp án C.

Ta có: $f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)...(x-2017)-x\left[(x-1)(x-2)...(x-2017)\right]'}{\left[(x-1)(x-2)...(x-2017)\right]^2}$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{(-1)(-2)...(-2017)}{\left[(-1)(-2)...(-2017)\right]^2} = -\frac{1}{2017!}.$$

Câu 18: Đáp án A.

Ta có: $f(1)=1,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ $\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=1$.

Khi $x>1$: $f'(x) = 2x$.

$x<1$: $f'(x)=2$.

Với $x=1$, ta xét: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$; $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2(x-1)}{x-1}=2$.

Vậy $f'(1)=2$.

Câu 19: Đáp án B.

Điều kiện: $x\in[-2;2]$.

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}};\ f'(x)>0\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}>x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2\le x<0\\0\le x<\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow -2\le x<\sqrt{2}.$$

Câu 20: Đáp án D.

$$f'(x)=\frac{-2x^3+1}{\left(x^3+1\right)^2}\Rightarrow f'(x)\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}-2x^3+1\le 0\\x\ne -1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Câu 21: Đáp án A.

Ta có: $y=\sqrt{u}$ với $u=x+\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(x+\sqrt{x}\right)'\right]=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right].$$

Câu 22: Đáp án A.

Ta có: $f'(x)=5x^4+3x^2-2\Rightarrow f'(1)+f'(-1)+4f'(0)=4$.

Câu 23: Đáp án A.

Ta có: $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}+2x\Rightarrow f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

Câu 24: Đáp án D.

$$\text{Ta có: } f'(x)=3\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)=\frac{3}{2}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right).$$

Câu 25: Đáp án B.

Ta có: $y=u^2$ với $u=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

$$y'=2.\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)'=2.\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=2.\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\frac{-1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

.

Câu 26: Đáp án D.

Ta có: $y=u^3$, $u=\dfrac{2x+1}{x-1}$, $u'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}\Rightarrow y'=\dfrac{-9(2x+1)^2}{(x-1)^4}$.

Câu 27: Đáp án C.

$y'=3\left[(m-1)x^2-2(m+2)x-2(m+2)\right]$.

$y'\ge 0\Leftrightarrow (m-1)x^2-2(m+2)x-2(m+2)\ge 0$ (1)

Với $m=1$ thì $(1)\Leftrightarrow -6x-6\ge 0\Leftrightarrow x\le -1\Rightarrow m=1$ (loại).

Với $m\ne 1\Rightarrow (1)$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m>1\\ (m+2)3m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m$ vô nghiệm.

Câu 28: Đáp án D.

Với $x\ne 0$ hàm số luôn có đạo hàm.

Để hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải có đạo hàm tại $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b\Rightarrow b=1$.

Để hàm số liên tục tại $x=0\Rightarrow b=1$.

Xét $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{x^2+x+1}{x+1}-1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+ax+b-1}{x}=a$.

$\Rightarrow a=0$. Vậy $a=0$, $b=1$.

Câu 29: Đáp án C.

$f'(x)=-mx^2+mx-(3-m)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow -mx^2+mx-(3-m)=0$ (1).

Theo bài ra ta có: $\begin{cases}a\ne 0\\ \Delta>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m\ne 0\\ 5m^2-12m>0\\ \dfrac{3-m}{m}>0\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{12}{5}<m<3$.

Câu 30: Đáp án A.

Lập bảng dấu ta được: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & khi\, x<-1, x>1\\ x & khi -1\le x\le 1\end{cases}$.

- Với $x<-1$ hoặc $x>1\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

- Với $-1<x<1 \Rightarrow f'(x)=1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-1$ nên hàm số liên tục tại $x=-1$.

Xét $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=-1$, $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x=-1$.

Bằng cách tương tự ta cũng chỉ ra được hàm số không có đạo hàm tại $x=1$.

Vậy $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & khi\, x<-1, x>1 \\ x & khi -1<x<1 \end{cases}$.

Dạng 2: Đạo hàm các hàm số lượng giác

Câu 31: Đáp án B.

$y'=2\sin x.\cos^2 x-\sin^3 x=\sin x\left(3\cos^2 x-1\right)$.

Câu 32: Đáp án C.

$y'=(1+\tan x)(1+\tan x)'=(1+\tan x)\left(1+\tan^2 x\right)$.

Câu 33: Đáp án B.

$y'=\dfrac{-\sin^3 x-2\sin x.\cos x.\cos x}{2\sin^4 x}=-\dfrac{\sin^2 x+2\cos^2 x}{2\sin^3 x}=-\dfrac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$.

Câu 34: Đáp án A.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{1-\sin x} \Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-f'\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{3}$.

Câu 35: Đáp án A.

$y'=\dfrac{x\sin x(\cos x+x\sin x)-x\cos x(\sin x-x\cos x)}{(\cos x+x\sin x)^2}=\dfrac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2} \Rightarrow a=1,\ b=0,\ c=0$.

Vậy $T=a+b+c=1$.

Câu 36: Đáp án D.

$y'=-2\sin 2x.\sin^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin x.\cos 2x$.

Câu 37: Đáp án B.

$$y'=2\cot(\cos x)\left[\cot(\cos x)\right]'+\frac{\left(\sin x-\frac{\pi}{2}\right)'}{2\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}}=2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)}+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}}.$$

Câu 38: Đáp án A.

$$y'=\frac{x.\cos x-\sin x}{x^2}+\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}=\left(x.\cos x-\sin x\right)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

Câu 39: Đáp án A.

Ta có: $y=\frac{1}{\sqrt{\sin^2 x}}$ nên $y'=\frac{-2\sin x.\cos x}{\sin^2 x.\sqrt{\sin^2 x}}=-\frac{\cot x}{|\sin x|}$.

Câu 40: Đáp án C

$$y'=-2\sin x.\cos x.\cos(\cos^2 x).\cos(\sin^2 x)-2\sin x.\cos x.\sin(\cos^2 x).\sin(\sin^2 x)$$

$$=-\sin(2x).\cos(\cos^2 x-\sin^2 x)=-\sin(2x).\cos(\cos 2x)$$

$\Rightarrow a=-1$.

Câu 41. Đáp án B.

Lấy đạo hàm 2 vế ta có: $2f'(2x)-4\sin x.f(x)+4\cos x.f'(x)-2$

Thay $x=0\Rightarrow 2\cdot f'(0)=4\cdot f'(0)-2\Leftrightarrow f'(0)=1$.

Câu 42. Đáp án B.

$$f'(x)=\frac{-\sin x.\sqrt{\cos 2x}-\cos x\frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}(-\sin 2x)}{\cos 2x}=\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos 2x}}$$

$f'(x)=0\Rightarrow \sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi, k\in Z$.

Ta biểu diễn được 2 điểm phân biệt trên đường tròn lượng giác.

Câu 43. Đáp án A.

$y'=-2\left(1+\cot^2 2x\right)$. Do đó: $y'+2y^2+2=-2\left(1+\cot^2 2x\right)+2\cot^2 2x+2=0$

Câu 44. Đáp án C.

Ta có: $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^n\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(x^{n-1}\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=f(0)=0\ (1)$$

Với $n=1$ thì giới hạn (1) không tồn tại và $n\geq 2$ thì: $\lim_{x\to 0}\left(x^{n-1}\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=0$.

Vậy hàm số có đạo hàm trên R khi $n\geq 2$.

Câu 45. Đáp án D.

$f'(x)=2\sin x.\cos x+2\cos 2x=\sin 2x+2\cos 2x$

Đặt $t=\sin 2x+2\cos x$.

Điều kiện phương trình có nghiệm là: $1^2+2^2\geq t^2\Leftrightarrow -\sqrt{5}\leq t\leq\sqrt{5}$.

Vậy $M=\sqrt{5}, m=-\sqrt{5}$.

Câu 46. Đáp án C.

$f'(x)=\sin x+\cos x+2\sin 2x$

$f'(x)=1 \Leftrightarrow \sin x+\cos x+2\sin 2x=1$

Đặt $t=\sin x+\cos x \quad \left(|t|\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow \sin 2x=t^2-1$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow 2t^2+t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{3}{2} \quad (l)\end{array}\right.$

Với $t=1 \Leftrightarrow \sin x+\cos x=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. (k\in Z)$.

Nghiệm trên cũng là nghiệm của phương trình $(\sin x-1)(\cos x-1)=0$.

Câu 47. Đáp án B.

$f'(x)=-2\sin 2x \Rightarrow -2\le f(x)\le 2$

Vậy tập giá trị của hàm số $f'(x)$ là $[-2;2]$.

Câu 48. Đáp án B.

$f'(x)=2\sin^3 x-3\cos^3 x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \tan^3 x=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \tan x=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$.

Vậy có hai điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 49. Đáp án D.

$y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2x \Rightarrow y'=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x=\sin^2 x$

Câu 50. Đáp án C.

$y=\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow y'=0 \ \forall x$.

Câu 51. Đáp án C.

$y=\sin x-\cos x \Rightarrow y'=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$

Câu 52. Đáp án C.

$f(x)=\sqrt[3]{\cos 2x} \Rightarrow f^3(x)=\cos 2x \Rightarrow 3.f^2(x).f'(x)=(\cos 2x)' \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2\sin 2x}{3\sqrt[3]{\cos^2 2x}}$

Nên **B** đúng. Vì $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt[3]{\cos\pi}=-1$ nên **C** sai.

Câu 53. Đáp án D.

Ta có: $\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos x}=\sqrt{\cos^2\dfrac{x}{2}}=\cos\dfrac{x}{2}$

Tương tự ta có biểu thức tiếp theo: $y=\sqrt{\cos^2\frac{x}{8}}=\cos\frac{x}{8}\Rightarrow y'=-\frac{1}{8}\sin\frac{x}{8}$

Câu 54. Đáp án C.

$$f'(x)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2x\right)-\sin\left(\frac{4\pi}{3}+2x\right)-2\sin 2x$$

$$=-2\cos\frac{2\pi}{3}.\sin 2x-2\cos\frac{4\pi}{3}.\sin 2x-2\sin 2x=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\right)2\sin 2x=0$$

VI PHÂN. ĐẠO HÀM CẤP CAO

A. LÝ THUYẾT

1. Vi phân của hàm số

a) Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ và có đạo hàm tại $x\in(a;b)$. Ta gọi tích $f'(x).\Delta x$ (hoặc $y'.\Delta x$) là vi phân của hàm số $y=f(x)$ tại x ứng với số gia Δx.

Kí hiệu: $\mathrm{d}f(x)$ hoặc $\mathrm{d}y$.

Vậy ta có: $\mathrm{d}y=y'.\Delta x$ hoặc $\mathrm{d}f(x)=f'(x).\Delta x$.

b) Ứng dụng của vi phân vào phép tính gần đúng

Do $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Với $|\Delta x|$ đủ nhỏ thì $f'(x_0)\approx\frac{\Delta y}{\Delta x}\Leftrightarrow\Delta y=f'(x_0).\Delta x\Leftrightarrow f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0).\Delta x$.

STUDY TIP

Với $y=x$ ta có: $\mathrm{d}y=(x)'.\Delta x\Leftrightarrow \mathrm{d}x=\Delta x$. Vậy $\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$.

2. Đạo hàm cấp cao

a) Đạo hàm cấp hai

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Khi đó đạo hàm của hàm số $f'(x)$ nếu có, được gọi là đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)$.

Kí hiệu: y'' hay $f''(x)$. Viết: $f''(x)=\left[f'(x)\right]'$.

b) Đạo hàm cấp n.

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm cấp $n-1$ ($n \in N, n \geq 4$). Kí hiệu $f^{(n-1)}\left(x\right)$. Nếu $f^{(n-1)}\left(x\right)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của $f\left(x\right)$.

Kí hiệu: $f^{(n)}\left(x\right)$ hoặc $y^{(n)}$. Viết: $f^{(n)}\left(x\right)=\left[f^{(n-1)}\left(x\right)\right]'$.

STUDY TIP

Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y=f\left(x\right)$ là $f'''\left(x\right)$ hoặc $f^{(3)}\left(x\right)$ hay y'''.

c) Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Xét một vật chuyển động xác định bởi phương trình $s=f\left(t\right)$ với $f\left(t\right)$ là hàm số có đạo hàm.

Khi đó gia tốc tức thời $\left(\gamma\right)$ của chuyển động tại thời điểm t là đạo hàm cấp hai của hàm số $f\left(t\right)$ là $\gamma\left(t\right)=f''\left(t\right)$.

STUDY TIP

Vận tốc tức thời tại thời điểm t là $v\left(t\right)=f'\left(t\right)$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ VI PHÂN VÀ ĐẠO HÀM CẤP CAO.

Dạng 1. Vi phân hàm số.

Phương pháp:

- Tính vi phân của hàm số $f\left(x\right)$ tại x_0 cho trước: $df\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right).\Delta x$.
- Tính vi phân của hàm số $f\left(x\right)$: $df\left(x\right)=f'\left(x\right).dx$.
- Dùng vi phân tính gần đúng.

Câu 30: Vi phân của hàm số $f\left(x\right)=3x^2-x$ tại điểm $x=2$ ứng với $\Delta x=0,1$ là:

A. $-0,07$. **B.** 10. **C.** $1,1$. **D.** $-0,4$.

Lời giải

Đáp án C.

Ta có: $f'\left(x\right)=6x-1 \Rightarrow f'\left(2\right)=11 \Rightarrow df\left(2\right)=f'\left(2\right).\Delta x=11.0,1=1,1$.

Câu 31: Vi phân của hàm số $f\left(x\right)=\sin 2x$ tại điểm $x=\frac{\pi}{3}$ ứng với $\Delta x=0,01$ là:

A. $-1,1$. **B.** 10. **C.** $0,1$. **D.** $-0,01$.

Lời giải

Đáp án D.

$f'\left(x\right)=2\cos 2x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1 \Rightarrow df\left(\frac{\pi}{3}\right)=f'\left(\frac{\pi}{3}\right).\Delta x=-0,01$.

STUDY TIP

Việc tính vi phân của hàm số tại một điểm x_0 chính là tích của đạo hàm tại một điểm x_0 và số gia Δx tương ứng.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$. Biểu thức $0,01.f'(0,01)$ là số nào?

A. 9. **B.** -9. **C.** 90. **D.** -90.

Lời giải

Đáp án D.

$f'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow f'(0,01)=-9000\Rightarrow 0,01f(0,01)=-90$.

Câu 33: Vi phân của hàm số $y=\sqrt{x\sqrt{x}}$ là:

A. $dy=\dfrac{3}{4\sqrt{\sqrt{x}}}dx$. **B.** $dy=\dfrac{3}{2\sqrt{\sqrt{x}}}dx$. **C.** $dy=\dfrac{5}{4\sqrt{x}}dx$. **D.** $dy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$.

Lời giải

Đáp án A.

. $y'=\dfrac{\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x\sqrt{x}}}=\dfrac{3\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sqrt{x}}}=\dfrac{3}{4\sqrt{\sqrt{x}}}\Rightarrow \mathrm{dy}=\dfrac{3}{4\sqrt{\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$

STUDY TIP

Việc tính vi phân của hàm số $f(x)$ chính là tích của đạo hàm với dx tương ứng.

Câu 34: Vi phân của hàm số $y=\dfrac{1}{(1+\tan x)^2}$ là:

A. $dy=\dfrac{2}{\cos^2 x(1+\tan x)^3}dx$. **B.** $dy=\dfrac{-2}{\cos^2 x(1+\tan x)^3}dx$.

C. . $\mathrm{dy}=\dfrac{1}{\cos x(1+\tan x)^3}\mathrm{d}x$. **D.** $\mathrm{dy}=\dfrac{-1}{\cos^2 x(1+\tan x)^2}\mathrm{d}x$.

Lời giải

Đáp án B.

Ta có: $dy=\dfrac{-2(1+\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}}{(1+\tan x)^4}dx=\dfrac{-2}{\cos^2 x(1+\tan x)^3}dx$

Câu 35: Cho hàm số $y=\sqrt{1+\cos^2 2x}$. Chọn kết quả đúng:

A. $df(x)=\dfrac{-\sin 4x}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$. **B.** $df(x)=\dfrac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$.

C. $df(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$. **D.** $df(x)=\dfrac{-\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$.

Lời giải

Đáp án B.

Ta có: $df(x)=\dfrac{\left(1+\cos^2 2x\right)'}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx=\dfrac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$

STUDY TIP

Có thể sử dụng MTCT để tìm đạo hàm của hàm số sau đó ta cũng được kết quả của tính vi phân.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+x & khi\ x\ge 0 \\ x & khi\ x<0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là sai:

A. $f'(0^+)=1$.

B. $f'(0^-)=1$.

C. $df(0)=dx$.

D. Hàm số không có vi phân tại $x=0$.

Lời giải

Đáp án D.

Ta có: $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+x}{x}=1; f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=1$ và $df(0)=dx$.

STUDY TIP

Với hàm số có nhiều biểu thức việc tính đạo hàm của hàm ta dùng định nghĩa.

Câu 37: Cho hàm số $y=x+\sqrt{x^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng:

A. $\sqrt{1+x^2}.dy-ydx=0$.

B. $\sqrt{1+x^2}.dx-dy=0$.

C. $xdx+\sqrt{1+x^2}.dy=0$.

D. $\sqrt{1+x^2}.dy+xy=0$.

Lời giải

Đáp án A.

Ta có: $dy=y'dx\Rightarrow y'=\dfrac{dy}{dx}$ mà

$$y'=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow\sqrt{x^2+1}\cdot\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0.$$

Câu 38: Dùng vi phân tính gần đúng $\sqrt[3]{26,7}$ có giá trị là:

A. $2,999$.

B. $2,98$.

C. $2,97$.

D. $2,89$.

Lời giải

Đáp án A.

Xét $f(x)=\sqrt[3]{x}$ thì $f'(x)=\dfrac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}}$. Cho $x_0=27,\ \Delta x=-0,3$.

Theo công thức gần đúng $f(x_0+\Delta x)\approx f'(x_0).\Delta x+f(x_0)$

$\Rightarrow \sqrt[3]{27,3} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{27}(-0,3) \approx 2,999.$

STUDY TIP

Sử dụng vi phân để tính gần đúng ta xét hàm số $f(x)$ và chọn x_0, Δx sao cho phù hợp.

Câu 39: Dùng vi phân tính gần đúng $\sin 29°$ có giá trị là:

A. $0,4849$. B. $0,5464$. C. $0,4989$. D. $0,4949$.

Đáp án A.

Lời giải

Xét $f(x) = \sin x$ với $29° = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}$ (rad).

Có $f'(x) = \cos x$.

Chọn $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = -\frac{\pi}{180} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right).\left(-\frac{\pi}{180}\right) \approx 0,4849$.

DẠNG 2. Tính đạo hàm cấp cao và ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai.
Phương pháp:

- Tính đạo hàm cấp cao: Áp dụng trực tiếp định nghĩa:
  $y'' = (y')'$, $y''' = (y'')', \dots, y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.
- Tính đạo hàm cấp n: Trước tiên ta tính đạo hàm cấp 1, cấp 2, ... sau đó dự đoán công thức tổng quát của $f^{(n)}(x)$.
- Chứng minh đẳng thức có chứa đạo hàm: Tính đến đạo hàm cấp cao nhất có trong đẳng thức rồi thay thế vào vị trí tương ứng và biến đổi cho ta được kết quả.
- Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai: Gia tốc tức thời (γ) tại thời điểm t là đạo hàm cấp 2 của hàm số $s = f(t)$.

Câu 40: Tính y'', biết $y = x\sqrt{1+x^2}$.

A. $y'' = \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. B. $y'' = \frac{2x(3+2x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

C. $y'' = \frac{x(3-2x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2}}$. D. $y'' = \frac{x(1+x^2)}{2\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Đáp án A

Lời giải

$$y' = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y'' = (y')' = \frac{4x(1+x^2) - x(1+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

STUDY TIP

Sau khi tính được đạo hàm bậc nhất y' ta có thể sử dụng MTCT với chức năng: $\left(\frac{d}{dx}(\ldots)\Big|_x\right)$ để kiểm tra và tính được kết quả.

Câu 41: Cho $f(x)=(2x-3)^5$. Tính $f'''(3)$.

A. 4230. B. 4320. C. 4204. D. 4132.

Đáp án B.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=10(2x-3)^4$, $f''(x)=80(2x-3)^3$, $f'''(x)=480(2x-3)^2$.

$\Rightarrow f'''(3)=4320$

STUDY TIP

$$f''(x)=\left[f'(x)\right]';\ f'''(x)=\left[f''(x)\right]'$$

$f'''(x)=480(2x-3)^2 \Rightarrow f'''(3)=4320$

Cách khác sử dụng chức năng $\frac{dy}{dx}(\square)\Big|_{x=\square}$ nhập biểu thức đạo hàm của $f''(x)$ tại điểm $x=2$ rồi so sánh kết quả ta được đáp án B

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=\frac{1}{x}$.Tính $y^{(4)}$

A. $y^{(4)}=\frac{-4}{x^5}$. **B.** $y^{(4)}=\frac{1.2.3.4}{x^5}$. **C.** $y^{(4)}=\frac{-4!}{x^5}$. **D.** $y^{(4)}=\frac{-1.2.3.4}{x^6}$.

Đáp án B

Lời giải:

$$y'=-\frac{1}{x^2}, y''=\frac{1.2}{x^3}, y^{(3)}=\frac{1.2.3}{x^4}\Rightarrow y^{(4)}=\frac{(-1)^4.4!}{x^{4+1}}=\frac{4!}{x^5}$$

STUDY TIP

Tổng quát: $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}}$

Ví dụ 4. Đạo hàm cấp n của hàm số $y=\frac{1}{ax+b}, a\neq 0$ là:

A. $y^{(n)}=\frac{2^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$. **B.** $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.a^n.n!}{(x+1)^{n+1}}$. **C.** $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$. **D.** $y^{(n)}=\frac{(-1)^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

Đáp án D

Lời giải:

$y' = -\dfrac{a}{(ax+b)^2}, y'' = \dfrac{2a^2}{(ax+b)^3}, y''' = \dfrac{-a^3.2.3}{(ax+b)^4}$

Dự đoán công thức $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$

Nhận xét: Việc dự đoán công thức ta đã được ngay kết quả của bài toán. Tuy nhiên để hiểu rõ và chính xác hơn ta có thể chứng minh công thức tổng quát bằng phương phức quy nạp toán học (bạn đọc tự làm)

STUDY TIP

Phương pháp quy nạp: ta cần chứng minh mệnh đề $P(n), n \in N^*$

+ Kiểm tra với $n = 1, 2\ldots$

+ Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, ta chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n = k+1$.

Ví dụ 5. Đạo hàm cấp ba của hàm số $y = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ là:

A. $\dfrac{-6}{(x+1)^4}$. **B.** $\dfrac{-4}{(x+1)^3}$. **C.** $\dfrac{6}{(x+1)^3}$. **D.** $\dfrac{-12}{(x+1)^4}$.

Đáp án A

Lời giải :

Ta phân tích $y = x + \dfrac{1}{x+1}$

$\Rightarrow y' = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}, y'' = \dfrac{2}{(x+1)^3}, y''' = \dfrac{-6}{(x+1)^4}$.

Nhận xét: Với hàm phân thức bậc của tử cao hơn hoặc bằng bậc của mẫu thì ta chia tách phân số và đưa về các phân số dạng $\dfrac{A}{ax+b}$

Ví dụ 6. Đạo hàm cấp 4 của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x^2-5x+6}$ là :

A. $y^{(4)} = \dfrac{7.4!}{(x-3)^5} - \dfrac{5.4!}{(x-2)^5}$. **B.** $y^{(4)} = \dfrac{5.4!}{(x-3)^5} - \dfrac{2.4!}{(x-2)^5}$.

C. $y^{(4)} = \dfrac{5.4!}{(x-2)^5} - \dfrac{7.4!}{(x-3)^5}$. **D.** $y^{(4)} = \dfrac{7}{(x-3)^5} - \dfrac{5}{(x-2)^5}$.

Đáp án A

Lời giải :

$y = \dfrac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{7}{x-3} - \dfrac{5}{x-2}$. Mà $\left(\dfrac{1}{x-2}\right)^{(4)} = \dfrac{(-1)^4.4!}{(x-2)^5} = \dfrac{4!}{(x-2)^5}$

$\left(\dfrac{1}{x-3}\right)^{(4)} = \dfrac{(-1)^4.4!}{(x-3)^5} = \dfrac{4!}{(x-3)^5}$

$\Rightarrow y^{(4)} = \dfrac{7.4!}{(x-3)^5} - \dfrac{5.4!}{(x-2)^5}$

Nhận xét: Với các hàm phân thức có bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì ta cố gắng đưa mẫu số về dạng tích và phân tích phân số thành tổng, hiệu các phân số dạng $\dfrac{A}{ax+b}$

STUDY TIP

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

Các hằng số A,B tìm được bằng cách quy đồng và đồng nhất hệ số 2 vế

Ví dụ 7. Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y=\sin x$ là:

A. $y^{(3)}=\sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)$. **B.** $y^{(3)}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. **C.** $y^{(3)}=\sin\left(x+\pi\right)$. **D.** $y^{(3)}=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$.

Đáp án D

Lời giải:

Ta có: $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\pi\right)=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$

$y'''=\cos\left(x+\pi\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$

STUDY TIP

Tổng quát:

$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$; $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$ (với $n\ge 1,\ n\in N^*$)

$\left[\sin(ax+b)\right]^{(n)}=a^n.\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$

$\left[\cos(ax+b)\right]^{(n)}=a^n.cos\left[ax+b+\frac{n\pi}{2}\right]$

Ví dụ 8. Đạo hàm cấp 4 của hàm số $y=\sin^4 x$ là :

A. $-8\cos 2x+32\cos 4x$. **B.** $4\cos 2x+16\cos 4x$. **C.** $8\cos 2x-12\cos 2x$. **D.** $6\cos 2x-32\cos 4x$.

Đáp án A

Lời giải :

Ta có: $y=\sin^4 x=\frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$

$\Rightarrow y'=\sin 2x-\frac{1}{2}\sin 4x$,

$y''=2\cos 2x-2\cos 4x$,

$y'''=-4\sin 2x+8\sin 4x$,

$y^{(4)}=-8\cos 2x+32\cos 4x$.

STUDY TIP

Đối với hàm lượng giác, khi tính đạo hàm bậc cao thì ta biến đổi hạ bậc hoặc biến đổi từ tích thành tổng để đưa về bậc nhất, $\sin(ax+b),\cos\left(ax+b\right)$.

Ví dụ 9. Đạo hàm cấp 4 của hàm số $y=\sin 5x.\sin 3x$ là:

A. $y^{(4)}=-2048\cos 8x+8\cos 2x$. **B.** $y^{(4)}=2048\cos 8x-8\cos 2x$.

C. $y^{(4)}=1024\cos 16x+4\cos 4x$. **D.** $y^{(4)}=2048\cos 8x-4\cos 4x$.

Đáp án. A.

Lời giải :

Ta có $y=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 8x)\Rightarrow y^{(4)}=-2048\cos 8x+8\cos 2x$.

STUDY TIP

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

$\sin x.\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]$

Ví dụ 10. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-12x-1$. Tập hợp các giá trị x để đạo hàm cấp 2 của $f(x)$ không âm là :

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$. **B.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Đáp án. **D.**

Lời giải:

$f'(x)=x^2+x-12, f''(x)=2x+1$ Do đó: $f''(x)\geq 0\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 11. Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình : $s=t^3-3t^2+5t+2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t=3$ là:

A. $24m/s^2$. **B.** $17m/s^2$. **C.** $14m/s^2$. **D.** $12m/s^2$.

Đáp án D

Lời giải:

Gia tốc chuyển động tại $t=3s$ là $s''(3)$

Ta có: $s'(t)=3t^2-6t+5$

$s''(t)=6t-6\Rightarrow s''(3)=12m/s^2$.

STUDY TIP

Bài toán vận dụng ý nghĩa cơ học của đạo hàm bậc 2. Gia tốc tức thời (γ) tại thời điểm $t_0:\gamma(t_0)=s''(t_0)$

Ví dụ 12. Cho hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $y^3.y''+1=0$. **B.** $y^2.y''-1=0$. **C.** $3y^2.y''+1=0.$. **D.** $2y^3.y''+3=0.$

Đáp án A

Lời giải :

Ta có: $y'=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $y''=-\frac{1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$

Thay vào: $y^3.y''+1=\sqrt{(2x-x^2)^3}.\frac{(-1)}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}+1=-1+1=0.$

Ví dụ 13. Cho hàm số $y=\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x\cos x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $2y''+y=0.$ **B.** $y''+y=0.$ **C.** $y''-y=0.$ **D.** $2y''-3y=0.$

Lời giải :

Ta có : $y=\dfrac{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)}{1-\sin x\cos x}=\sin x+\cos x$

$\Rightarrow y'=\cos x-\sin x, y''=-\sin x-\cos x$

$\Rightarrow y''+y=0.$

STUDY TIP

Với các biểu thức lượng giác phức tạp ta cần biến đổi rút gọn rồi sau đó tính đạo hàm cấp cao

Ví dụ 14. Phương trình chuyển động của một chất điểm $s=t^3-3t^2-9t+2$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây). Tìm gia tốc tức thời tại thời điểm vận tốc bằng 0.

A. $10\ m/s^2$. **B.** $12\ m/s^2$. **C.** $8\ m/s^2$. **D.** $16\ m/s^2$.

Đáp án. **B.**

Lời giải:

$v(t)=s'(t)=0\Leftrightarrow 3t^2-6t-9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1(1)\\ t=3\end{array}\right.$

$\Rightarrow \gamma(3)=12m/s^2$.

Dạng 3 :Dùng đạo hàm để giải toán tổ hợp C_n^k

Phương pháp:

Cách 1: Từ khai triển $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+...+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$

Lấy đạo hàm cấp 1, cấp 2 ở hai vế khai triển của nhị thức

-Chọn $x=x_0$ và chọn n thích hợp.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính thay với một vài giá trị $n=1,2,\dots$ và kiểm tra tính đúng sai ta đi đến việc lựa chọn đáp án

Ví dụ 15. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\dots+nC_n^n=n.2^{n-1}, n\in N.$

B. $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\dots+nC_n^n=(n+1).2^n, n\in N.$

C. $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\dots+nC_n^n=(n-1).2^{n-1}, n\in N.$

D. $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\dots+nC_n^n=(n+1).2^{n+1}, n\in N.$

Đáp án A

Lời giải:

Cách 1: Xét $f(x)=(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x^1+\dots+C_n^nx^{n-1}+C_n^nx^n\ \forall x\in R$

$f'(x)=n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2xC_n^2+\dots+(n-1)x^{n-2}.C_n^{n-1}+n.x^{n-1}.C_n^n$

$f'^{(1)}=C_n^1+2C_n^2+\dots+(n-1).C_n^{n-1}+n.C_n^n=n.2^{n-1}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT

-Chọn với $n=1$: $C_1^1=2^0=1$ (đúng)

-Chọn với $n=2: C_2^1+2C_2^2=2.2=4$ (đúng)

….

Từ việc thử đáp án ta được kết quả

Ví dụ 16. Tính tổng với $n\in N, n\ge 2$:

$S=1.2.C_n^2+2.3.C_n^3+...+(n-2).(n-1).C_n^{n-1}+(n-1).n.C_n^n$

A. $(n-1).(n-2).2^{n-2}$. **B.** $n.(n-1).2^{n-2}$. **C.** $n.(n-1).2^{n-1}$. **D.** $(n-1).(n-2).2^{n}$.

Đáp án B

Lời giải:

Cách 1: Xét hàm số $f(x)=(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+...+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$

Suy ra:

$f'(x)=n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2xC_n^2+\ldots+(n-1)x^{n-2}.C_n^{n-1}+n.x^{n-1}.C_n^n$

$f''(x)=(n-1).n.(1+x)^{n-2}$

$=1.2.C_n^2+2.3.x.C_n^3+...+(n-2).(n-1)x^{n-3}.C_n^{n-1}+(n-1).n.x^{n-2}.C_n^n$

$f''(1)=1.2.C_n^2+2.3.C_n^3+\ldots+(n-2).(n-1).C_n^{n-1}+(n-1).n.C_n^n=n(n-1)2^{n-2}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT ta thử với một vài giá trị $n\geq 2$.

-Với $n=2 \Rightarrow S=1.2.C_2^2=2.1.2^1=2$ (đúng)

-Với $n=3 \Rightarrow S=1.2.C_3^2+2.3.C_3^3=3.2.2=12$ (đúng)

…

So sánh, đối chiếu các đáp án ta được kết quả.

STUDY TIP

Nếu trong biểu thức thiếu 2 số hạng đầu tiên hoặc 2 số hạng cuối cùng của khai triển nhị thức đồng thời các hệ số là tích của 2 số tự nhiên lien tiếp ta dung đạo hàm cấp 2.

Ví dụ 17. Tính tổng $S=C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+(n+1)C_n^n$ bằng

A. $n.2^{n-1}$. **B.** $(n+1).2^{n-1}$. **C.** $(n+2).2^{n-1}$. **D.** $(n+1).2^n$.

Đáp án C

Lời giải:

Cách 1: Ta có: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+...+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n \quad \forall x\in R$

Nhân 2 vế với x ta được: $x(1+x)^n=x.C_n^0+x^2.C_n^1+x^3.C_n^2+...+x^n.C_n^{n-1}+x^{n+1}.C_n^n$

Lấy đạo hàm 2 vế ta được : $(1+x)^n+nx(1+x)^{n-1}=C_n^0+2x.C_n^1+3x^2.C_n^2+...+(n+1)x^n.C_n^n$

Thay $x=1$ ta được: $S=C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+(n+1)C_n^n=2^n+n.2^{n-1}=(n+2).2^{n-1}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT (bạn đọc tự thử lại)

STUDY TIP

Nếu trong khai triển nhị thức vẫn có số hạng đầu hoặc số hạng cuối và hệ số tăng thêm 1 đơn vị thì ta nhân 2 vế với x và sau đó dùng đạo hàm cấp 1.

Ví dụ 18. Tìm số nguyên dương n sao cho:

$C_{2n+1}^1-2.2.C_{2n+1}^2+3.2^2.C_{2n+1}^3-4.2^3.C_{2n+1}^4+...+(2n+1).2^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1}=2017$

A. $n=1005$. **B.** $n=1006$. **C.** $n=1007$. **D.** $n=1008$.

Đáp án D

Lời giải:

Với $\forall x\in\mathbb{R}$ ta có: $(1+x)^{2n+1}=C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1.x^1+C_{2n+1}^2.x^2+C_{2n+1}^3.x^3+...+C_{2n+1}^{2n+1}.x^{2n+1}$

Lấy đạo hàm hai vế theo x ta được:

$(2n+1)(1+x)^{2n}=C_{2n+1}^1+2x.C_{2n+1}^2+3x^2.C_{2n+1}^3+...+(2n+1).x^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1} \qquad (1)$

Thay $x=-2$ vào (1) ta được:

$2n+1=C_{2n+1}^1-2.2.C_{2n+1}^2+3.2^2.C_{2n+1}^3-4.2.C_{2n+1}^4+...+(2n+1).x^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1}$

Từ yêu cầu bài toán ta có : $2n+1=2017 \Leftrightarrow n=2018$.

STUDY TIP : *Nhận biết được cần sử dụng đạo hàm cấp 1 và chọn giá trị $x = x_0$ dựa vào cơ số a^n với chỉ số n tăng dần.*

Ví dụ 5: Tính tổng: $S = 100.C_{100}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{99} - 101.C_{100}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} + ... + 199.C_{100}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{198} + 200.C_{100}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{199}$

A. 10. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 100.

Đáp án B.

Lời giải:

Xét $f(x) = (x^2 + x)^{100} = x^{100}(1+x)^{100}$

$= x^{100}\left(C_{100}^{0} + C_{100}^{1}x + C_{100}^{2}x^2 + C_{100}^{100}x^{100}\right)$

$= C_{100}^{0}.x^{100} + C_{100}^{1}.x^{101} + C_{100}^{2}x^{102} + ... + C_{100}^{100}x^{200}$

$\Rightarrow f'(x) = 100(2x+1).(x^2+x)^{99}$

$= 100x^{99}.C_{100}^{0} + 101x^{100}.C_{100}^{1} + 102x^{101}.C_{100}^{2} + ... + 200x^{199}C_{100}^{100}$

Lấy $x = -\frac{1}{2}$ ta được:

$$0 = -100\left(\frac{1}{2}\right)^{99} C_{100}^{0} + 101\left(\frac{1}{2}\right)^{100} C_{100}^{1} - ... - 200\left(\frac{1}{2}\right)^{199} C_{100}^{100} \Leftrightarrow S = 0.$$

STUDY TYP : *Xuất phát từ nhị thức $(x^2+x)^{100}$, sau khi dùng đạo hàm cấp 1, chọn $x_0 = -\frac{1}{2}$.*

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

DẠNG 1: VI PHÂN CỦA HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3$. Tính vi phân của hàm số tại $x_0 = 1$ với số gia $\Delta x = 0,01$.

A. $0,01$. **B.** $3.(0,01)^2$. **C.** $(0,01)^3$. **D.** $0,03$.

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{x+3}{1-2x}$. Vi phân của hàm số tại $x = -3$ là:

A. $dy = \frac{1}{7}dx$. **B.** $dy = 7dx$. **C.** $dy = -\frac{1}{7}dx$. **D.** $dy = -7dx$.

Câu 3. Xét hàm số $x = \sin y\left(0 < y < \frac{\pi}{2}\right)$ cùng với ba đẳng thức:

$(I)\ \frac{dx}{dy} = \cos y$; $(II)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(III)\ \frac{dy}{dx} = \cos x$;

Số đẳng thức đúng là:

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (III). **C.** Chỉ (I) và (II). **D.** Chỉ (I) và (III).

Câu 4. Vi phân của hàm số $y = \cos^2 3x$ là:

A. $dy = 3\sin^2 3x dx$. **B.** $dy = \sin 6x dx$. **C.** $dy = -3\sin 6x dx$. **D.** $dy = 6\sin 6x dx$.

Câu 5. Với hàm số $x^2y + y^3 = 2$ thì đạo hàm y' tại điểm $(1;1)$ bằng:

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** -1. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Câu 6. Cho hàm số $y = \sin(\sin x)$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy=\cos(\sin x).\sin xdx$. **B.** $dy=\sin.(\cos x).dx$.

C. $dy=\cos(\sin x),\cos xdx$. **D.** $dy=\cos(\sin x)dx$.

Câu 7. Vi phân của hàm số $y=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$ bằng:

A. $dy=\dfrac{dx}{(x\cos x-\sin x)^2}$. **B.** $dy=\dfrac{x^2dx}{(x\cos x-\sin x)^2}$.

C. $dy=\dfrac{\cos xdx}{(x\cos x-\sin x)^2}$. **D.** $dy=\dfrac{x^2\sin xdx}{(x\cos x-\sin x)^2}$.

Câu 8. Xét hàm số $f'(x)=x^2-1$. Nếu đặt $y=f(x^2)$ thì $\dfrac{dy}{dx}$ nhận kết quả nào sau đây?

A. $2x(x^4-1)$. **B.** $2x(x^2-1)$. **C.** x^4-1. **D.** x^2-1.

Câu 9. Xét hàm số $y=x^2$. Gọi $\Delta x,dy$ theo thứ tự là số gia và vi phân của hàm số y tại $x_0=1$ và $dx=0,01$. Hiệu của $\Delta y-dy$ bằng:

A. $0,001$. **B.** $0,002$. **C.** $0,0001$. **D.** $0,00001$.

Câu 10. Xét $\cos y=\sin^2 x\left(0<y<\dfrac{\pi}{2},0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$. Đạo hàm của y tại $x=\dfrac{\pi}{4}$ là:

A. $\dfrac{\pi}{6}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{-2}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 11. Vi phân của hàm số $y=\dfrac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ là:

A. $dy=\dfrac{2(2x+1)(x^2+x-2)}{(x^2+x+1)^3}dx$. **B.** $dy=\dfrac{(2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^3}dx$.

C. $dy=\dfrac{(3x-1)(x^2-2x+5)}{(x^2+x+1)^3}dx$. **D.** $dy=\dfrac{(x+1)(x^2+x-2)}{(x^2+x+1)^3}dx$.

Câu 12. Cho hàm số: $y=-2\sqrt{1-x}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $\sqrt{1-x}\,dy-dx=0$. **B.** $-\sqrt{1-x}\,dx-dy=0$.

C. $2\sqrt{1-x}\,dy+dx=0$. **D.** $\sqrt{1-x}\,dy+dx=0$.

DẠNG 2: TÍNH ĐẠO HÀM CẤP CAO VÀ Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI:

Câu 13. Hàm số nào dưới đây có đạo hàm câp hai là $6x$?

A. $y=3x^2$. **B.** $y=2x^3$. **C.** $y=x^3$. **D.** $y=x^2$.

Câu 14. Cho hàm số $y=\cos^2 x$. Khi đó $y^{(3)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ bằng:

A. 2 . **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $-2\sqrt{3}$. **D.** -2.

Câu 15. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2+1}$. Xét hai đẳng thức:

$(I)\ y.y'=2x$; $(II)\ y^2.y''=y'$. Đẳng thức nào đúng?

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II). **C.** Cả hai đều sai. **D.** Cả hai đều đúng.

Câu 16. Đạo hàm cấp 2 của hàm số $y=\dfrac{5x^2-3x-20}{x^2-2x-3}$ bằng:

A. $y=\dfrac{2\left(7x^3+15x^2-93x+77\right)}{\left(x^2-2x+3\right)^3}$.

B. $y=\dfrac{2\left(7x^3-15x^2+93x-77\right)}{\left(x^2-2x+3\right)^3}$.

C. $y=\dfrac{2\left(7x^3+15x^2+93x-77\right)}{\left(x^2-2x-3\right)^3}$.

D. $y=\dfrac{2\left(7x^3-15x^2-93x+77\right)}{\left(x^2-2x-3\right)^3}$.

Câu 17. Hàm số $y=\sin^2 x$ có đạo hàm cấp 4 là:

A. $\cos^2 2x$. **B.** $-\cos^2 2x$. **C.** $8\cos 2x$. **D.** $-8\cos 2x$.

Câu 18. Cho hàm số $y=\cos x$. Khi đó $y^{(2016)}(x)$ bằng:

A. $-\cos x$. **B.** $\sin x$. **C.** $-\sin x$. **D.** $\cos x$.

Câu 19. Đạo hàm cấp n của hàm số $y=\dfrac{1}{x-1}$ là:

A. $\dfrac{(-1)^n}{(x-1)^{n+1}}$. **B.** $\dfrac{n!}{(x-1)^{n+1}}$. **C.** $\dfrac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$. **D.** $\dfrac{(-1)^n.n!}{(x-1)^n}$.

Câu 20. Đạo hàm cấp 2 của hàm số : $y=\tan x+\cot x+\sin x+\cos x$ là:

A. $\dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}-\dfrac{2\cot x}{\sin^2 x}-\sin x+\cos x$. **B.** 0.

C. $\tan^2 x-\cot^2 x+\cos x-\sin x$. **D.** $\dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}+\dfrac{2\cot x}{\sin^2 x}-\sin x-\cos x$.

Câu 21. Cho hàm số $y=\sin 2x$. Đẳng thức nào sau đây là đúng với mọi x?

A. $y^2+(y')^2=4$. **B.** $4y+y''=0$. **C.** $4y-y''=0$. **D.** $y=y'.\tan 2x$.

Câu 22. Cho hàm số $y=\cos^2 2x$. Giá trị của biểu thức $y'''+y''+16y'+16y-8$ là kết quả nào?

A. 0. **B.** 8. **C.** -8. **D.** $16\cos 4x$.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$. Phương trình $f^{(4)}(x)=-8$ có số nghiệm thuộc đoạn $[0;\pi]$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)=5(x+1)^3+4(x+1)$. Tập nghiệm của phương trình $f''(x)=0$ là:

A. $[-1;2]$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\{-1\}$.

Câu 25. Cho hàm số $y=\dfrac{-2x^2+3x}{1-x}$. Đạo hàm cấp 4 của hàm số này là:

A. $y^{(4)}=\dfrac{16}{(x-1)^5}$. **B.** $y^{(4)}=\dfrac{32}{(x-1)^5}$. **C.** $y^{(4)}=\dfrac{-24}{(x-1)^5}$. **D.** $y^{(4)}=\dfrac{24}{(x-1)^5}$.

Câu 26. Cho hàm số $y=x.\sin x$. Tìm hệ thức đúng:

A. $y''+y=-2\cos x$. **B.** $y''-y'=2\cos x$.

C. $y''+y'=2\cos x$. **D.** $y''+y=2\cos x$.

Câu 27. Phương trình chuyển động của một chất điểm $s = 15 + 20t^2 - 8t^3$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm gia tốc bằng 0 là:

A. $\frac{50}{3} m/s$. **B.** $\frac{10}{3} m/s$. **C.** $15 m/s$. **D.** $20 m/s$.

Câu 28. Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = -t^3 + 9t^2 + t + 10$ trong đó t tính bằng giây, s tính bằng mét. Thời gian vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất là:

A. $t = 5 s$. **B.** $t = 6 s$. **C.** $t = 2 s$. **D.** $t = 3 s$.

Câu 29. Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 2t^2 + 4t + 1$ trong đó t là giây, s là mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 2$ là:

A. $12 m/s$. **B.** $8 m/s$. **C.** $7 m/s$. **D.** $6 m/s$.

Câu 30. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4 s$ là $\gamma = 18 m/s^2$.

B. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4 s$ là $\gamma = 9 m/s^2$.

C. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3 s$ là $\gamma = 12 m/s^2$.

D. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3 s$ là $\gamma = 24 m/s^2$.

DẠNG 3: DÙNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI TOÁN TỔ HỢP

Câu 31. Tính tổng $S = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - ... + (-1)^{n-1}.n.C_n^n$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 10. **D.** 100.

Câu 32. Tính tổng: $S = 1.2^{999}C_{1000}^1 + 2.2^{998}C_{1000}^2 + ... + 1000.2^0 C_{1000}^{1000}$.

A. 1000.2^{999}. **B.** 999.3^{1000}. **C.** 1000.3^{999}. **D.** 999.3^{999}.

Câu 33. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn: $1.C_n^1 + 2.C_n^2 + 3.C_n^3 + ... + n.C_n^n = 11264$.

A. $n = 9$. **B.** $n = 10$. **C.** $n = 11$. **D.** $n = 12$.

Câu 34. $S = 1^2.C_{2000}^1 + 2^2.C_{2000}^2 + 3^2.C_{2000}^3 + ... + 2000^2.C_{2000}^{2000}$.

A. $2000.2001.2^{1998}$. **B.** $1999.2000.2^{1999}$. **C.** $2000.2001.2^{1999}$. **D.** $2000.2001.2^{2000}$.

Câu 35. Tính tổng: $S = 2.1.3^0.C_{200}^2 - 3.2.3^1.C_{200}^3 + 4.3.3^2.C_{200}^4 - ... + 200.199.3^{198}.C_{200}^{200}$.

A. $200.199.2^{199}$. **B.** $199.198.2^{200}$. **C.** $200.199.2^{198}$. **D.** $199.198.2^{199}$.

Câu 36. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn: $1.C_n^0 + 2.C_n^1 + 3.C_n^2 + ... + n.C_n^{n-1} + (n+1).C_n^n \le 1024(n+2)$.

A. $n \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11\}$. **B.** $n \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

C. $n \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. **D.** $n \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Câu 37. Tính tổng: $S = 2.2^1.C_{100}^2 + 4.2^3.C_{100}^4 + 6.2^5.C_{100}^6 + ... + 100.2^{99}.C_{100}^{100}$.

A. $50(3^{99} + 1)$. **B.** $100(3^{98} + 1)$. **C.** $200(3^{99} + 1)$. **D.** $25(3^{200} + 1)$.

Câu 38. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\frac{1}{2^0}C_n^1 + \frac{2}{2^1}C_n^2 + \frac{3}{2^2}C_n^3 + ... + \frac{n}{2^{n-1}}C_n^n = (n-1)\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

B. $n.3^0.C_n^n + (n-1)3^1.C_n^{n-1} + (n-2)3^2.C_n^{n-2} + ... + 1.3^{n-1}.C_n^1 = (n+1).4^{n-1}$.

C. $2.C_{2n+1}^{2}+4.C_{2n+1}^{4}+6.C_{2n+1}^{6}+...+2n.C_{2n+1}^{2n}=(2n+1)2^{2n-1}$.

D. $1.C_{2n}^{1}+3.C_{2n}^{3}+5.C_{2n}^{5}+...+(2n-1).C_{2n}^{2n-1}=2n.2^{2n+1}$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

DẠNG 1: VI PHÂN CỦA HÀM SỐ

Câu 1. **Đáp án D.**

$dy=3.1^{2}.0,01=0,03$

Câu 2. **Đáp án A.**

Ta có: $y'=\frac{7}{(1-2x)^2}\Rightarrow y'(3)=\frac{1}{7}\Rightarrow dy=\frac{1}{7}dx$.

Câu 3. **Đáp án C.**

Ta có: $x=\sin y\left(0<y<\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=\cos ydy\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\cos y$ và $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ đúng.

Câu 4. **Đáp án C.**

$y'=2\cos 3x(-3\sin 3x)=-3\sin 6x\Rightarrow dy=-3\sin 6xdx$.

Câu 5. **Đáp án C.**

$x^2y+y^3=2\Rightarrow d(x^2y)+d(y^3)=0\Leftrightarrow 2xydx+x^2dy+3y^2dy=0$ tại điểm $(1;1)$ ta có:

$2dx+dy+3dy=0\Rightarrow 4dy=-2dx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}=y'(1)$.

Câu 6. **Đáp án C.**

$y'=\cos x.\cos(\sin x)\Rightarrow dy=\cos x.\cos(\sin x)dx$.

Câu 7. **Đáp án B.**

Ta có : $y'=\frac{(x\cos x)(x\cos x-\sin x)-(x\sin x+\cos x)(-x\sin x)}{(x\cos x-\sin x)^2}=\frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)^2}$.

Câu 8. **Đáp án A.**

Đặt $u=x^2\Rightarrow y=f(u)$

Từ $f'(x)=x^2-1\Rightarrow f'(u)=u^2-1$

$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=f'(u).\frac{du}{dx}=(u^2-1)2x=2x(x^4-1)$.

Câu 9. **Đáp án C.**

Chọn $\Delta x=dx=0,01;x_0=1\Rightarrow y_0=1$

$dy=2.0,01=0,02\Rightarrow\Delta y-dy=0,0001$.

Câu 10. **Đáp án C.**

$\cos y=\sin^2x\Rightarrow-\sin ydy=\sin 2xdx$.

$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\sin 2x}{-\sin y}=\frac{\sin 2x}{-\sqrt{1-\cos^2 y}}$ (vì $\sin y>0$) $\Rightarrow\frac{dy}{dx}=y'=\frac{-\sin\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-\sin^4\frac{\pi}{4}}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 11. **Đáp án A.**

$$y' = \frac{(-4x-2)\left(x^2+x+1\right)^2 - \left(-2x^2-2x\right)2\left(x^2+x+1\right)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^4} = \frac{2(2x+1)\left(x^2+x-2\right)}{\left(x^2+x+1\right)^3}.$$

Lưu ý: *có thể sử dụng MTCT tính đạo hàm tại một điểm $x=0$ và thử lại $x=0$ vào các Đáp án ta được kết quả là **A.***

Câu 12. Đáp án A.

Ta có: $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow \sqrt{1-x}dy - dx = 0$.

DẠNG 2: TÍNH ĐẠO HÀM CẤP CAO VÀ Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI.

Câu 13. Đáp án C.

$y = x^3, y' = 3x^2, y'' = 6x$

Câu 14. Đáp án B.

$y' = -\sin 2x, y'' = -2\cos 2x \Rightarrow y^{(3)} = 4\sin 2x \Rightarrow y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$.

Câu 15. Đáp án C.

Ta có: $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, y'' = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x.x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$

$\Rightarrow y.y' = x$ và $y^2.y'' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ nên (I) và (II) sai.

Câu 16. Đáp án B.

Ta có $y' = \frac{-7x^2+10x-31}{\left(x^2-2x-3\right)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2\left(7x^3-15x^2+93x-77\right)}{\left(x^2-2x-3\right)^3}$.

Kết luận: *Ta có thể sử dụng MTCT tính đạo hàm tại 1 điểm $x=0$ của y' và thử với $x=0$ vào các Đáp án ta được kết quả.*

Câu 17. Đáp án D.

Ta có: $y' = \sin 2x, y'' = 2\cos x, y''' = -4\sin 2x \Rightarrow y^{(4)}(x) = -8\cos 2x$.

Câu 18. Đáp án D.

Áp dụng $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow y^{(2016)}(x) = \cos(x + 1008\pi) = \cos x$.

Câu 19. Đáp án C.

Áp dụng $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^n = \frac{(-1)^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$ ta được: $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$.

Câu 20. Đáp án D.

$y' = \tan^2 x - \cot^2 x + \cos x - \sin x \Rightarrow y'' = \frac{2\tan x}{\cos^2 x} + \frac{2\cot x}{\sin^2 x} - \sin x - \cos x$.

Câu 21. Đáp án B.

$y' = 2\cos 2x, y'' = -4\sin 2x \Rightarrow 4y + y'' = 0$

Câu 22. Đáp án A.
$y' = -2\sin 4x, y'' = -8\cos 4x, y''' = 32\sin 4x \Rightarrow y''' + y'' + 16y' + 16y - 8 = 0$.

Câu 23. Đáp án B.
Áp dụng $\left[\cos(ax+b)\right]^n = a^n.\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f^{(4)}(x) = 16.\cos\left(2x - \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) \Rightarrow f^{(4)}(x) = -8$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{-\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Với $x \in [0;\pi] \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 24. Đáp án D.
$f'(x) = 15(x+1)^2 + 4, f''(x) = 30(x+1) \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Câu 25. Đáp án C.
$y = 2x - 1 - \frac{1}{x-1} \Rightarrow y' = 2 + \frac{1}{(x-1)^2}, y'' = \frac{-2}{(x-1)^3}, y''' = \frac{2.3}{(x-1)^4}, y^{(4)} = \frac{-2.3.4}{(x-1)^5} = \frac{-24}{(x-1)^5}$.

Câu 26. Đáp án D.
Ta có: $y' = \sin x + x\cos x, y'' = 2\cos x - x\sin x \Rightarrow y'' + y = 2\cos x$.

Câu 27. Đáp án A.
Ta có : $\gamma(t) = s''(t) = 40 - 48t$

Gia tốc: $\gamma(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{6} \Rightarrow v(t) = s'(t) = 40 - 24t^2$.

$v\left(\frac{5}{6}\right) = 40.\frac{5}{6} - 24.\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{50}{3}(m/s)$

Câu 28. Đáp án **D.**

$$v(t) = s'(t) = -3t^2 + 18t + 1 = -3(t^2 - 6t + 9) + 28 = 28 - 3(t-3)^2 \geq 28$$

Vậy vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $t = 3s$.

Câu 29. Đáp án **B.**

$$s'(t) = 3t^2 - 4t + 4, s''(t) = 6t - 4$$

Vậy gia tốc $\gamma(2) = s''(2) = 8(m/s^2)$

Câu 30. Đáp án **A.**
$s'(t) = 3t^2 - 6t, s''(t) = 6t - 6 \Rightarrow s''(4) = 18(m/s^2)$

DẠNG 3: DÙNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI TOÁN TỔ HỢP C_n^k

Câu 28. Đáp án **A.**
Từ nhị thức $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x^1 + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n$ $(*)$ lấy đạo hàm hai vế:

$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2xC_n^2+3x^2C_n^3+...+nx^{n-1}C_n^n$ $(**)$.

Thay $x=-1$ ta được $S=C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-...-(-1)^{n-1}C_n^n=0$.

Câu 29. Đáp án **C.**

Xét khai triển nhị thức $(1+x)^n$. Lấy đạo hàm bậc nhất hai vế ta được $n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2xC_n^2+3x^2C_n^3+...+nx^{n-1}C_n^n$

Cho $x=2$ ta được $S=n3^{n-1}$.

Với $n=1000$ ta được $S=1000.3^{999}$

Câu 30. Đáp án **C.**

Xét khai triển nhị thức $(1+x)^n$. Lấy đạo hàm bậc nhất hai vế ta được $n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2xC_n^2+3x^2C_n^3+...+nx^{n-1}C_n^n$

Cho $x=1$ ta được $1C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+nC_n^n=n.2^{n-1}=11264\Rightarrow n=11$

Câu 31. Đáp án **A.**

Xét $S=1^2C_n^1+2^2C_n^2+3^2C_n^3+...+n^2C_n^n=1(2-1)C_n^1+2(3-1)C_n^2+...+n(n+1-1)C_n^n$

$=\left[1.2.C_n^1+2.3C_n^2+3.4C_n^3+...+n(n+1)C_n^n\right]-\left[1C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+nC_n^n\right]$

$=A-B$

Từ câu 3 thì $B=n2^{n-1}$

Xét khai triển $x(1+x)^n=x.C_n^0+x^2.C_n^1+x^3.C_n^2+...+x^{n+1}.C_n^n$

Lấy đạo hàm hai vế: $(1+x)^n+nx(1+x)^{n-1}=C_n^0+2x.C_n^1+3x^2.C_n^2+...+(n+1)x^n.C_n^n$

Tiếp tục lấy đạo hàm ta có:

$n(1+x)^{n-1}+n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}=1.2.C_n^1+2.3x^1.C_n^2+...+n(n+1)x^{n-1}.C_n^n$

Cho $x=1\Rightarrow A=2n.2^{n-1}+n(n-1).2^{n-2}\Rightarrow S=n(n+1).2^{n-2}$

Với $n=2000\Rightarrow S=2000.2001.2^{1998}$.

Câu 32. Đáp án C.

Từ khai triển $(1-x)^{200}$ lấy đạo hàm đến cấp 2 hai vế, sau đó thay $x=3$ ta được $S=200.199.2^{198}$.

Câu 33. Đáp án A.

Từ ví dụ 3 - Dạng 3. Phần lý thuyết ta có: $1.C_n^0+2.C_n^1+3.C_n^2+...+(n+1).C_n^n=(n+2)2^{n-1}$.

Theo yêu cầu của bài toán $\Rightarrow(n+2).2^{n-1}\le1024.(n+2)\Leftrightarrow2^{n-1}\le1024=2^{10}\Leftrightarrow n\le11, n\in\mathbb{N}$. Vậy chọn **A.**

Câu 34. Đáp án A.

Khai triển $(1+x)^{100}$ và lấy đạo hàm cấp 1.

Khai triển $(1-x)^{100}$ và lấy đạo hàm cấp 1.

Cộng vế với vế và thay $x=2$ ta được $S=50\left(3^{99}+1\right)$

Câu 35. Đáp án C.

Cách 1: Khai triển $(1+x)^{2n+1}$ và lấy đạo hàm cấp 1.

Khai triển $(1-x)^{2n+1}$ và lấy đạo hàm cấp 1.

Cộng vế với vế và thay $x = 1$ ta được kết quả đáp án **C**.
Cách 2: Thử với $n = 1, 2$ và các đáp án thì ta được kết quả đáp án C đúng

TIẾP TUYẾN VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

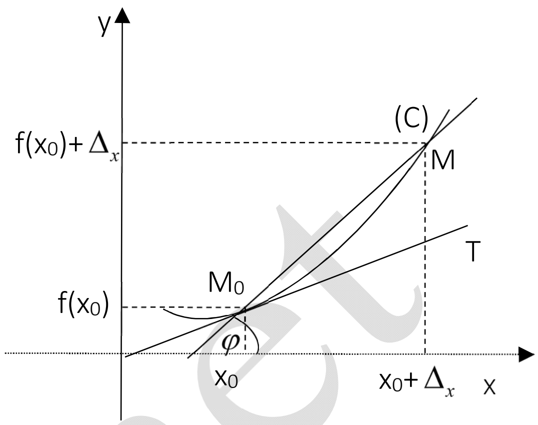
A. LÝ THUYẾT

1. Tiếp tuyến của đường cong phẳng.

Định nghĩa:

Nếu cát tuyến M_0M có vị trí giới hạn M_0T. Khi điểm M di chuyển trên (C) và dần đến M_0 thì đường thẳng M_0T gọi là tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm M_0.

Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là tiếp điểm.



Định lý:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $(a;b)$ và (C) là đồ thị hàm số. Đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại $M_0(x_0; f(x_0))$.

2. Phương trình tiếp tuyến

a. Tiếp tuyến tại một điểm

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$:

$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0}$

UDY TIP

- Hệ số góc $k = f'(x_0)$.

- Nếu cho x_0 thì thế vào $y = f(x)$ tìm y_0.

- Nếu cho y_0 thì thế vào $y = f(x)$ giải phương trình tìm x_0.

b. Tiếp tuyến biết hệ số góc

- Hệ số góc k của tiếp tuyến: $k = f'(x_0)$ $(*)$

Giải phương trình $(*)$ ta tìm được hoành độ của tiếp điểm x_0 thế và phương trình $y = f(x)$ tìm tung độ y_0.

- Khi đó phương trình tiếp tuyến: $\boxed{y = k(x - x_0) + y_0}$ (d)

UDY TIP

** Tiếp tuyến $d // \Delta$: $y = ax + b \Rightarrow k = a$.*

** Tiếp tuyến $d \perp \Delta$: $y = ax + b \Rightarrow k.a = -1$.*

** $k = \tan\alpha$, với α là góc giữa d và tia Ox.*

c. Tiếp tuyến đi qua một điểm

Lập phương trình tiếp tuyến d với (C) biết d đi qua điểm $M(x_M; y_M)$

Phương pháp:

- Gọi $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

- Phương trình tiếp tuyến tại $M_0: y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ (d).

- Vì đường thẳng d đi qua M nên $y_M - y_0 = f'(x_0)(x_M - x_0)$. Giải phương trình ta tìm được x_0 rồi suy ra y_0.

UDY TIP

Điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ *có thể thuộc hoặc không thuộc đường cong* (C)

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ TIẾP TUYẾN VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+1$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(-1;3\right)$ là:

A. $y=-3x.$ **B.** $y=-x+3.$ **C.** $y=-9x+6.$ **D.** $y=-9x-6.$

Đáp án A.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2+6x$

Phương trình tiếp tuyến tại $M\left(-1;3\right)$ là: $y=y'\left(-1\right)\left(x+1\right)+3\Leftrightarrow y=-3x$

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\dfrac{4}{x-1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ là:

A. $y=-x+2.$ **B.** $y=x+2.$ **C.** $y=x-1.$ **D.** $y=-x-3.$

Đáp án D.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$y'=-\dfrac{4}{\left(x-1\right)^2};y'\left(-1\right)=-1;y\left(-1\right)=-2$

Phương trình tiếp tuyến tại $M_0\left(-1;-2\right)$ là: $y=y'\left(-1\right)\left(x+1\right)-y\left(-1\right)=-x-3$

STUDY TIP

Học sinh nhận biết các bài toán về viết phương trình tiếp tuyến tại 1 điểm

- *Cho* $M\left(x_0;y_0\right)\in(C)$.
- *Cho* x_0 *tìm* y_0.
- *Cho* y_0 *tìm* x_0.
-

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=x^4+2x^2-1\,(C)$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có tung độ $y_0=2$ là:

A. $y=8x-6;y=-8x-6.$ **B.** $y=8x-6;y=-8x+6.$

C. $y=8x-8;y=-8x+8.$ **D.** $y=41x-17.$

Đáp án A.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=4x^3+4x$

$y_0=2\Leftrightarrow x^4+2x^2-1=2\Rightarrow x=-1;x=1$

Phương trình tiếp tuyến tại $M\left(1;2\right):y=8x-6$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M\left(-1;2\right):y=-8x-6$.

STUDY TIP

Giải phương trình $ax^4+bx^2+c=0,(a\neq 0)$. *Đặt* $t=x^2,t\geq 0$ *suy ra giải phương trình bậc hai* $a.t^2+bt+c=0$

Ví dụ 4. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+2}{x-2}$ tại điểm $x_0=3$có hệ số góc bằng:

A. 3. **B.** -7. **C.** -10. **D.** -3.

Đáp án C.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$y'=-\dfrac{10}{(x-2)^2};k=y'(-3)=-10.$

Ví dụ 5. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}+3x^2-2$ có hệ số góc $k=-9$ có phương trình là:

A. $y=-9x-11$. **B.** $y=-9x-27$. **C.** $y=-9x+43$. **D.** $y=-9x+11$.

Đáp án A.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=x^2+6x$

$k=-9\Leftrightarrow y'(x_0)=-9\Leftrightarrow x_0=-3\Rightarrow y_0=16.$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(-3;16):y=-9x-11$

STUDY TIP

Học sinh nhận biết được loại bài toán viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc $k:k=f'(x_0)$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+2}{x-1}(C)$. Phương trình tiếp tuyến biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d:y=-4x+1$ là:

A. $y=-4x-2;y=-4x+14$. **B.** $y=-4x+21;y=-4x+14$.

C. $y=-4x+2;y=-4x+1$. **D.** $y=-4x+12;y=-4x+14$.

Đáp án A.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. $y'=\dfrac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0)=-4\Leftrightarrow -4=\dfrac{-4}{(x-1)^2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=2\end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(0;-2):y=-4x-2$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(2;6):y=-4x+14$.

STUDY TIP

Hai đường thẳng song song thì cùng hệ số góc.

Hai đường thẳng vuông góc thì tích hai hệ số góc của hai đường thẳng bằng -1.

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ (C). Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C) mà tiếptuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2017$. Khi đó $x_1 + x_2$ bằng:

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Đáp án C.

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. $y' = 3x^2 - 4x + 2$.

Từ giả thiết suy ra $x_1 + x_2$ là nghiệm của phương trình $1 = 3x^2 - 4x + 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{4}{3}$

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi quađiểm $M(-7;5)$.

A. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}; y = -\frac{3}{16}x + \frac{29}{16}$. **B.** $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}; y = -\frac{3}{16}x + \frac{2}{16}$.

C. $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}; y = -\frac{3}{16}x + \frac{9}{16}$. **D.** $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}; y = -\frac{3}{16}x + \frac{29}{16}$.

Đáp án D.

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Do tiếp tuyến qua $M(-7;5)$ nên:

$5 = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(-7 - x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0-1} \Rightarrow x_0{}^2 - 4x_0 - 5 = 0 \Rightarrow x_0 = -1; x_0 = 5.$

Ta tìm được hai phương trình tiếp tuyến là: $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ và $y = -\frac{3}{16}x + \frac{29}{16}$.

STUDY TIP

Học sinh cần phân biệt loại bài toán viết phương trình tiếp tuyến tại một điểm $M_0(x_0; y_0)$ và viết phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $M(x_M; y_M)$. Dấu hiệu ban đầu là điểm $M(x_M; y_M)$ có thể thuộc đường cong (C) hay có thể không thuộc đường cong (C)

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = x^3 - 1 - m(x+1)$ (C_m). Có bao nhiêu giá trị của m để tiếp tuyến tại (C_m) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Đáp án D.

Lời giải:

(C_m) giao với $Oy: M(0; 1-m)$

$y' = 3x^2 - m, y(0) = -m$

Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại $M: y=-mx+1-m$

Nếu $m=0$ tiếp tuyến song song với Ox (loại)

Xét $m\neq 0$. Gọi A, B lần lượt là giao điểm tiếp tuyến và hai trục tọa độ

$\Rightarrow A\left(\dfrac{1-m}{m};0\right); B(0;1-m)$.

Ta có $S_{OAB}=8\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}OA.OB=8\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{1-m}{m}\right||1-m|=8\Leftrightarrow \dfrac{(1-m)^2}{|m|}=16\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=9\pm 4\sqrt{5} \\ m=-7\pm 4\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Vậy có bốn giá trị của m thỏa mãn.

Ví dụ 10. Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(m-1)x+2m$ (C_m). Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta: y=2x+1$

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=\dfrac{11}{6}$. **D.** $m=\dfrac{6}{11}$.

Đáp án C.

Lời giải:

$y'=3x^2-4x+m-1$

Ta có $y'=3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+m-\dfrac{7}{3}\geq m-\dfrac{7}{3}$

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=\dfrac{2}{3}$ có hệ số góc nhỏ nhất và hệ số góc đó có giá trị $k=m-\dfrac{7}{3}$.

Theo bài ra: $2.k=-1\Leftrightarrow 2\left(m-\dfrac{7}{3}\right)=-1\Rightarrow m=\dfrac{11}{6}$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 35. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ $x_0=0$

A. $y=2x+1$. **B.** $y=2x-1$. **C.** $y=x-2$. **D.** $y=x+2$.

Câu 36. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x+2}$ tại điểm có tung độ $y_0=2$

A. $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}$. **B.** $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{2}$. **C.** $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2}$. **D.** $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{4}$.

Câu 37. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)=\sin x$, $x\in[0;2\pi]$ song song với đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}x+3$ là :

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 38. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+1$ tại điểm $x_0=-1$ có hệ số góc bằng :

A. 7. **B.** 5. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 39. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x-3}$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (C) với trục hoành là:

A. $y=2x-4$. **B.** $y=3x+1$. **C.** $y=-2x+4$. **D.** $y=2x$.

Câu 40. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-2x+2$ vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất trên hệ trục Oxy là:

A. $y=-x-2$ và $y=-x+4$.

B. $y=-x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ và $y=-x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$.

C. $y=-x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{18-5\sqrt{3}}{9}$ và $y=-x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{18+5\sqrt{3}}{9}$.

D. . $y=-x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{18-5\sqrt{3}}{9}$ và $y=-x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{18+5\sqrt{3}}{9}$

Câu 41. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x}$ (C) tại các giao điểm của (C) với các trục tọa độ là :

A. $y=x-1$. **B.** $y=x-1$ và $y=x+1$.

C. $y=-x+1$. **D.** $y=x+1$.

Câu 42. Cho hàm số $y=x^2-6x+5$ có tiếp tuyến song song trục hoành. Phương trình tiếp tuyến đó là :

A. $x=-3$. **B.** $y=-4$. **C.** $y=4$. **D.** $y=3$.

Câu 43. Cho hàm số $y=2-\dfrac{4}{x}$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến với (C) vuông góc với đường thẳng $y=-x+2$ là:

A. $y=x+4$. **B.** $y=x-2$ và $y=x+4$.

C. $y=x-2$ và $y=x+6$. **D.** $y=x+3$ và $y=x-1$.

Câu 44. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu nhiêu cặp điểm thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 45. Trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{x-1}$ có điểm $M(x_0;y_0)$ sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Khi đó x_0+y_0 bằng :

A. 3. **B.** $\dfrac{13}{3}$. **C.** $-\dfrac{1}{7}$. **D.** $-\dfrac{13}{4}$.

Câu 46. Cho hàm số $(C): y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $y''=0$ là

A. $y=-x-\dfrac{7}{3}$. **B.** $y=-x+\dfrac{7}{3}$. **C.** $y=x-\dfrac{7}{3}$. **D.** $y=\dfrac{7}{3}x$.

Câu 47. Số cặp điểm A, B trên đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2+3x+5$ mà tiếp tuyến tại A,B vuông góc với nhau là:

A. 1. **B.** 2 . **C.** 0 . **D.** Vô số.

Câu 48. Qua điểm $A(0;2)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+2$ (C)?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 49. Cho hàm số $y=x^3-3x^3+2$ có đồ thị (C). Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến với (C) và có hệ số góc nhỏ nhất?

A. $y=-3x+3$. **B.** $y=1$. **C.** $y=-5x+7$. **D.** $y=-3x-3$.

Câu 50. Cho hai hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{2}}$ và $g(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$. Góc giữa hai tiếp tuyến của mỗi đồ thị hàm số đã cho tại giao điểm của chúng là:

A. 60^0. **B.** 90^0. **C.** 45^0. **D.** 30^0.

Câu 51. Tìm m để đồ thị: $(C_m): y=\dfrac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4-3m)x+1$ tồn tại đúng 2 điểm có hoành độ dương mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $x+2y-3=0$.

A. $m\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right)$. **B.** $m\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{3}\right)$.

C. $m\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{8}{3}\right)$. **D.** $m\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right)$.

Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến này cắt Ox,Oy lần lượt tại A, B sao cho $OA=4OB$.

A. $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$ và $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$. **B.** $y=-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$ và $y=-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{13}{4}$.

C. $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$ và $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}$. **D.** $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$ và $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{2}$.

Câu 53. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+m$. Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=1$ cắt các trục Ox,Oy lần lượt tại A,B sao cho diện tích ΔAOB bằng $\dfrac{3}{2}$. Hỏi m là giá trị nguyên nằm trong khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-5)\cup(1;+\infty)$. **C.** $(-4;0)$. **D.** $(-2;2)$.

Câu 54. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-mx+m-l$ tại điểm $x_0=1$ cắt đường tròn $(x-2)^2+(y-3)^2=\frac{1}{5}$ theo cung có độ dài nhỏ nhất.

A. $m=1$ hoặc $m=2$. **B.** $m=1$ hoặc $m=-\frac{5}{2}$.

C. $m=-3$ hoặc $m=-1$ **D.** $m=-1$ hoặc $m=3$.

Câu 55. Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c, c<0$ có đồ thị (C) cắt Oy tại A và có hai điểm chung với Ox là M,N. Tiếp tuyến với đồ thị tại M đi qua A. Tìm $T=a+b+c$ biết $S_{AMN}=1$.

A. $T=-1$. **B.** $T=2$. **C.** $T=5$. **D.** $T=-3$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 38. Đáp án B.

$y'=\frac{2}{x+1}; x_0=0 \Rightarrow y_0=-1$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(0;-1)$ là: $y=y'(0)(x-0)-1 \Leftrightarrow y=2x-1$.

Câu 39. Đáp án A.

$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}; y_0=2 \Rightarrow \sqrt{x_0+2}=2 \Leftrightarrow x_0=2$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(2;2)$ là $y=y'(2)(x-2) \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$.

Câu 40. Đáp án C.

$f'(x)=\cos x$. Theo giả thiết $\Rightarrow f'(x_0)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x_0=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in Z$

Do $x_0\in[0;2\pi] \Rightarrow x_0=\frac{\pi}{3}; x_0=\frac{5\pi}{3}$.

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn.

Câu 41. Đáp án B.

$y'=3x^2-2x \Rightarrow y'(1)=5$

Câu 42. Đáp án C.

Giao điểm của (C) với Ox là $A(2;0)$.

$y'=\frac{-2}{(x-3)^2}$

Phương trình tiếp tuyến tại $A(2;0)$ là :

$y=y'(2)(x-2)+0 \Leftrightarrow y=-2x+4$

Câu 43. Đáp án C.

$y=3x^2-2$

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất $\Delta: y=x$

$\Rightarrow y'(x_0).1 = -1 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 2 = -2 \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là : $y = -x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 - 5\sqrt{3}}{9}$ và $y = -x - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{18 + 5\sqrt{3}}{9}$

Câu 44. Đáp án A.

TXĐ: $D = R\setminus\{0\}$ nên (C) không giao với Oy.

(C) giao với Ox tại $M(1;0)$ nên phương trình tiếp tuyến là: $y = y'(1)(x-1) = x-1$.

Câu 45. Đáp án B.

Ta có: $y' = 2x - 6$.

Phương trình tiếp tuyến song song với trục hoành

$\Rightarrow\ y'(x_0) = 0\ \Leftrightarrow\ x_0 = 3\ \Rightarrow\ y_0 = 4$

Phương trình tiếp tuyến là: $y = -4$.

Câu 46. Đáp án C.

TXĐ: $D = R\setminus\{0\}; y' = \frac{4}{x^2}$.

Theo giả thiết $y'(x_0)(-1) = -1 \Leftrightarrow y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{x_0^2} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = x - 2$ và $y = x + 6$

Câu 47. Đáp án D.

$y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$.Đồ thị hàm số có tâm đối xứng $\mathrm{I}(1;1)$.

Lấy điểm $A(x_0;y_0) \in (C)$, gọi B là điểm đối xứng với A qua $I \Rightarrow\ B(2-x_0;2-y_0) \in (C)$.

Ta có:

+ Hệ số góc của phương trình tại A là: $k_A = y'(x_0) = \frac{-2}{(x_0-1)^2}$

+ Hệ số góc của phương trình tại B là: $k_B = y'(2-x_0) = \frac{-2}{(x_0-1)^2}$

Ta thấy $k_A = k_B$ nên có vô số cặp điểm $A, B \in (C)$ mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau.

Câu 48. Đáp án D.

Ta có $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0;y_0)\in(C)$ là : $y=-\dfrac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{1}{x_0-1}$ (Δ)

(Δ) giao với $Ox: A(2x_0-1;0)$.

(Δ) giao với $Oy: B\left(0;\dfrac{2x_0-1}{(x_0-1)^2}\right)$.

$S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB\Leftrightarrow\left(\dfrac{2x_0-1}{x_0-1}\right)^2=4\Leftrightarrow x_0=\dfrac{3}{4}\Rightarrow y_0=-4$

Vậy $x_0+y_0=\dfrac{3}{4}-4=-\dfrac{13}{4}$.

Câu 49. Đáp án A.

$y'=x^2+2x, y''=2x+2$

$y''(x_0)=0\Leftrightarrow 2x_0+2=0\Leftrightarrow x_0=-1\Rightarrow y_0=-\dfrac{4}{3}$

Phương trình tiếp tuyến tại $M\left(-1;-\dfrac{4}{3}\right)$ là : $y=-x-\dfrac{7}{3}$.

Câu 50. Đáp án C.

$y'=3x^2+6x+3$. Gọi $A(x_A;y_A),B(x_B;y_B)$.

Tiếp tuyến tại A,B lần lượt có hệ số góc là:

$k_A=3x_A^2+6x_A+3,\quad k_B=3x_B^2+6x_B+3$

Theo giả thiết: $k_A.k_B=-1$

$\Leftrightarrow(3x_A^2+6x_A+3)(3x_B^2+6x_B+3)=-1$

$\Leftrightarrow 9(x_A^2+2x_A+1)(x_B^2+2x_B+1)=-1$

$\Leftrightarrow 9(x_A+1)^2(x_B+1)^2=-1$ (Vô lý).

Vậy không tồn tại cặp điểm A,B thỏa mãn.

Câu 51. Đáp án D.

$y'=4x^3-4x$. Gọi $M_0(x_0;y_0)\in(C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại M_0 là:

$y=(4x_0^3-4x_0)(x-x_0)+x_0^4-2x_0^2+2$ (Δ)

Vì Δ đi qua $A(0;2)$ nên: $2=(4x_0^3-4x_0)(-x_0)+x_0^4-2x_0^2+2$

$\Leftrightarrow -3x_0^4+2x_0^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\ x_0=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}\end{array}\right.$

Ứng với 3 hoành độ x_0 ta viết được 3 phương trình tiếp tuyến với (C) .

Câu 52. Đáp án A.

$y' = 3x^2 - 6x$. Gọi $M_0(x_0; y_0) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại M_0 là: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M :

$y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 = 3(x_0 - 1)^2 - 3 \Leftrightarrow y'(x_0) \geq -3$

Do đó, hệ số góc nhỏ nhất là -3 khi $x_0 = 1$

$\Rightarrow y_0 = 0$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M_0(0;1)$ là: $y = -3x + 3$

Câu 53. Đáp án B.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$\frac{1}{x\sqrt{2}} = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x^2 \Rightarrow x = 1,\ x \neq 0$

$\Rightarrow$ giao điểm $M\left(1; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ta có $f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}; g'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f'(1).g'(1) = -1$

Vậy góc giữa 2 tiếp tuyến đó là 90^0 .

Câu 54. Đáp án D.

$y' = mx^2 + 2(m-1)x + 4 - 3m$

Theo bài ra $y'.\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow y' = 2$

$\Leftrightarrow mx^2 + 2(m-1)x + 2 - 3m = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \frac{1}{2} \\ 0 < m < 1 \\ 0 < m < \frac{2}{3} \end{cases} \quad hay\ m \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right).$$

Câu 55. Đáp án A.

Phương trình tiếp tuyến tại $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ là:

$$y = \frac{-x}{(x_0 - 1)^2} + \frac{2x_0^2 - 2x_0 + 1}{(x_0 - 1)^2} (\Delta)$$

(Δ) giao với Ox tại $A(2x_0^2 - 2x_0 + 1; 0)$.

(Δ) giao với Oy tại $B\left(0;\dfrac{2x_0^2-2x_0+1}{(x_0-1)^2}\right)$.

$OA=4OB \Leftrightarrow (x_0-1)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=3 \\ x_0=-1 \end{array}\right.$

Từ đó ta được 2 phương trình tiếp tuyến là:

$y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$ và $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$.

Câu 56. Đáp án A.

Với $x_0=1 \Rightarrow y_0=m-2 \Rightarrow M(1;m-2)$

Phương trình tiếp tuyến tại M là $(\Delta): y=-3x+m+1$

(Δ) giao với Ox tại $A\left(\dfrac{m+1}{3};0\right)$.

(Δ) giao với Oy tại $B(0;m+1)$.

$S_{OAB}=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|m+1|}{3}.|m+1|=3$

$\Leftrightarrow (m+1)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-4 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Câu 57. Đáp án B.

Với $x_0=1 \Rightarrow y_0=0 \Rightarrow M(1;0)$, $y'=3x^2-m$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(1;0)$ là:

$(3-m)x-y-3+m=0 \ (\Delta)$

Đường tròn tâm $I(2;3)$ và bán kính $R=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Vì $IM>R$ nên độ dài cung nhỏ nhất khi (Δ) tiếp xúc với đường tròn tức là:

$d(I;\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|(3-m).2-3-3+m|}{\sqrt{(3-m)^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\Leftrightarrow 2m^2+3m-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$.

Câu 58. Đáp án A.

Giả sử *(C)* cắt Ox tại $M(m;0)$, $N(n;0)$, cắt Oy tại $A(0;c)$.

Tiếp tuyến tại M có phương trình:

$y=(3m^2+2am+b)(x-m) \quad (\Delta)$

Tiếp tuyến (Δ) đi qua A nên

$3m^3+2am^2+bm+c=0$

$\Leftrightarrow 2m^3+am^2=0 \ \left(do\ m^3+am^2+bm+c=0\right)$

$\Leftrightarrow m=-\dfrac{a}{2}.$

Vì *(C)* cắt *Ox* tại 2 điểm nên *(C)* tiếp xúc với *Ox* (do tính chất đồ thị hàm bậc 3 học sinh sẽ được học rõ hơn lớp 12).

Nếu *M* là tiếp điểm $\Rightarrow Ox$ đi qua *A* (vô lý)

$\Rightarrow (C)$ tiếp xúc với Ox tại *N*.

Do đó $y=x^3+ax^2+bx+c=(x-n)^2(x-m)$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+2n=-a \\ 2m.n+n^2=b \\ m.n^2=-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\dfrac{a}{2}, \text{n}=-\dfrac{a}{4} \\ a^3=32c \\ 5a^2=16b \end{cases} \qquad (I)$$

Mặt khác $S_{\Delta AMN}=1 \Leftrightarrow -c.|n-m|=2 \Leftrightarrow -c.|a|=8$

- Với $a>0 \Rightarrow \begin{cases} a^3=32c \\ ac=-8 \\ 5a^2=16b \end{cases}$ (vô nghiệm)

- Với $a<0 \Rightarrow \begin{cases} a^3=32c \\ ac=8 \\ 5a^2=16b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=5 \\ c=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow T=a+b+c=-1.$