BẤT ĐẲNG THỨC

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT-NHỎ NHẤT

Bài viết này đề cập đến một số phương pháp cơ bản và thông dụng nhất để chứng minh BĐT hoặc tìm GTLN và GTNN của một biểu thức.

&1. BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

1. Kiến thức cơ bản

Bất đẳng thức Côsi cho hai số hoặc ba số

a/ Nếu a, b là các số không âm, ta luôn có: $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \quad (1)$

Dấu "=" trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

b/ Nếu a, b, c là các số không âm, ta luôn có: $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc} \ (2)$

Dấu "=" trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Một số dạng thông dụng của bất đẳng thức côsi

a/ Nếu a, b là các số dương, thì luôn có

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge 4,\ \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge \frac{4}{a+b},\ ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,\ a^2+b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

b/ Nếu a, b là các số dương, thì luôn có

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9,\ \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge \frac{9}{a+b+c},\ abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bất đẳng thức Côsi cho n số không âm

Cho n số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không âm, ta luôn có : $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2. Các dạng toán

Khi sử dụng ***bất đẳng thức côsi*** ta phải chú ý đến **điều kiện** bài toán và đặc biệt dấu **"="** xảy ra khi nào?

Loại 1: Tổng và tích

Ví dụ 1: Cho a, b, c là các số không âm. Chứng minh rằng: $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \ (1)$

Giải

Do $a,b,c \geq 0$ nên áp dụng ***bất đẳng thức côsi*** cho từng cặp 2 số, ta được:

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$

$b+c \geq 2\sqrt{bc}$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b=c$

$c+a \geq 2\sqrt{ca}$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow c=a$

Nhân ba bất đẳng thức cùng chiều theo từng vế, ta được (1)

Dấu "=" trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 2: (Đề thi khối B – 2005)

Chứng minh rằng với mọi $x \in R$, ta có: $\left(\dfrac{12}{5}\right)^x + \left(\dfrac{15}{4}\right)^x + \left(\dfrac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x$

Giải

Chú ý: $\dfrac{12}{5}.\dfrac{15}{4} = 3^2$, $\dfrac{15}{4}.\dfrac{20}{3} = 5^2$, $\dfrac{20}{3}.\dfrac{12}{5} = 4^2$.

Áp dụng bất đẳng thức côsi $x+y \geq 2\sqrt{xy}$, ta có:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x\left(\frac{15}{4}\right)^x} = 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}.\frac{15}{4}\right)^x} = 2\sqrt{\left(3^2\right)^x} = 2.\left(\sqrt{3^x}\right)^2 = 2.3^x$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^x = \left(\frac{15}{4}\right)^x \Leftrightarrow x=0$

Tương tự: $\left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2.5^x$, $\left(\frac{20}{3}\right)^x + \left(\frac{12}{5}\right)^x \geq 2.4^x$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta được: $\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x=0$

Ví dụ 3: Cho a, b là các số thực thỏa $a+b=2$ .Chứng minh rằng: $ab\left(a^2+b^2\right)\leq 2(1)$

Nhận xét: Dấu “=” trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a=b \Rightarrow 2ab = a^2+b^2$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$,ta có:

$$ab\left(a^2+b^2\right) = \frac{1}{2}.2ab\left(a^2+b^2\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2ab+a^2+b^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{(a+b)^2}{2}\right]^2 = 2$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 2ab=a^2+b^2 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1$

Ví dụ 4: Cho a, b là các số thực dương thỏa $a+b=2$. Chứng minh rằng: $a^3b^3\left(a^3+b^3\right)\leq 2$ (1)

Nhận xét:

- $a^3+b^3 = (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right) = 2\left(a^2-ab+b^2\right)$
- Dấu “=” trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a=b \Rightarrow a^2-ab+b^2 = ab$

Giải

$$a^3b^3\left(a^3+b^3\right)\leq 2 \Leftrightarrow a^3b^3\left(a^2-ab+b^2\right)\leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $xyzt \leq \left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^4$. Dấu "=” xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=t$, ta có:

$$a^3b^3\left(a^2-ab+b^2\right)=ab.ab.ab.\left(a^2-ab+b^2\right)\le\left(\frac{ab+ab+ab+a^2-ab+b^2}{4}\right)^4=\left[\frac{(a+b)^2}{4}\right]^4=1$$

Dấu "=" xảy ra $\begin{cases}ab=a^2-ab+b^2\\ a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow a=b=1$

Ví dụ 5: Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$(a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)^2\ge 64abcd$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $(x+y)^2\ge 4xy$, ta có:

$(a+b)^2\ge 4ab$ $\quad (a+b+c)^2\ge 4c(a+b)$

$(a+b+c+d)^2\ge 4d(a+b+c)$

Nhân ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được:

$$(a+b)^2(a+b+c)^2(a+b+c+d)^2\ge 64abcd(a+b)(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)^2\ge 64abcd$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}d=a+b+c\\ c=a+b\\ a=b\end{cases}\Leftrightarrow d=2c=4b=4a$

Ví dụ 6: Cho *a* + *b* = 2. Chứng minh rằng: $a^4+b^4\ge 2$.

Áp dụng bất đẳng thức $2\left(x^2+y^2\right)\ge(x+y)^2$ liên tiếp

Ta có: $2(a^2+b^2)\ge(a+b)^2=4\Rightarrow a^2+b^2\ge 2$.

và $2(a^4+b^4)\ge(a^2+b^2)^2\ge 2^2=4$

Suy ra: $a^4+b^4\ge 2$ (đpcm)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\ a=b\end{cases}\Leftrightarrow a=b=1$

Bài tập tương tự

Bài 1: Cho a, b, c là các số không âm. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

Bài 2: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $2^{a^2}+2^{b^2}+2^{c^2} \geq 2^{ab}+2^{bc}+2^{ca}$.

Bài 3: Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng: $a^3b+b^3c+c^3a \geq ab+bc+ca$.

Bài 4: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Bài 5: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq \frac{9}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$

Loại 2: Biến chứa trong căn

Ví dụ 1: Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}$.

Giải:

Nhận xét: Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3} \Rightarrow a+b=b+c=c+a=\frac{2}{3}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\sqrt{\frac{2}{3}(a+b)}+\sqrt{\frac{2}{3}(b+c)}+\sqrt{\frac{2}{3}(c+a)} \leq 2$

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, ta có:

$$\sqrt{\frac{2}{3}(a+b)} \leq \frac{\frac{2}{3}+a+b}{2} \qquad \sqrt{\frac{2}{3}(b+c)} \leq \frac{\frac{2}{3}+b+c}{2} \qquad \sqrt{\frac{2}{3}(c+a)} \leq \frac{\frac{2}{3}+c+a}{2}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, suy ra kết quả.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=b+c=c+a=\frac{2}{3} \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 2: Cho $c>0$ và $a,b \geq c$. Chứng minh rằng: $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$

Giải:

Tương tự chứng minh trong ví dụ 1

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow A=\sqrt{\frac{c}{b}\left(\frac{a-c}{a}\right)}+\sqrt{\frac{c}{a}\left(\frac{b-c}{b}\right)} \leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$, ta có:

$$A = \sqrt{\frac{c}{b}\left(\frac{a-c}{a}\right)} + \sqrt{\frac{c}{a}\left(\frac{b-c}{b}\right)} \le \frac{\frac{c}{b} + \frac{a-c}{a}}{2} + \frac{\frac{c}{a} + \frac{b-c}{b}}{2} = 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{a-c}{a} \\ \frac{c}{a} = \frac{b-c}{b} \end{cases} \Leftrightarrow ab = ac + bc \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Ví dụ 3: (Đề thi khối D – 2005)

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \ge 3\sqrt{3}$$

<u>Giải:</u>

<u>Lưu ý:</u> **Nhận thấy dấu "=" xảy ra** $\Leftrightarrow x = y = z = 1$**.**

Áp dụng BĐT côsi dạng $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$. Ta có:

$$1 + x^3 + y^3 \ge 3\sqrt[3]{1.x^3.y^3} = 3xy \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \ge \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}$$

Tương tự : $\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \ge \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}, \quad \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \ge \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}$

Từ đó suy ra $VT \ge \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}\right) \ge 3\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{xy}}\frac{1}{\sqrt{yz}}\frac{1}{\sqrt{zx}}} = 3\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} = 3\sqrt{3} \quad (CMX)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1, \ \ y = z = 1, \ \ z = x = 1 \\ \sqrt{xy} = \sqrt{yz} = \sqrt{xz}, \qquad xyz = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Ví dụ 4: Cho a, b, c là các số dương thỏa $a+b+c = \frac{3}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt[3]{a+3b} + \sqrt[3]{b+3c} + \sqrt[3]{c+3a}$$

<u>Giải:</u>

Nhận xét: **Dấu "=" xảy ra** $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{4} \Rightarrow a+3b=b+3c=c+3a=1$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}$, ta có:

$$P=\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt[3]{b+3c}+\sqrt[3]{c+3a}=\sqrt[3]{1.1.(a+3b)}+\sqrt[3]{1.1.(b+3c)}+\sqrt[3]{1.1.(c+3a)}$$
$$\le \frac{1+1+a+3b}{3}+\frac{1+1+b+3c}{3}+\frac{1+1+c+3a}{3}=\frac{6+4(a+b+c)}{3}=3$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{4}$

Vậy $\min P=3 \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{4}$

Ví dụ 5: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn: $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{3}{2}.$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $\sqrt{\frac{1}{AB}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)$ và lưu ý : $1=ab+bc+ca$

Ta có: $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{ab+bc+ca+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right)$.

Tương tự: $\frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right)$, $\quad \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+c}+\frac{c}{b+c}\right)$.

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài tập tương tự

Bài 1 : Cho $a,b,c \ge -\frac{1}{4}$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh : $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5$.

Bài 2 : Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng : $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$.

__Bài 3 :__ Cho $|a| \le 1, |b| \le 1, |a+b| = \sqrt{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

A = $\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2}$ (Đề thi vào lớp 10 THPT Hải Dương)

__Bài 4:__ Cho $a,b,c > 0$ thỏa $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}$.

__Bài 5:__ Cho $-1 \le a \le 1$. Chứng minh rằng: $\sqrt[4]{1-a^2} + \sqrt[4]{1-a} + \sqrt[4]{1+a} \le 3$

Loại 3: Mẫu chứa biến

Loại này rất đa dạng và khi giải đòi hỏi nhiều thủ thuật, biến đổi phức tạp. Sau đây là một số thủ thuật đơn giản thường gặp.

__Thêm bớt để khử Mẫu: Chú ý việc bảo tồn dấu "=" khi thực hiện.__

Ví dụ 1: Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$ (1)

__Lưu ý__: Trong (1) ta nhận thấy dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ *và VT(1) dạng phân số, VP(1) là một số thực. Ta nghĩ ngay tới **bất đẳng thức côsi** dạng* $\frac{A}{B} + \frac{B}{A} \ge 2\sqrt{\frac{A}{B}.\frac{B}{A}} = 2(*)$*.Dấu "="trong* $(*)$ *xảy ra* $\Leftrightarrow A = B$ *với* $A,B > 0$.

Lời giải (1):

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \ge 3 \Leftrightarrow \left(\frac{2a}{b+c}+1\right) + \left(\frac{2b}{c+a}+1\right) + \left(\frac{2c}{a+b}+1\right) \ge 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{b+c} + \frac{a+c}{b+c}\right) + \left(\frac{b+c}{c+a} + \frac{b+a}{c+a}\right) + \left(\frac{c+a}{a+b} + \frac{c+b}{a+b}\right) \ge 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{b+c} + \frac{c+b}{a+b}\right) + \left(\frac{b+c}{c+a} + \frac{a+c}{b+c}\right) + \left(\frac{c+a}{a+b} + \frac{b+a}{c+a}\right) \ge 6 \quad (2)$$

Do a, b, c là các số dương. Nên áp dụng $(*)$, ta được:

$\frac{a+b}{b+c} + \frac{c+b}{a+b} \ge 2$. Dấu "=" xảy ra $a = c$

$\frac{b+c}{c+a} + \frac{a+c}{b+c} \ge 2$. Dấu "=" xảy ra $b = a$

$\frac{c+a}{a+b}+\frac{b+a}{c+a}\geq 2$. Dấu "=" xảy ra $c=b$

Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều theo từng vế, ta được (2)

Dấu "=" trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 2: Cho *a, b, c* > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq\frac{15}{2}$

Giải

Lưu ý: Có bạn làm như sau:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$
$$=\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{a}\right)+\left(\frac{b}{a+c}+\frac{c+a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a+b}{c}\right)\geq 2+2+2=6$$

Nhưng dấu "=" không thể xảy ra. Vì sao? Các bạn tự trả lời.

Lời giải đúng:

Ta có:

$$A=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\geq 2+2+2=6$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

$$B=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ (ví dụ 1b.)

Suy ra: $A+B\geq 6+\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ *a = b = c.*

Ví dụ 3: Cho *a, b, c* > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\geq a+b+c$

Lưu ý: Nhận thấy VT là dạng phân số, VP là tổng bậc 1 và hai vế đồng bậc. Hơn nữa dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$. Nên ta nghỉ ngay tới là triệt tiêu mẫu số ở VT và phải luôn bảo tồn dấu "=".

Giải

Ta có:

$$\frac{a^2+b^2}{2c}+c\ge 2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge 2\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}}=a+b$$

$$\frac{b^2+c^2}{2a}+a\ge 2\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\ge 2\sqrt{\frac{(b+c)^2}{4}}=b+c$$

$$\frac{c^2+a^2}{2b}+b\ge 2\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}\ge 2\sqrt{\frac{(c+a)^2}{4}}=c+a$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo từng vế, suy ra:

$$\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\ge a+b+c$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học Sài Gòn khối A-B 2007)

Cho a, b, c là ba số dương thỏa $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}$$

Lưu ý: Điều kiện là bậc hai nhưng biểu thức P là bậc nhất. Bài toán yêu cầu tìm giá trị nhỏ nhất, có nghĩa là ta chứng minh $P\ge k,(k=const)$. Do đó ta nghĩ tới việc đánh giá $P^2\ge k^2\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

Giải

Do a, b ,c là các số dương nên $P>0$ và

$$P^2=\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)^2=\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}+2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $A+B\ge 2\sqrt{AB}$, ta có:

$$\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}\ge 2b^2,\qquad \frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\ge 2c^2,\qquad \frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\ge 2a^2$$

Suy ra $P^2\ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)=3\Rightarrow P\ge\sqrt{3}\ (P>0)$

Vậy $\min P=\sqrt{3}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 5: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge\frac{3}{2}.$$

<u>Giải:</u>

Ta có: $$\frac{a}{1+b^2}=\frac{a(1+b^2)-ab^2}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab}{2}.$$

Tương tự: $$\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2};\qquad \frac{c}{1+a^2}\ge c-\frac{ac}{2}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh: $$a+b+c-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\ge\frac{3}{2}.$$

Từ BĐT $3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2$ suy ra $ab+bc+ca\le 3$.

Do đó: $a+b+c-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\ge\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c=1$.

Ví dụ 6: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b^3+8}+\frac{b^3}{c^3+8}+\frac{c^3}{a^3+8}\ge\frac{1}{9}+\frac{2}{27}(ab+bc+ca).\qquad (*)$$

<u>Giải:</u>

Ta có: $$\frac{a^3}{b^3+8}+\frac{b+2}{27}+\frac{b^2-2b+4}{27}\ge\frac{a}{3}\Rightarrow\frac{a^3}{b^3+8}\ge\frac{9a+b-b^2-6}{27}.$$

Tương tự: $$\frac{b^3}{c^3+8}\ge\frac{9b+c-c^2-6}{27};\qquad \frac{c^3}{a^3+8}\ge\frac{9c+a-a^2-6}{27}.$$

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta có:

$$\text{VT }(*) \geq \frac{10(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)-18}{27} = \frac{12-(a^2+b^2+c^2)}{27} =$$

$$= \frac{3+(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{27} = \frac{1}{9}+\frac{2}{27}(ab+bc+ca) \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

<u>Đánh giá nghịch đảo</u>

Ví dụ 7: (Đề thi khối B, 2014) Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa $(a+b)c>0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\frac{c}{2(a+b)}$.

<u>Giải:</u>

Ta có $a+b+c\geq 2\sqrt{a(b+c)} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}}\geq \frac{2a}{a+b+c}$. Tương tự $\sqrt{\frac{b}{a+c}}\geq \frac{2b}{a+b+c}$

Suy ra $P\geq \frac{2(a+b)}{a+b+c}+\frac{c}{2(a+b)}=\left[\frac{2(a+b)}{a+b+c}+\frac{a+b+c}{2(a+b)}\right]-\frac{1}{2}\geq 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

Khi $a=0,\ b=c>0$ thì $P=\frac{3}{2}$.Vậy $\min P=\frac{3}{2}$ $khi\ a=0,\ b=c>0$

Ví dụ 8: Cho *a, b, c* là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a-b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}}\geq 3.$$

<u>Giải</u>

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $\sqrt{xy}\leq \frac{x+y}{2}$, ta có:

$$2\sqrt{\frac{b+c-a}{a}}\leq \frac{b+c-a}{a}+1=\frac{b+c}{a} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\geq \frac{2a}{b+c}.$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{b}{c+a-b}} \ge \frac{2b}{a+c}$; $\sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \ge \frac{2c}{a+b}$

Ta chỉ cần chứng minh: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2} (*)$ là xong.

Chứng minh $(*)$ xem **ví dụ 1 loại 3**

Ví dụ 9: Cho a, b, c, d là những số thực không âm thỏa mãn

$$(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b) > 0$$

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c+d}}+\sqrt{\frac{b}{c+d+a}}+\sqrt{\frac{c}{d+a+b}}+\sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \ge 2$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$, ta có

$$\sqrt{a(b+c+d)} \le \frac{a+(b+c+d)}{2} \Rightarrow \frac{2\sqrt{a(b+c+d)}}{a+b+c+d} \le 1$$

Nhân hai vế với bất đẳng thức $\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} \ge 0$, ta được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} \ge \frac{2a}{a+b+c+d}$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{b}{c+d+a}} \ge \frac{2b}{a+b+c+d}$, $\sqrt{\frac{c}{d+a+b}} \ge \frac{2c}{a+b+c+d}$, $\sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \ge \frac{2d}{a+b+c+d}$

Cộng theo vế bốn bất đẳng thức trên, ta suy ra điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ hai trong bốn số bằng nhau và hai số còn lại bằng 0. Vì sao?....

Đánh giá mẫu

Ví dụ 10: Cho ba số thực dương *a, b, c* . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \ge \frac{1}{5}(a+b+c) \quad (*)$$

Giải:

Ta có: $\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}=\sqrt{(a+4b)(3a+2b)}\le\frac{1}{2}(4a+6b)=2a+3b$.

Tương tự với các mẫu số còn lại. Từ đó:

$$VT(*)\ge\frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2a+3b+2b+3c+2c+3a}=\frac{1}{5}(a+b+c)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 11: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le 1. \qquad (*)$$

Giải:

Trước hết ta chứng minh BĐT: $x^5+y^5\ge x^2y^2(x+y)$ (1) với mọi *x* > 0, *y* > 0.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^3(x^2-y^2)+y^3(y^2-x^2)\ge 0 \Leftrightarrow (x^3-y^3)(x^2-y^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y)(x^2+xy+y^2)\ge 0$ (luôn đúng với mọi *x* > 0, *y* > 0).

Do đó: $\frac{ab}{a^5+b^5+ab}\le\frac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab}=\frac{1}{ab(a+b)+abc}=\frac{1}{ab(a+b+c)}$.

Tương tự: $\frac{bc}{b^5+c^5+bc}\le\frac{1}{bc(a+b+c)}$; $\quad \frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le\frac{1}{ca(a+b+c)}$.

Suy ra: VT (*) $\le\frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{abc(a+b+c)}=1$. (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 12: Cho x, y, z, t là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{x^3}{x^3+3yzt}+\frac{y^3}{y^3+3ztx}+\frac{z^3}{z^3+3txy}+\frac{t^3}{t^3+3xyz}\ge 1$$

Giải :

Áp dụng bất đẳng thức côsi dạng $3abc \le a^3 + b^3 + c^3$.

(***Các bạn tự giải tiếp!***)

Sử dụng bất đẳng thức phụ :

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge \frac{4}{a+b} \qquad (1)$$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge \frac{9}{a+b+c} \qquad (2)$$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Trong đó *: a, b, c là các số thực dương.*

Ví dụ 13: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn *a + b + c* = 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc} \ge 16$

Giải :

Áp dụng (1) ta có: $$\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge \frac{4}{c(a+b)} \ge \frac{4}{\left(\frac{c+a+b}{2}\right)^2} = 16.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow c = \frac{1}{2},\ a = b = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 14: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn *a + b + c* ≤ 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2009}{ab+bc+ca} \ge 670.$$

Giải :

Áp dụng (2), ta có:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} \ge \frac{9}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = \frac{9}{(a+b+c)^2} \ge 1 \quad (3)$$

Mặt khác, ta có: $$3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2 \Rightarrow \frac{2007}{ab+bc+ca} \ge \frac{3.2007}{(a+b+c)^2} \ge 669 \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Ví dụ 15: Cho *a, b, c* là độ dài 3 cạnh của một tam giác (*p* là nửa chu vi). Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Áp dụng (1), ta có:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\ge\frac{4}{2p-a-b}=\frac{4}{c} \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge\frac{4}{2p-b-c}=\frac{4}{a} \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a}\ge\frac{4}{2p-a-c}=\frac{4}{b} \qquad \text{(c)}$$

Cộng (a), (b), (c), vế theo vế, ta được:

$$2\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)\ge 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Dấu "=" xảy ra ⇔ *a = b = c*.

Ví dụ 16: (Đề thi khối A-2005)

Cho *a, b, c* > 0 thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$. Chứng minh $\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{2b+a+c}+\frac{1}{2c+a+b}\le 1$

<u>Giải:</u>

Từ (1) dạng: $\frac{4}{x+y}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Rightarrow\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}$

Suy ra $\frac{1}{2a+(b+c)}\le\frac{1}{8a}+\frac{1}{4(b+c)}=\frac{1}{8a}+\frac{1}{4b+4c}\le\frac{1}{8a}+\frac{1}{16b}+\frac{1}{16c}$

Tương tự : $\frac{1}{2b+(a+c)}\le\frac{1}{8b}+\frac{1}{16a}+\frac{1}{16c}$; $\qquad \frac{1}{2c+(a+b)}\le\frac{1}{8c}+\frac{1}{16a}+\frac{1}{16b}$

Cộng vế với vế 3 bđt trên, rồi rút gọn ta có đpcm.

Ví dụ 17: Cho *a, b, c* > 0. Chứng minh rằng:

$$3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)\geq 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)^2$$

<u>Giải:</u>

Áp dụng (1) dạng $\frac{1}{xy}\geq\frac{4}{(x+y)^2}$, ta được: $\frac{1}{ab}\geq\frac{4}{(a+b)^2}$

Tương tự: $\frac{1}{ac}\geq\frac{4}{(a+c)^2}$; $\frac{1}{bc}\geq\frac{4}{(b+c)^2}$

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được:

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\geq 4\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}\right)$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)\geq 4.3\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}\right]\geq 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)^2$$

(Do $3(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+z)^2,\quad \forall x,y,z.$)

Ví dụ 18: Cho *a, b, c* > 0. Chứng minh rằng: $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}\leq\frac{a+b+c}{2}$

<u>Giải:</u>

Từ (1) ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}\Rightarrow\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\frac{1}{4}(a+b)$.

Tương tự: $\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\leq\frac{1}{4}(b+c)$, $\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}\leq\frac{1}{4}(c+a)$.

Cộng các BĐT trên, vế theo vế, ta được đpcm.

Đặt Mẫu là biến mới

Ví dụ 19: Cho ba số thực dương *x, y, z*. Chứng minh rằng: $\frac{25x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{9z}{x+y}>12$ (*)

Giải:

Đặt $a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y$ (với *a* > 0, *b* > 0, *c* > 0).

Suy ra: $x=\frac{b+c-a}{2},\ y=\frac{c+a-b}{2},\ z=\frac{a+b-c}{2}$.

Ta có: VT (*) = $\frac{25(b+c-a)}{2a}+\frac{4(c+a-b)}{2b}+\frac{9(a+b-c)}{2c}$

$= \left(\frac{25b}{2a}+\frac{4a}{2b}\right)+\left(\frac{25c}{2a}+\frac{9a}{2c}\right)+\left(\frac{4c}{2b}+\frac{9b}{2c}\right)-19 \geq$ 10 + 15 + 6 – 19 = 12.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}5b=2a\\5c=3a\end{cases} \Rightarrow 5b+5c=5a \Rightarrow$ *x* = 0 (vô lí). Vậy BĐT (*) đúng.

Ví dụ 20: Cho *a, b, c* là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3 \qquad (*)$$

Giải:

Đặt $x=b+c-a;\ y=c+a-b;\ z=a+b-c \Rightarrow x+y+z=a+b+c$

Suy ra: $a=\frac{y+z}{2};\quad b=\frac{z+x}{2};\quad c=\frac{x+y}{2}$

Ta có: $VT(*)=\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{x}{z}+\frac{x}{y}\right)\geq\frac{1}{2}(2+2+2)=3$

Dấu "=" xảy ra ⇔ *x* = *y* = *z* ⇔ *a* = *b* = *c* hay ΔABC đều.

Ví dụ 21: Cho ba số $a,b,c\in(0;\frac{3}{2}):a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{3-2a}}+\frac{1}{\sqrt{3-2b}}+\frac{1}{\sqrt{3-2c}}\geq\frac{9}{ab+bc+ca}.$$

Giải:

Đặt $\sqrt{3-2a}=x, \sqrt{3-2b}=y, \sqrt{3-2c}=z$ thì $\begin{cases} x,y,z>0 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$;

Ta có: $ab+bc+ca=\frac{1}{4}(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9)$.

Do đó BĐT cần chứng minh trở thành:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{36}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9} \Leftrightarrow (\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9)\ge 36.$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số dương và 12 số dương ta được:

` $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$ >0 (1)

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+\underbrace{1+1+...+1}_{9 so 1}\ge 12\sqrt[12]{(xyz)^4}=12\sqrt[3]{xyz}>0 \text{ (2)}$$

Nhân vế theo vế của (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Vai trò như nhau của các biến

Ví dụ 22: Cho các số thực *a, b, c* đôi một khác nhau thuộc đoạn [0; 2]. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\ge\frac{9}{4} \qquad (*)$$

Giải:

Sử dụng BĐT Cô-si với *x* > 0, *y* > 0, ta có: $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)(x+y)^2\ge\frac{2}{xy}.4xy=8$.

Suy ra: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\ge\frac{8}{(x+y)^2}$ (1). Đẳng thức xảy ra ⇔ *x* = *y*.

Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử *a* > *b* > *c*. Áp dụng BĐT (1) cho cặp số dương *a* – *b* và *b* – *c*, ta có: $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}\ge\frac{8}{(a-b+b-c)^2}=\frac{8}{(a-c)^2}$.

Đẳng thức xảy ra ⇔ *a* – *b* = *b* – *c*.

Suy ra: $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\ge\frac{8}{(a-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}=\frac{9}{(a-c)^2}$.

Mặt khác, do *a, c* ∈ [0; 2] và *a* > *c* nên 0 < *a* – *c* ≤ 2. Đẳng thức xảy ra ⇔ *a* = 2 và *c* = 0.

Do đó: $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\ge\frac{9}{(a-c)^2}\ge\frac{9}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi *(a; b; c)* = (2; 1; 0) và các hoán vị.

Ví dụ 23: Cho $a,b,c>0$ thoả mãn *abc* = 1. Chứng minh $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$.

<u>Giải:</u>

Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử *a* ≥ *b* ≥ *c*.

Vì *abc* = 1 nên *bc* ≤ 1 và *a* ≥ 1. Ta có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right)^2\le 2\left(\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\right)=2\left(1+\frac{1-b^2c^2}{(1+b^2)(1+c^2)}\right)\le 2\left(1+\frac{1-b^2c^2}{(1+bc)^2}\right)$$

$$=\frac{4}{1+bc}=\frac{4a}{1+a}$$

Suy ra: $\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\le 2\sqrt{\frac{a}{1+a}}$ (1)

Mặt khác ta có: $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\le\frac{\sqrt{2}}{1+a}$ (2)

Ta sẽ chứng minh: $2\sqrt{\frac{a}{1+a}}+\frac{\sqrt{2}}{1+a}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$ (3)

Thật vậy, (3) ⇔ $1+3a-2\sqrt{2a(1+a)}\ge 0$ ⇔ $\left(\sqrt{2a}-\sqrt{1+a}\right)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Từ (1), (2) và (3) suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra ⇔ *a* = *b* = *c* = 1.

Ví dụ 24: Cho các số thực a, b, c không âm. Chứng minh rằng:

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0 \qquad (*)$$

Giải:

Do vai trò của *a, b, c* là như nhau nên có thể giả sử $a \geq b \geq c$.

+ Nếu có hai trong ba số *a, b, c* bằng nhau thì BĐT hiển nhiên đúng.

+ Nếu $a > b > c$, chia hai vế của (*) cho $(a-b)(b-c)(a-c)$ ta được BĐT tương đương:

$$\frac{a}{b-c}-\frac{b}{a-c}+\frac{c}{a-b}\geq 0 \qquad (1)$$

(1) luôn đúng do $\begin{cases} a > b > 0 \\ 0 < b-c < a-c \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b-c} > \frac{b}{a-c}$ và $\frac{c}{a-b} > 0$.

Bài tập tương tự

Bài 1: Cho $0<b<a$. Chứng minh rằng: $a+\frac{1}{(a-b)b}\ge 3$

Bài 2: Cho $0<b<a$. Chứng minh rằng: $a+\frac{1}{(a-b)(b+1)^2}\ge 3$

Bài 3: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng : $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2$.

Bài 4: (Đề thi tuyển sinh cao đẳng khối A,B – 2005) Cho $x\ge 2,\ y\ge 3,\ z\ge 4$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{xy\sqrt{z-4}+yz\sqrt{x-2}+zx\sqrt{y-3}}{xyz}$

Bài 5: Chứng minh rằng với $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$, ta luôn có

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\ge 1$$

Bài 6 : Cho ba số thực dương *a, b, c*. Chứng minh $\frac{2a^3}{a^6+bc}+\frac{2b^3}{b^6+ca}+\frac{2c^3}{c^6+ab}\le\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}$.

Bài 7: Cho ba số thực dương *x, y, z* thảo mãn $x+2y+3z=18$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2y+3z+5}{1+x}+\frac{3z+x+5}{1+2y}+\frac{x+2y+5}{1+3z}\ge\frac{51}{7}.$$

Bài 8: Cho hai số *a, b* dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = $\frac{a+b}{\sqrt{a(4a+5b)}+\sqrt{b(4b+5a)}}$

Bài 9: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a+b+c=2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{\sqrt{2c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{2a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{2b+ca}}\le 1.$$

Bài 10: Cho ba số thực dương *a, b, c* . Chứng minh rằng: $1+\frac{3}{ab+bc+ca}\ge\frac{6}{a+b+c}$.

Bài 11: Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức: M = $\frac{a^5}{b^3+c^2}+\frac{b^5}{c^3+a^2}+\frac{c^5}{a^3+b^2}+a^4+b^4+c^4$.

__Bài 12:__ Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}.$$

__Bài 13:__ Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5+b^5}{ab(a+b)}+\frac{b^5+c^5}{bc(b+c)}+\frac{c^5+a^5}{ca(c+a)}\ge 3(ab+bc+ca)-2.$$

__Bài 14:__ Cho ba số thực dương *a, b, c* thoả mãn $abc\ge 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a+\frac{1}{a+1}\right)\left(b+\frac{1}{b+1}\right)\left(c+\frac{1}{c+1}\right)\ge\frac{27}{8}.$$

__Bài 15:__ Cho ba số thực dương *a, b, c* . Chứng minh $\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\ge a+b+c$

__Bài 16:__ Cho *a, b, c* là các số thực thuộc đoạn [1; 2]. Chứng minh $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le 10$

&2. MỘT SỐ KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

I-KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI

Ý tưởng chính là việc xác định được dấu "=" xảy ra khi nào, để ta có những đánh giá hợp lí. Lý do là trong "Bất đẳng thức" bất kỳ đánh giá nào của chúng mà không bảo toàn được dấu "=" thì điều trở nên vô nghĩa. Hãy xét những ví dụ minh họa sau đây.

Ví dụ 1: Cho $x \geq 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 3x + \frac{1}{2x}$

Lời giải sai thường gặp: Áp dụng bất đẳng thức Côsi dạng $\frac{x+y}{2} \geq 2\sqrt{xy}$, ta có

$$A = 3x + \frac{1}{2x} \geq 2\sqrt{3x.\frac{1}{2x}} = \sqrt{6} \quad \Rightarrow \min A = \sqrt{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Nguyên nhân:

- $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$ không thỏa điều kiện $x \geq 1$.
- $A > \sqrt{6}$

Lời giải đúng: Dự đoán dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$. Để bảo toàn dấu bằng khi sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta chọn số α thỏa $\alpha x = \frac{1}{2x} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$. Khi đó

$$A = 3x + \frac{1}{2x} = \frac{5x}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x} \geq \frac{5x}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}x.\frac{1}{2x}} = \frac{5x}{2} + 1 \geq \frac{5.1}{2} + 1 = \frac{7}{2} \quad (do\, x \geq 1)$$

Suy ra $\min A = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = 1$.

Bài tập tương tự

a) Cho $x \geq 2$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x + \frac{1}{x}$

b) Cho $x \geq 10$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x + \frac{1}{x}$

c) Cho $x \geq 100$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x + \frac{1}{x}$

Ví dụ 2: Cho các số thực a,b thỏa mãn $0 \le a \le 3, 3 \le b \le 8$ và $a+b=11$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab$.

Lời giải sai thường gặp: Áp dụng bất đẳng thức Côsi dạng $xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, ta có

$$P=ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{121}{4} \Rightarrow \max P = \frac{121}{4} \Leftrightarrow a=b=\frac{11}{2}$$

Nguyên nhân:

- $a=\frac{11}{2}$ không thỏa điều kiện $0 \le a \le 3$
- $P < \frac{121}{4}$

Lời giải đúng: Dự đoán $\max P \ \ khi \begin{cases} a=3 \\ b=8 \end{cases} \Rightarrow 8a=3b$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$P=ab=\frac{1}{24}(8a)(3b) \le \frac{1}{24}\left(\frac{8a+3b}{2}\right)^2 = \frac{1}{96}\left[3(a+b)+5a\right]^2 \le \frac{1}{96}(3.11+5.3)=24$$

Suy ra $\max P=24 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=8 \end{cases}$

Ví dụ 3: Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{a+2b}+\sqrt[3]{b+2c}+\sqrt[3]{c+2a} \le 3\sqrt[3]{3}$.

Sai lầm thương gặp:

Ta có: $\sqrt[3]{1.1(a+2b)} \le \dfrac{1+1+(a+2b)}{3} = \dfrac{2+a+2b}{3}$, tương tự ta có:

$$\sqrt[3]{a+2b}+\sqrt[3]{b+2c}+\sqrt[3]{c+2a} \le \frac{2+a+2b}{3}+\frac{2+b+2c}{3}+\frac{2+c+2a}{3}=5$$

mà $5 > 3\sqrt[3]{3} \Rightarrow$ đề ra sai...?...?

Nguyên nhân sai lầm: $P=VT \le 5. \quad MaxP=5 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=b+2c=c+2a=1 \\ a+b+c=3 \end{cases} \quad (vn)$

Vậy $P<5$

Lời giải đúng: Ta dự đoán dấu "=" trong bất đẳng thức xảy ra khi

$a=b=c=1 \Rightarrow a+2b=b+2c=c+2a=3$. Nên áp dụng bất đẳng thức Côsi dạng $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}$, ta có:

$$\sqrt[3]{a+2b}=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\sqrt[3]{3.3(a+2b)} \le \frac{1}{\sqrt[3]{9}}.\frac{3+3+(a+2b)}{3}=\frac{6+a+2b}{3\sqrt[3]{9}}$$

$\Rightarrow P \le \frac{6+a+2b}{3\sqrt[3]{9}}+\frac{6+b+2c}{3\sqrt[3]{9}}+\frac{6+c+2a}{3\sqrt[3]{9}}=3\sqrt[3]{3}$, dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

<u>Bài tập tương tự</u>

a) Cho $a\ge 0, b\ge 0, c\ge 3$ thỏa mãn $a+b+c=6$. Chứng minh rằng: $abc \le \frac{27}{4}$.

b) Cho $x,y,z>0$ thỏa $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. Tìm GTLN của $P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}$

c) Cho $a\ge 2, b\ge 3, c\ge 4$, tìm GTLN: $P=\frac{ab\sqrt{c-4}+bc\sqrt{a-2}+ca\sqrt{b-3}}{abc}$.

d) Cho $x,y,z>0$ và $x+y=1$.Tìm GTNN của $P=\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{y}{\sqrt{1-y}}$ (ĐHNT 2001–2002)

Ví dụ 4: Cho $a,b>0$ thỏa mãn $a+b\le 1$. Tìm GTNN của biểu thức $P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}+4ab$.

Lời giải đúng: Do P là biểu thức đối xứng với a,b, ta dự đoán $MinP$ đạt tại $a=b=\frac{1}{2}$, ta có:

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}+\left(4ab+\frac{1}{4ab}\right)+\frac{1}{4ab} \ge \frac{4}{(a+b)^2}+2\sqrt{4ab.\frac{1}{2ab}}+\frac{1}{4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \ge 7$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=2ab \\ a^2b^2=\frac{1}{16}, \quad a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$.

Vậy $\min P = 7 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

<u>Bài tập tương tự</u>

a) Cho $a,b>0$ thỏa mãn $a+b\le 1$. Tìm GTNN của biểu thức $S=\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$.

b) Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c\le 1$. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

$$P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$

$$S=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$

$$Q=\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$

Ví dụ 5: Cho $x,y,z>0$ và $xyz=1$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{1+y}+\frac{y^2}{1+z}+\frac{z^2}{1+x}\ge\frac{3}{2}$

Ý tưởng là triệt tiêu mẫu.

Sai lầm thường gặp:

Ta có: $\frac{x^2}{1+y}+(1+y)\ge 2x,\quad \frac{y^2}{1+z}+(1+z)\ge 2y,\quad \frac{z^2}{1+x}+(1+x)\ge 2$

$$\Rightarrow P\ge 2(x+y+z)-(x+y+z)-3=x+y+z-3$$

Mặt khác $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3\Rightarrow P\ge 0$

Nguyên nhân sai lầm: Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z, \quad xyz=1 \\ \frac{x^2}{1+y}=1+y, \frac{y^2}{1+z}=1+z, \frac{z^2}{1+x}=1+x \end{cases} (vn)$

Lời giải đúng: Ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$. Vì vậy để bảo toàn dấu bằng khi sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta chọn số α thỏa $\frac{x^2}{1+y}=\frac{1+y}{\alpha}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{2}{\alpha}\Leftrightarrow\alpha=4$. Khi đó

Ta có: $\frac{x^2}{1+y}+\frac{1+y}{4}\geq x,\quad \frac{y^2}{1+z}+\frac{1+z}{4}\geq y,\quad \frac{z^2}{1+x}+\frac{1+x}{4}\geq z$

$$\Rightarrow P\geq (x+y+z)-\frac{1}{4}(x+y+z)-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}(x+y+z)-\frac{3}{4}\geq\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$.

<u>Bài tập tương tự</u>

a) Cho x,y,z là 3 số thỏa $x+y+z=0$. Chứng minh : $\sqrt{3+4^x}+\sqrt{3+4^y}+\sqrt{3+4^z}\geq 6$

b) Cho x,y,z là các số thực dương thỏa $xyz=1$. Chứng minh:
$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\frac{3}{4}$

c) Cho x,y,z là các số thực dương thỏa $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$P=x+y+z$

Ví dụ 6: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^2+y^2+2z^2$$

Lưu ý: Bài này việc dự đoán dấu "=" xảy ra là không thể. Để tìm minP, ta mong muốn có một bất đẳng thức dạng $x^2+y^2+2z^2\geq k(xy+yz+zx)$ vì bậc của P và giả thiết bằng nhau, hơn nữa lại có dạng tổng tích. Nên ta nghỉ đến việc có thể dùng bất đẳng thức Côsi dạng $X^2+Y^2\geq 2XY\,(*)$?

Nhưng muốn áp dụng ý tưởng $(*)$ vào bài này, ta cần biết được dấu "=" xảy ra khi nào.

Tuy nhiên việc xem xét bài toán chỉ cho ta một dữ liệu duy nhất, đó là ta có thể dự đoán được khi P đạt min thì dấu "=" sẽ xảy ra khi $x=y$ (x, y đối xứng). Có nghĩa là ta vẫn chưa biết được giá trị cụ thể của x, y, z là bao nhiêu, nhưng ta thấy khi thay $(x;y;z)$ bởi $(-x;y;z)$, $(-x;-y;z)$, $(-x;-y;-z)$,... thì bài toán vẫn không thay đổi. Do đó ta chỉ cần xét x, y, z là các số thực dương.

Giả sử rằng khi P đạt giá trị nhỏ nhất thì $\begin{cases}x=y=a>0\\ z=b>0\end{cases}\Rightarrow a^2+2ab=xy+yz+zx=1$

và $bx=by=az$

Áp dụng $X^2+Y^2\ge 2XY(*)$, ta có:

$$\begin{cases} ab\left(x^2+y^2\right)\ge 2abxy \\ b^2x^2+a^2z^2\ge 2abxz \\ b^2y^2+a^2z^2\ge 2abyz \end{cases}\Rightarrow 2ab(xy+yz+zx)\le\left(ab+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)+2a^2z^2$$

Đến đây thì chỉ cần tìm a, b thỏa: $\begin{cases} a^2+2ab=1 \\ 2\left(ab+b^2\right)=2a^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a^2+2ab=1 \\ ab+b^2=a^2 \end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt[4]{5}},b=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt[4]{5}}$

Lời giải:

Đặt $a=\frac{1}{\sqrt[4]{5}},b=\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt[4]{5}}\Rightarrow\begin{cases} a^2+2ab=1 \\ ab+b^2=a^2 \end{cases}$

Áp dụng $X^2+Y^2\ge 2XY(*)$, ta có:

$$\begin{cases} ab\left(x^2+y^2\right)\ge 2abxy \\ b^2x^2+a^2z^2\ge 2abxz \\ b^2y^2+a^2z^2\ge 2abyz \end{cases}\Rightarrow 2ab(xy+yz+zx)\le\left(ab+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)+2a^2z^2=a^2P$$

Từ đó suy ra $P\ge\frac{2ab}{a^2}=\frac{2b}{a}=\sqrt{5}-1$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases} x=y,\ bx=az,\ by=az \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=y=a \\ z=b \end{cases}$

Bài tập tương tự

Cho x, y, z là các số thực thỏa $xy+yz+zx=8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

a) $P=x^2+y^2+2z^2$ b) $P=x^2+3y^2+2z^2$ c) $P=5x^2+3y^2+2z^2$

Ví dụ 7: Cho các số thực dương x, y, z thỏa $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+z^3$

Nhận xét : Bài này cũng như ví dụ 6, việc dự đoán dấu "=" xảy ra rất khó. Hơn nữa, biểu thức P là bậc hai nhưng giả thiết lại là bậc nhất, nên ta nghĩ ngay đến việc sử dụng bất đẳng thức Côsi dạng $X^2+Y^2\ge 2XY(*)$? Với Y là hằng số để giảm bậc của P.

Dự đoán được khi P đạt min thì dấu "=" sẽ xảy ra khi $x=y$ (x, y đối xứng), nên ta có ý tưởng là tìm hai số a, b tương tự ví dụ 6.

Áp dụng $(*)$, ta có :

$$\begin{cases} x^2+a^2\ge 2ax \\ y^2+a^2\ge 2ay \\ z^3+b^3+b^3\ge 3b^2z \end{cases} \Rightarrow P+2a^2+2b^3\ge 2a\left(x+y\right)+3b^2z \Leftrightarrow P\ge 2a\left(x+y\right)+3b^2z-\left(2a^2+2b^3\right)$$

Từ đó suy ra : $\begin{cases} 2a=3b^2 \\ x=y=a \\ z=b \\ x+y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=a=\dfrac{19-\sqrt{37}}{12} \\ z=b=\dfrac{\sqrt{37}-1}{6} \end{cases}$.

<u>Lời giải :</u>

Đặt $a=\dfrac{19-\sqrt{37}}{12}$, $b=\dfrac{\sqrt{37}-1}{6} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=1 \\ 2a=3b^2 \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có :

$$\begin{cases} x^2+a^2\ge 2ax \\ y^2+a^2\ge 2ay \\ z^3+b^3+b^3\ge 3b^2z \end{cases} \Rightarrow P+2a^2+2b^2\ge 2a\left(x+y\right)+3b^2z \Leftrightarrow P\ge 2a\left(x+y\right)+3b^2z-\left(2a^2+2b^3\right)$$

$$\Rightarrow P\ge 2a(x+y+z)-\left(2a^2+2b^3\right)=\frac{541-37\sqrt{37}}{108}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=a=\dfrac{19-\sqrt{37}}{12}$, $z=b=\dfrac{\sqrt{37}-1}{6}$

Ví dụ 8: Cho $x,y,z>0$ và $4x+3y+4z=22$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x+y+z+\frac{1}{3x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}$$

Nhận xét: Bài này cũng là một bài toán khó, việc dự đoán dấu "=" xảy ra khi nào là không thể. Tuy nhiên với ý tưởng như hai bài toán trên, ta giả định rằng dấu "=" xảy ra tại $x=a,y=b,z=c$. Khi đó $4a+3b+4c=22$ và $\dfrac{1}{3x}=\dfrac{1}{3a}=\dfrac{x}{3a^2}, \dfrac{2}{y}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{2y}{b^2}, \dfrac{3}{z}=\dfrac{3}{c}=\dfrac{3z}{c^2}$ và ta có đánh giá

$$\frac{1}{3x}+\frac{x}{3a^2}\ge\frac{2}{3a},\quad \frac{2}{y}+\frac{2y}{b^2}\ge\frac{4}{b},\quad \frac{3}{z}+\frac{3z}{c^2}\ge\frac{6}{c}$$

Suy ra $P \geq x+y+z+\left(\frac{2}{3a}-\frac{x}{3a^2}\right)+\left(\frac{4}{b}-\frac{2y}{b^2}\right)+\left(\frac{6}{c}-\frac{3z}{c^2}\right)$

$$=\left(1-\frac{1}{3a^2}\right)x+\left(1-\frac{2}{b^2}\right)y+\left(1-\frac{3}{c^2}\right)z+\left(\frac{2}{3a}+\frac{4}{b}+\frac{6}{c}\right)(*)$$

Vấn đề còn lại là chọn a, b, c thích hợp để sử dụng giả thiết $4x+3y+4z=22$. Vậy thì các hệ số của x,y,z trong $(*)$ phải thỏa $\begin{cases} 4a+3b+4c=22 \\ \dfrac{1-\frac{1}{3a^2}}{4}=\dfrac{1-\frac{2}{b^2}}{3}=\dfrac{1-\frac{3}{c^2}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$

Lời giải : (Các bạn tự trình bày lại lời giải.)

Bài tập tương tự

a) Chứng minh rằng nếu x, y là các số dương thỏa mãn $x^2+y^2=5$, thì $x^3+y^6 \geq 9$.

b) Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}$

c) Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=3$. Chứng minh rằng $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \geq xy+yz+zx$

d) Cho $x,y,z>0$ và $4x+3y+4z=22$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y+z+\frac{1}{3x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}$

e) Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn xyz=1.Chứng minh rằng $x+y+z \geq \frac{1+x}{1+y}+\frac{1+y}{1+z}+\frac{1+z}{1+x}$

f) Cho ba số không âm x, y, z thỏa $x+y+z=3$.Chứng minh $\frac{x}{y^3+16}+\frac{y}{z^3+16}+\frac{z}{x^3+16} \geq \frac{1}{6}$

g) Cho $x,y,z>0$. Chứng minh $\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{2y+z+x}+\frac{z}{2z+x+y} \leq \frac{3}{4}$

h) Cho $x,y,z>0$ và $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng $\frac{x}{y^2+z^2}+\frac{y}{z^2+x^2}+\frac{z}{x^2+y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

II-THAM SỐ HÓA

Dự đoán được dấu "=" xảy ra

Việc dự đoán được dấu "=" xảy ra khi nào là rất quan trọng, khi đó ta sẽ định hướng được cách đánh giá hợp lí và luôn bảo toàn được dấu "=".

Ví dụ 1: Cho $a+b=2$. Chứng minh rằng: B = $a^5+b^5 \geq 2$.

Nhận xét: Dự đoán dấu "=" xảy ra khi a = b = 1.

Giải:

Đặt: $a=1+x$. Từ giả thiết suy ra: $b=1-x$, (*x* $\in$ R).

Ta có: B = $a^5+b^5=(1+x)^5+(1-x)^5=10x^4+20x^2+2\geq 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ *x* = 0, hay a = b = 1. Vậy B $\geq$ 2.

Ví dụ 2: Cho $a+b=3,\ a\leq 1$. Chứng minh rằng: C = $b^3-a^3-6b^2-a^2+9b\geq 0$.

Nhận xét: Dự đoán dấu "=" xảy ra khi a = 1; b = 2.

Giải:

Đặt $a=1-x$, với *x* $\geq$ 0. Từ giả thiết suy ra $b=2+x$.

Ta có: C = $b^3-a^3-6b^2-a^2+9b$ = $(2+x)^3-(1-x)^3-6(2+x)^2-(1-x)^2+9(2+x)$

= x^3-2x^2+x = $x(x-1)^2\geq 0$ (vì $x\geq 0$).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ *x* = 0 hoặc *x* = 1 tức a = 1, b = 2 hoặc a = 0, b = 3. Vậy C $\geq$ 0.

Ví dụ 3: Cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: A = $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\geq 6$.

Nhận xét: Dự đoán dấu "=" thức xảy ra khi a = b = c = 1.

Giải:

Đặt: $a=1+x,\ b=1+y$, (*x*, *y* $\in$ R). Từ giả thiết suy ra: $c=1-x-y$.

Ta có: A = $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

= $(1+x)^2+(1+y)^2+(1-x-y)^2+(1+x)(1+y)+(1+y)(1-x-y)+(1-x-y)(1+x)$

= x^2+xy+y^2+6 = $\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2+6\geq 6$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ y = 0 và $x+\frac{1}{2}y=0 \Leftrightarrow$ x = y = 0 hay a = b = c =1. Vậy A $\geq$ 6.

Ví dụ 4: Cho $a+b=c+d$. Chứng minh rằng: D = $a^2+b^2+ab\geq 3cd$.

Nhận xét: Dự đoán dấu "=" xảy ra khi a = b = c = d.

Giải:

Đặt: $a=c+x$, với x $\in$ R. Từ giả thiết suy ra $b=d-x$.

Ta có: D = $(c+x)^2+(d-x)^2+(c+x)(d-x)$ = $c^2+d^2+x^2+cd+cx-dx$

= $\left(c^2+d^2+\frac{1}{4}x^2-2cd+cx-dx\right)+3cd+\frac{3}{4}x^2$ = $\left(c-d+\frac{1}{2}x\right)^2+\frac{3}{4}x^2+3cd\geq 3cd$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 0 và $c-d+\frac{1}{2}x=0$ $\Leftrightarrow$ x = 0 và c = d hay a = b = c = d.

Vậy D $\geq$ 3cd.

Ví dụ 5: Cho ab $\geq$ 1. Chứng minh rằng: $a^2+b^2\geq a+b$.

Nhận xét: Dự đoán dấu "=" xảy ra khi a = b = 1.

Giải:

Đặt $a=1+x;\ b=1+y$.

Ta có: ab $\geq$ 1 $\Leftrightarrow$ $(1+x)(1+y)\geq 1\Leftrightarrow x+y+xy\geq 0$ và $x^2+y^2\geq 2xy,\ \forall x,y\in R$

Do đó $a^2+b^2-(a+b)=(1+x)^2+(1+y)^2-(1+x)-(1+y)=x^2+y^2+x+y$

$=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+xy+x+y\geq 0$ (Đúng vì xy + x + y $\geq$ 0)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = y = 0 hay a = b = 1. Vậy BĐT được chứng minh.

Ví dụ 6: Cho a $\le$ 1; a + b $\ge$ 3. Chứng minh rằng: F = $3a^2+b^2+3ab-\frac{27}{4}\ge 0$

Nhận xét: Dự đoán dấu "=" xảy ra khi $a=-\frac{3}{2}, b=\frac{9}{2}$.

Giải:

Đặt a = 1– *x* và a + b = 3 + *y*. Từ giả thiết suy ra *x*, *y* $\ge$ 0 nên ta có: b = 2 + *x* + *y*.

Từ đó : F = $3(1-x)^2+(2+x+y)^2+3(1-x)(2+x+y)-\frac{27}{4}$ = $x^2+y^2-5x+7y-xy+\frac{25}{4}$

$$=\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2+\frac{9}{2}y\ge 0$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$ và y = 0 hay a = $-\frac{3}{2}$ và b = $\frac{9}{2}$.

Vậy bất đẳng thức F $\ge$ 0 được chứng minh.

Bài tập tương tự

1) Cho a, b > 0 thoả mãn a + b = 1. Chứng minh: $\frac{2}{ab}+\frac{3}{a^2+b^2}\ge 14$.

2) Cho a + b + c + d = 1. Chứng minh: $(a+c)(b+d)+2(ac+bd)\le\frac{1}{2}$.

3) Cho a + b + c $\ge$ 3. Chứng minh: $a^4+b^4+c^4\ge a^3+b^3+c^3$.

4) Cho a + b > 8 và b $\ge$ 3. Chứng minh: $27a^2+10b^3>945$.

5) Cho $a+b\ge 2$. Chứng minh rằng: $a^3+b^3\le a^4+b^4$.

6) Cho a $\le$ 4. Chứng minh rằng: $a^2(2-a)+32\ge 0$.

Vai trò như nhau giữa các biến

Ý tưởng chính của kỹ thuật này là dựa vào các mối liên hệ giữa các biến trong bài toán để có thể thêm biến phụ. Lưu ý ta có tính chất: " ***với mọi số thực a,b thì luôn tồn tại số thực k sao cho*** $a = b + k$ ***".***

Kỹ thuật này thường áp dụng cho những bất đẳng thức đồng bậc, đối xứng, hoán vị, có chứa trị tuyệt đối...

Ví dụ 7: Chứng ming rằng với mọi $a,b,c \geq 0$, ta có bất đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

Giải

Do vai trò của a, b, c là như nhau, nên giả sử $a = \min\{a,b,c\}$.

Đặt $b = a + x, \quad c = a + y \ \Rightarrow x,y \geq 0.$ Thay vào bất đẳng thức cần chứng minh, ta có

$$a^3 + (a+x)^3 + (a+y)^3 \geq 3a(a+x)(a+y)$$

$\Leftrightarrow 3ax^2 + 3ay^2 + x^3 + y^3 - 3axy \geq 0 \Leftrightarrow 3a(x-y)^2 + 3axy + x^3 + y^3 \geq 0$ (luôn đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow a = b = c$

Ví dụ 8: Cho các số thực không âm a, b, c. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc + \frac{9}{4}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|$$

Giải:

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$. Khi đó tồn tại $x,y \geq 0$ sao cho

$$b = a + x,\ c = a + y,\ y \geq x$$

Thay vào bất đẳng thức cần chứng minh, ta được

$$a^3 + (a+x)^3 + (a+y)^3 - 3a(a+x)(a+y) - \frac{9}{4}xy(y-x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3ay^2 - 3axy\right) + 3ax^2 + x^3 + y^3 - \frac{9}{4}xy^2 + \frac{9}{4}x^2y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3ay(y-x) + 3ax^2 + (y-x)^3 + \frac{3}{4}xy(y-x) + 2x^3 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $x,y \geq 0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow a = b = c$.

Ví dụ 9: Cho $a,b,c \ge 0$ thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh $(a-b)(b-c)(c-a) \le \frac{\sqrt{3}}{8}$

Nhận xét: Hai ví dụ 1 và ví dụ 2 là bất đẳng thức đối xứng, nhưng ví dụ này thì không đối xứng. Tuy nhiên lưu ý rằng $A \le |A|, \forall A \in R$, ta có thể chuyển VT thành dạng đối xứng.

Giải:

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn $|(a-b)(b-c)(c-a)| \le \frac{\sqrt{3}}{8}$

Vì đây là bất đẳng thức đối xứng, nên ta có thể giả sử $a \le b \le c$.

Khi đó tồn tại $x,y \ge 0$ sao cho $b=a+x,\ c=a+y,\ y \ge x$

Thay vào bất đẳng thức cần chứng minh, ta được : $xy(y-x) \le \frac{\sqrt{3}}{8}\ (1)$

Do $a+b+c=1$ nên $3a+x+y=1 \Rightarrow x+y \le 1$. Mà $x,y \ge 0 \Rightarrow 0 \le x \le \frac{1}{2},\ x \le y \le 1-x$

Suy ra $VT(1) = xy(y-x) \le x(1-x)(1-2x) = 2x^3-3x^2+x \quad (2)$

Xét hàm số $f(x)=2x^3-3x^2+x,\quad x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$. Ta có $f'(x)=6x^2-6x+1$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{3}}{6} \qquad do\ x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$$

Suy ra $f(x) \le \max\left\{f(0), f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right), f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{18} \qquad (3)$

Kết hợp $(1),(2),(3)$ ta suy ra điều cần chứng minh.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{3}}{6}, y=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$, tức là $a=0,\ b=\frac{3-\sqrt{3}}{6},\ c=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ (vì $a \le b \le c$).

Vậy $(a-b)(b-c)(c-a) \le |(a-b)(b-c)(c-a)| \le \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=0,\ b=\frac{3-\sqrt{3}}{6},\ c=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ và các hoán vị của nó.

Ví dụ 10: Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)\min\{a,b,c\} \le 2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2$$

Giải:

Do tính đối xứng nên ta có thể giả sử $a=\min\{a,b,c\}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(a+b+c)a \le 2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2 \Leftrightarrow 2a^2+b^2+c^2 \le ab+ac+2bc$$

Đặt $b=a+x,\ c=a+y$ với $x,y \ge 0$. Thay vào trên, ta được

$$\begin{aligned}&2a^2+(a+x)^2+(a+y)^2 \le a(a+x)+a(a+y)+2(a+x)(a+y)\\&\Leftrightarrow x^2+y^2 \le x(a+y)+y(a+x) \qquad (1)\end{aligned}$$

Vì $a+b>c \Rightarrow a+x>y, \quad a+c>b \Rightarrow a+y>x$

Do đó (1) luôn đúng. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=0 \Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 11: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\max\{a,b,c\}-\min\{a,b,c\} \le 1$. Chứng minh

$$1+a^3+b^3+c^3+6abc \ge 3a^2b+3b^2c+3c^2a. \qquad (1)$$

Giải:

Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\{a,b,c\}$. Đặt $b=a+x, c=a+y$ với $x,y \ge 0$. Ta có:

$$1+a^3+b^3+c^3+6abc \ge 3a^2b+3b^2c+3c^2a \Leftrightarrow 1+a^3+b^3+c^3-3abc \ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a-3abc\right)$$

Và $\begin{cases} a^3+b^3+c^3-3abc=3a\left(x^2-xy+y^2\right)+x^3+y^3 \\ a^2b+b^2c+c^2a-3abc=a\left(x^2-xy+y^2\right)+x^2y \end{cases}$

Do đó $(1) \Leftrightarrow 1+x^3+y^3 \ge 3x^2y$

Mặt khác từ giả thiết, ta có $0 \le x,y \le 1 \Rightarrow 1+x^3+y^3 \ge 3\sqrt[3]{1.x^3.y^3}=3xy \ge 3x^2y$.

Vậy bài toán được chứng minh xong và dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1 \Leftrightarrow b=c=a+1$.

Ví dụ 12: Cho các số thực a, b với a + b $\neq$ 0. Chứng minh: $a^2+b^2+\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2 \geq 2$.

Giải:

Đặt $c=-\frac{1+ab}{a+b}$. Ta có: *ab + bc + ca* = –1 và lúc này BĐT cần chứng minh trở thành:

$a^2+b^2+c^2 \geq 2 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq -2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 13: Cho a, b, c $\in$[1; 3] và a + b + c = 6. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2 \leq 14$

Giải:

Đặt a = *x* + 1; b = *y* + 1; c = *z* + 1. Khi đó *x, y, z* $\in$ [0; 2] và *x* + *y* + *z* = 3

Giả sử *x* = max{*x*; y; z}, suy ra: *x* + *y*+ *z* = 3 $\leq$ 3*x*$\Rightarrow$1$\leq$ *x* $\leq$ 2 $\Rightarrow$ (*x* –1)(*x* –2) $\leq$ 0

Nên: $x^2+y^2+z^2 \leq x^2+(y+z)^2 = x^2+(3-x)^2 = 5+2(x-1)(x-2) \leq 5$

Suy ra $x^2+y^2+z^2 \leq 5$

Ta có: $a^2+b^2+c^2 = (x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2 = x^2+y^2+z^2+2(x+y+z)+3 \leq 14$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=z \\ x+y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1 \Rightarrow a=b=c=2$

hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=z \\ x+y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=z=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=c=\frac{3}{2} \end{cases}$

Bài tập tương tự

1. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng
   $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \geq 0$
2. Cho a, b, c, r là các số thực không âm. Chứng minh rằng
   $a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b) \geq 0$
3. Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $(a-b)(b-c)(c-a) \geq -\frac{\sqrt{3}}{8}$

4. Cho các số thực phân biệt a, b, c. Chứng minh $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right]\ge\frac{9}{2}$
5. Chứng minh rằng với mọi $a,b,c>0$, ta đều có $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)$.
6. Cho a, b, c $\in$ [1; 3] và a + b + c = 6. Chứng minh rằng: $a^3+b^3+c^3\le 36$.

III-PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN ĐẠI SỐ

Ý tưởng chính của phương pháp là làm cho bài toán trở nên đơn giản hơn, hạ bậc, mất căn thức hoặc triệt tiêu mẫu.

Sau đây là một số tính chất (dấu hiệu nhận biết) cần biết khi sử dụng phương pháp này. Bạn đọc quan tâm có thể chứng minh dễ dàng. Những tính chất này áp dụng cho trường hợp ba biến và có thể áp dụng tương tự cho n biến.

Tính chất 1: Nếu ba số dương a, b, c thỏa $abc = 1$, thì

i) Tồn tại các số dương x, y, z sao cho $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ hoặc $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}, c = \frac{x}{z}$.

ii) Tồn tại các số dương m, n, p sao cho $a = \frac{m^2}{np}, b = \frac{n^2}{mp}, c = \frac{p^2}{mn}$ hoặc $a = \frac{np}{m^2}, b = \frac{mp}{n^2}, c = \frac{mn}{p^2}$.

Tính chất 2: Nếu ba số dương a, b, c thỏa $a + b + c = k$ thì tồn tại các số dương x, y, z sao cho

$$a = \frac{kx}{x+y+z}, \quad b = \frac{ky}{x+y+z}, \quad c = \frac{kz}{x+y+z}$$

Tính chất 3: Nếu $x, y, z > 0$ thỏa điều kiện $xyz = x + y + z + 2$ thì tồn tại $a, b, c > 0$ sao cho

$$x = \frac{b+c}{a}, \quad y = \frac{c+a}{b}, \quad z = \frac{a+b}{c}$$

Tính chất 4: Nếu $x, y, z > 0$ thỏa điều kiện $xy + yz + zx + 2xyz = 1$ thì tồn tại $a, b, c > 0$ sao cho

$$x = \frac{a}{b+c}, \quad y = \frac{b}{c+a}, \quad \frac{c}{a+b}$$

Tính chất 5: (Phép thế Ravi) Các số thực a, b, c là ba cạnh của một tam giác khi và chỉ khi tồn tại các số dương x, y, z sao cho $a = y + z, b = z + x, c = x + y$.

Nhận xét : *Phép thế Ravi giúp ta chuyển một bài toán BĐT với ba số dương về một BĐT trong tam giác và ngược lại.*

Ví dụ 1: Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn *abc* = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\geq\frac{3}{2}$$

Giải:

Đặt $a=\frac{x}{y};\ b=\frac{y}{z};\ c=\frac{z}{x}$, với *x, y, z* là các số thực dương.

Ta có: $\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\geq\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\frac{x}{y}\left(\frac{y}{z}+1\right)}+\frac{1}{\frac{y}{z}\left(\frac{z}{x}+1\right)}+\frac{1}{\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}+1\right)}\geq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{yz}{xy+zx}+\frac{zx}{yz+xy}+\frac{xy}{zx+yz}\geq\frac{3}{2}\qquad(*)$$

Tới đây ta chứng minh $(*)$ dễ dàng (xem như bài tập)

Ví dụ 2: (Ôlimpic quốc tế 2000) Cho *a, b, c* là các số thực dương thoả mãn *abc* = 1. Chứng minh rằng: $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq1$.

Giải:

Đặt $a=\frac{x}{y};\ b=\frac{y}{z};\ c=\frac{z}{x}$, với *x, y, z* là các số thực dương.

Ta có: $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq1\Leftrightarrow\frac{(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)}{xyz}\leq1$

$$\Leftrightarrow(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)\leq xyz\qquad(*)$$

Do vai trò *x, y, z* có vai trò như nhau, không mất tính tổng quát nên giả sử : *x* ≥ y ≥ z > 0. Như vậy *x* – *y* +*z* > 0 và y – z + *x* > 0.

+ Nếu z – *x* + y ≤ 0 thì $(*)$ hiển nhiên đúng.

+ Nếu z – x + y > 0, áp dụng BĐT Cô–si cho hai số dương ta có:

$$\sqrt{(x-y+z)(y-z+x)} \le x;\quad \sqrt{(y-z+x)(z-x+y)} \le y;\quad \sqrt{(z-x+y)(x-y+z)} \le z$$

Nhân vế theo vế các bất đẳng thức trên, suy ra (*).

Vậy $(*)$ đúng cho mọi *x, y, z* là các số thực dương, suy ra bài toán được chứng minh.

Ví dụ 3: Cho $x,y,z>0: xyz=1$.

Tìm GTLN của biểu thức: $P=\frac{1}{x^2+2y^2+3}+\frac{1}{y^2+2z^2+3}+\frac{1}{z^2+2x^2+3}$

<u>Nhận xét:</u> *Vì P là biểu thức đối xứng với x, y, z nên maxP tại x=y=z= 1.*

<u>Giải:</u>

Áp dụng BĐT Cô-si, ta có:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2\ge 2xy \\ y^2+1\ge 2y \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+2y^2+3\ge 2xy+2y+2 \Rightarrow \frac{1}{x^2+2y^2+3}\le\frac{1}{2xy+2y+2}.$$

Tương tự: $\frac{1}{y^2+2z^2+3}\le\frac{1}{2yz+2z+2}$, $\frac{1}{z^2+2x^2+3}\le\frac{1}{2zx+2x+2}$.

Do đó: $P\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy+y+1}+\frac{1}{yz+z+1}+\frac{1}{zx+x+1}\right)$.

Vì $x,y,z>0: xyz=1$ nên tồn tại các số dương a, b, c sao cho: $x=\frac{a}{b}, y=\frac{b}{c}, z=\frac{c}{a}$.

Suy ra: $P\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy+y+1}+\frac{1}{yz+z+1}+\frac{1}{zx+x+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1}+\frac{1}{\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+1}+\frac{1}{\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+1}\right)=\frac{1}{2}$.

Vậy: $MaxP=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=y=z=1$.

<u>Lưu ý:</u>

Ngược lại, đối với một số bài toán chứng minh bất đẳng thức mà các biểu thức (hoặc biến đổi của nó) có chứa các biểu thức có dạng: $\frac{a}{b};\frac{b}{c};\frac{c}{a}$**, với** $a,b,c\neq 0$**. Lúc này việc đặt** $x=\frac{a}{b};\ y=\frac{b}{c};z=\frac{c}{a}$**, với *xyz* = 1 là một phương pháp hữu hiệu.**

Ví dụ 4: Cho các số thực dương *a, b, c*. Chứng minh rằng: $\frac{b}{a+2b}+\frac{c}{b+2c}+\frac{a}{c+2a}\leq 1$

Giải:

BĐT $\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{a}{b}+2}+\frac{1}{\frac{b}{c}+2}+\frac{1}{\frac{c}{a}+2}\leq 1$.

Đặt $x=\frac{a}{b};\ y=\frac{b}{c};\ z=\frac{c}{a}$. Ta có *x*, y, z là các số thực dương có tích *xyz* = 1.

Suy ra: $\frac{1}{\frac{a}{b}+2}+\frac{1}{\frac{b}{c}+2}+\frac{1}{\frac{c}{a}+2}\leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}\leq 1$

$\Leftrightarrow (x + 2)(y + 2) + (y + 2)(z + 2) + (z + 2)(x + 2) \leq (x + 2)(y + 2)(z + 2)$

$\Leftrightarrow (xy + yz + zx) + 4(x + y + z) + 12 \leq xyz + 2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z) + 8$

$\Leftrightarrow 4 \leq xyz + xy + yz + zx \Leftrightarrow 3 \leq xy + yz + zx.$

Đây là bất đẳng thức đúng vì áp dụng bất đẳng thức Cô–si cho ba số dương ta có:

$xy+yz+zx\geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}=3$. Suy ra điều phải chứng minh.

***Bài tập tương tự:* Cho các số thực dương *a, b, c*. Chứng minh** $\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}\geq 1$**.**

Ví dụ 5: Cho các số dương a, b, c thỏa $abc\leq 1$. Chứng minh $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq a+b+c$.

Giải:

Đặt $abc=1-k$ với $0\leq k<1$. Khi đó $\frac{a}{\sqrt[3]{1-k}}.\frac{b}{\sqrt[3]{1-k}}.\frac{c}{\sqrt[3]{1-k}}=1$. Do vậy tồn tại $x,y,z>0$ sao cho $a=\sqrt[3]{1-k}.\dfrac{x}{y},\quad b=\sqrt[3]{1-k}.\dfrac{y}{z},\quad c=\sqrt[3]{1-k}.\dfrac{z}{x}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $\dfrac{xz}{y^2}+\dfrac{yx}{z^2}+\dfrac{zy}{x^2}\ge\sqrt[3]{1-k}\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}\right)\qquad(1)$

Do $\sqrt[3]{1-k}\le 1$, nên $(1)\Leftrightarrow\dfrac{xz}{y^2}+\dfrac{yx}{z^2}+\dfrac{zy}{x^2}\ge\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}\right)$

$$\Leftrightarrow x^3z^3+y^3x^3+z^3y^3\ge xyz\left(x^2z+y^2x+z^2y\right)\qquad(2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, Ta có

$$x^3z^3+x^3z^3+y^3x^3\ge 3x^3yz^2,\quad y^3x^3+y^3x^3+z^3y^3\ge 3x^2y^3z,\quad z^3y^3+z^3y^3+x^3z^3\ge 3xy^2z^3$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo từng vế, ta được (2).

Ví dụ 6: Cho $x,y,z>1$ thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\le\sqrt{x+y+z}\qquad(1)$$

Giải:

Ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2\Leftrightarrow-\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)+3=-2+3\Leftrightarrow\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+\left(1-\dfrac{1}{y}\right)+\left(1-\dfrac{1}{z}\right)=1$

Đặt: $1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{a}{a+b+c}\Rightarrow x=\dfrac{a+b+c}{b+c}, 1-\dfrac{1}{y}=\dfrac{b}{a+b+c}\Rightarrow y=\dfrac{a+b+c}{c+a},\ 1-\dfrac{1}{z}=\dfrac{c}{a+b+c}\Rightarrow z=\dfrac{a+b+c}{a+b}$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}\le\sqrt{(a+b+c)\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right)}$

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}=\sqrt{a}.\sqrt{\frac{1}{b+c}}+\sqrt{b}.\sqrt{\frac{1}{c+a}}+\sqrt{c}.\sqrt{\frac{1}{a+b}}\le\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)}$$

Ví dụ 7: Cho $a,b,c>0$ thỏa điều kiện $\dfrac{1}{1+a^4}+\dfrac{1}{1+b^4}+\dfrac{1}{1+c^4}+\dfrac{1}{1+d^4}=1$.

Chứng minh rằng $abcd\ge 3$.

<u>*Giải:*</u>

Đặt $\frac{1}{1+a^4}=\frac{x}{x+y+z+t}, \frac{1}{1+b^4}=\frac{y}{x+y+z+t}, \frac{1}{1+c^4}=\frac{z}{x+y+z+t}, \frac{1}{1+d^4}=\frac{t}{x+y+z+t}$

Suy ra $a=\sqrt[4]{\frac{y+z+t}{x}}, \quad b=\sqrt[4]{\frac{z+t+x}{y}}, \quad c=\sqrt[4]{\frac{t+x+y}{z}}, \quad d=\sqrt[4]{\frac{x+y+z}{t}}$

Bất đẳng thức trở thành $\sqrt[4]{\frac{y+z+t}{x}}.\sqrt[4]{\frac{z+t+x}{y}}.\sqrt[4]{\frac{t+x+y}{z}}.\sqrt[4]{\frac{x+y+z}{t}}\geq 3$

$$\Leftrightarrow (y+z+t)(z+t+x)(t+x+y)(x+y+z)\geq 81xyzt$$

Bất đẳng thức này chứng minh dễ dàng !

Ví dụ 8: Cho $a,b,c>0$ thỏa $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq 3$.

<u>*Giải:*</u>

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq 3abc \qquad (1)$

Đặt $a^2=\frac{3x}{x+y+z}, \quad b^2=\frac{3y}{x+y+z}, \quad c^2=\frac{3z}{x+y+z}$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow \frac{9xy}{(x+y+z)^2}+\frac{9yz}{(x+y+z)^2}+\frac{9zx}{(x+y+z)^2}\geq 3\sqrt{\frac{27xyz}{(x+y+z)^2}}$

$$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)^2\geq 3xyz(x+y+z)$$

Chứng minh BĐT này dành cho bạn đọc.

Ví dụ 9: Cho $x,y,z>0$ thỏa $xy+yz+zx+2xyz=1$. Chứng minh $\sqrt[2]{yz}+\sqrt[3]{2}\leq\sqrt[3]{3(y+1)(z+1)}$.

<u>*Giải:*</u>

Đặt $x=\frac{a}{b+c}, \qquad y=\frac{b}{c+a}, \qquad z=\frac{c}{a+b}$ với $a,b,c>0$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\qquad \sqrt[3]{\frac{b}{c+a}.\frac{c}{a+b}}+\sqrt[3]{2}\leq\sqrt[3]{3.\frac{(a+b+c)^2}{(c+a)(a+b)}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{b}{a+b+c}.\frac{c}{a+b+c}}+\sqrt[3]{2.\frac{a+b}{a+b+c}.\frac{a+c}{a+b+c}}\le \sqrt[3]{3}$$

Áp dụng BĐT Côsi cho ba số, ta có:

$$\sqrt[3]{\frac{b}{a+b+c}.\frac{c}{a+b+c}.\frac{1}{3}}\le \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}+\frac{1}{3}\right)$$
$$\sqrt[3]{\frac{a+b}{a+b+c}.\frac{a+c}{a+b+c}.\frac{2}{3}}\le \frac{1}{3}\left(\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{2}{3}\right)$$

Suy ra $\sqrt[3]{\frac{b}{a+b+c}.\frac{c}{a+b+c}.\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{\frac{a+b}{a+b+c}.\frac{a+c}{a+b+c}.\frac{2}{3}}\le 1$ (Chứng minh xong)

Ví dụ 10: Cho $x,y,z>0$ thỏa $xyz=x+y+z+2$. Chứng minh rằng $2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)\le x+y+z+6$

Giải:

Ta có $2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2-\left(x+y+z\right)$.

Do đó BĐT cần chứng minh trở thành : $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le \sqrt{2\left(x+y+z+3\right)}$

Từ giả thiết, đặt $x=\frac{b+c}{a},\quad y=\frac{c+a}{b},\quad z=\frac{a+b}{c}$

Như vậy ta phải chứng minh

`
$$\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}\le \sqrt{2\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có điều phải chứng minh

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}=\sqrt{\frac{1}{a}}.\sqrt{b+c}+\sqrt{\frac{1}{b}}.\sqrt{c+a}+\sqrt{\frac{1}{c}}.\sqrt{a+b}\le \sqrt{2\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}.$$

Ví dụ 11: Chứng minh rằng a, b, c là độ dài của một tam giác thì $a\left(b+c-a\right)<2bc$.

Giải:

Theo tính chất 5, đặt $a=y+z,\quad b=z+x,\quad c=x+y$ với $x,y,z>0$.

BĐT trở thành $x\left(y+z\right)<\left(x+y\right)\left(z+x\right)$

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có

$$(x+y)(z+x)\ge\left(\sqrt{xz}+\sqrt{yx}\right)^2=xy+xz+2x\sqrt{yz}>xy+xz=x(y+z)$$

Ví dụ 12: Cho $x,y,z>0$ thỏa điều kiện $xyz(x+y+z)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(x+y)(x+z)$$

Giải:

Đặt $a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y$, khi đó a, b, c là ba cạnh của một tam giác ABC nào đó. Và ta có

$$x=\frac{b+c-a}{2}=p-a,\quad y=\frac{c+a-b}{2}=p-b,\quad z=\frac{a+b-c}{2}=p-c$$ với $p=\dfrac{a+b+c}{2}$

Điều kiện bài toán trở thành $(p-a)(p-b)(p-c)p=1=S^2_{\Delta ABC}=S^2\Rightarrow S=1$

Do đó ta có $P=bc\ge bcSinA=2S=2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}SinA=1\\bc=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2+c^2=a^2\\bc=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(y+z)=yz\\(x+y)(x+z)=2\end{cases}$

Vậy $\min P=2$.

Ví dụ 13: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có diện tích S. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2\ge4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

Giải:

Đặt $a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y$ với $x,y,z>0$. Khi đó ta có

$$p=x+y+z,\quad x=p-a,\quad y=p-b,\quad z=p-c,\quad S=\sqrt{xyz(x+y+z)}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2\ge4\sqrt{3xyz(x+y+z)}+(y-x)^2+(z-y)^2+(x-z)^2$$

$$\Leftrightarrow xy+yz+zx\ge\sqrt{3xyz\left(x+y+z\right)}$$
$$\Leftrightarrow\left(xy+yz+zx\right)^2\ge3\left(xy.yz+yz.zx+zx.xy\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(xy\right)^2+\left(yz\right)^2+\left(zx\right)^2\ge xy.yz+yz.zx+zx.xy$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một kết quả quen thuộc.

Ví dụ 14: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^2b\left(a-b\right)+b^2c\left(b-c\right)+c^2a\left(c-a\right)\ge0$$

__Giải:__

Đặt $a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y$ với $x,y,z>0$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^3z+y^3x+z^3y\ge x^2yz+xy^2z+xyz^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge x+y+z$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\frac{x^2}{y}+y\ge2x,\quad\frac{y^2}{z}+z\ge2y,\quad\frac{z^2}{x}+x\ge2z$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 15: Cho $a,b,c>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}$.

__Giải:__

Đặt $x=b+c,\ \ y=c+a,\ \ z=a+b$, khi đó x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác và

$$a=\frac{y+z-x}{2},\quad b=\frac{z+x-y}{2},\quad c=\frac{x+y-z}{2}$$

Khi đó

$$P=\frac{3\left(y+z-x\right)}{2x}+\frac{2\left(z+x-y\right)}{y}+\frac{5\left(x+y-z\right)}{2z}$$

$$=\left(\frac{2x}{y}+\frac{3y}{2x}\right)+\left(\frac{5y}{2z}+\frac{2z}{y}\right)+\left(\frac{3z}{2x}+\frac{5x}{2z}\right)-6\ge2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+2\sqrt{15}-6$$

Vậy $\min P = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{15} - 6$ khi $\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{y}{2} = \frac{z}{\sqrt{5}} > 0$.

Phần trên ta đã sử dụng dấu hiệu nhận biết để đổi biến. Tuy nhiên còn rất nhiều bất đẳng thức mà khi gặp phải, nó đòi hỏi chúng ta kinh nghiệm giải toán và sự linh hoạt trong phán đoán. Sau đây tôi trình bày tiếp các ví dụ mà cách đổi biến không tuân theo dấu hiệu nào.

Ví dụ 16: Cho a, b, c là ba số dương thỏa $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Giải:

Đặt $a = \frac{1}{x},\ b = \frac{1}{y},\ c = \frac{1}{z}$ thì ta có $xyz = 1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^2}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} + \frac{y^2}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}} + \frac{z^2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$ (Đã chứng minh)

Ví dụ 17: Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh rằng: $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \leq xyz$.

Giải:

Đặt $a = x+y-z, b = y+z-x, c = z+x-y \Rightarrow x = \frac{a+c}{2}, y = \frac{a+b}{2}, z = \frac{b+c}{2}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $abc \leq \frac{a+b}{2}.\frac{b+c}{2}.\frac{c+a}{2}$.

Ta thấy tổng 2 số bất kỳ trong 3 số a, b, c là 1 số không âm nên có ít nhất 2 trong 3 số đó không âm. Trong trường hợp có 1 số âm thì BĐT hiển nhiên đúng. Do đó phải xảy ra trường hợp cả 3 số a, b, c không âm. Áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số ta có:

$$\frac{a+b}{2}.\frac{b+c}{2}.\frac{c+a}{2} \ge \sqrt{ab}.\sqrt{bc}.\sqrt{ca} = abc$$ (ĐPCM).

Ví dụ 18: Cho ba số $a,b,c \in (0;\frac{3}{2}) : a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{\sqrt{3-2a}}+\frac{1}{\sqrt{3-2b}}+\frac{1}{\sqrt{3-2c}} \ge \frac{9}{ab+bc+ca}.$$

Giải:

Đặt $\sqrt{3-2a}=x, \sqrt{3-2b}=y, \sqrt{3-2c}=z$ thì $\begin{cases} x,y,z>0 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$;

Ta có: $ab+bc+ca=\frac{1}{4}(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9)$.

Do đó BĐT cần chứng minh trở thành:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{36}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9} \Leftrightarrow (\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9) \ge 36.$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số dương và 12 số dương ta được:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$ >0 (1)

$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+\underbrace{1+1+...+1}_{9 so 1} \ge 12\sqrt[12]{(xyz)^4} = 12\sqrt[3]{xyz} > 0$ (2)

Nhân vế theo vế của (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 19: Cho $x,y,z>0: x+y+z=1$. Chứng minh rằng: $\frac{1+x}{y+z}+\frac{1+y}{z+x}+\frac{1+z}{x+y} \le 2(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x})$ (1)

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(x+y+z)+x}{y+z}+\frac{(x+y+z)+y}{z+x}+\frac{(x+y+z)+z}{x+y} \le 2(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x})$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{3}{2} \le \frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{x}{z}-\frac{x}{y+z})+(\frac{z}{y}-\frac{z}{x+y})+(\frac{y}{x}-\frac{y}{z+x}) \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{xy}{yz+z^2}+\frac{zx}{xz+y^2}+\frac{yz}{xz+x^2} \ge \frac{3}{2}$$ (2)

Đặt $a = xy > 0, b = yz > 0, c = zx > 0$.

Khi đó (2) trở thành:

$$\frac{a}{b+\frac{bc}{a}}+\frac{c}{a+\frac{ab}{c}}+\frac{b}{c+\frac{ac}{b}} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2}{ab+bc}+\frac{b^2}{ab+ac}+\frac{c^2}{bc+ac} \geq \frac{3}{2}.$$

Ta có: $\frac{a^2}{ab+bc}+\frac{b^2}{ab+ac}+\frac{c^2}{bc+ac} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2.\frac{(a+b+c)^2}{3}} = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 20: Cho ba số dương a, b, c thoả mãn *abc* = 1.Chứng minh:

$$\frac{a}{(a+1)^2}+\frac{b}{(b+1)^2}+\frac{c}{(c+1)^2}-\frac{4}{(a+1)(b+1)(c+1)} \leq \frac{1}{4}$$

Giải:

Đặt: $x=\frac{1-a}{1+a}; y=\frac{1-b}{1+b}; z=\frac{1-c}{1+c} \Rightarrow -1<x, y, z<1$ và $a=\frac{1-x}{1+x}; b=\frac{1-y}{1+y}; c=\frac{1-z}{1+z}$.

Từ $abc = 1 \Rightarrow (1-x)(1-y)(1-z) = (1+x)(1+y)(1+z) \Rightarrow x+y+z+xyz = 0$.

Mặt khác: $\frac{4a}{(a+1)^2}=1-x^2; \frac{2}{a+1}=1+x$

Tương tự: $\frac{4b}{(b+1)^2}=1-y^2; \frac{2}{b+1}=1+y$ và $\frac{4c}{(c+1)^2}=1-z^2; \frac{2}{c+1}=1+z$

Nên bất đẳng thức cần chúng minh tương đương với

$$\frac{4a}{(a+1)^2}+\frac{4b}{(b+1)^2}+\frac{4c}{(c+1)^2} \leq 1+2.\frac{2}{(a+1)}.\frac{2}{(b+1)}.\frac{2}{(c+1)}$$

$$\Leftrightarrow 1-x^2+1-y^2+1-z^2 \leq 1+2(1+x)(1+y)(1+z)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)+2(x+y+z+xyz) \geq 0 \Leftrightarrow (x+y+z)^2 \geq 0.$$

Đây là bất đẳng thức luôn đúng nên bài toán được chứng minh.

Ví dụ 21: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\frac{4c}{2a+b}+\frac{4a}{b+2c}+\frac{b}{c+a} \geq 3$.

<u>*Giải:*</u>

Đặt $x=2a+b,\ y=b+2c,\ z=c+a$, suy ra

$$a=\frac{x-y+2z}{4},\quad b=\frac{x+y-2z}{2},\quad c=\frac{y-x+2z}{4}$$

BĐT cần chứng minh trở thành: $\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{2z}{x}+\frac{x}{2z}\right)+\left(\frac{2z}{y}+\frac{y}{2z}\right)\ge 6.$ (CM dễ dàng)

Ví dụ 22: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\frac{a+2b}{5c+4a}+\frac{3c}{4a+4b+c}+\frac{c+2a}{a+2b+6c}\ge 1$.

<u>*Giải:*</u>

Đặt $x=a+2b,\ y=3c,\ z=c+2a$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y}\ge 1$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS và BĐT cơ bản $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$, ta có

$$\frac{x^2}{xy+2xz}+\frac{y^2}{yz+2xy}+\frac{z^2}{xz+2yz}\ge\frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)}\ge\frac{3(xy+yz+zx)}{3(xy+yz+zx)}=1.$$

Ví dụ 23: (ĐH_A, 2009). Chứng minh rằng với mọi $x,y,z>0$ thỏa mãn $x(x+y+z)=3yz$, ta có bất đẳng thức sau: $(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(y+z)(z+x)\le 5(y+z)^3$.

<u>*Giải:*</u>

Đặt $a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y$, khi đó $a,b,c>0$ và

$$x=\frac{b+c-a}{2},\quad y=\frac{c+a-b}{2},\quad z=\frac{a+b-c}{2}$$

BĐT cần chứng minh trở thành $c^3+b^3+3abc\le 5a^3\Leftrightarrow\frac{c^3}{a^3}+\frac{b^3}{a^3}+3.\frac{b}{a}.\frac{c}{a}\le 5\qquad(1)$

Giả thiết được viết lại thành $b^2+c^2-bc=a^2\Leftrightarrow\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}-\frac{b}{a}.\frac{c}{a}=1\quad(2)$

Đặt $u=\frac{b}{a},\ v=\frac{c}{a}$ thì $u,v>0$ và từ $(2)\Leftrightarrow u^2+v^2-uv=1$. Ta phải chứng minh

$$u^3+v^3+3uv\le 5 \qquad (3)$$

Ta có : $(u+v)^2\le (u+v)^2+3(u-v)^2=4\left(u^2+v^2-uv\right)=4\Rightarrow u+v\le 2$

Do đó $u^3+v^3=(u+v)\left(u^2+v^2-uv\right)=u+v\le 2$ và $uv\le\frac{(u+v)^2}{4}=1$

Suy ra (3) đúng.

Đối với một số bài toán chứng minh bất đẳng thức chứa ba biến a, b, c không âm, có vai trò như nhau ta có thể sử dụng phương pháp đổi biến như sau:

Đặt $x=a+b+c$; $y=ab+bc+ca$; $z=abc$.

Ta có các đẳng thức sau:

$xy-z=(a+b)(b+c)(c+a)$ (1)

$x^2+y=(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)$ (2)

$x^2-2y=a^2+b^2+c^2$ (3)

$x^3-3xy+3z=a^3+b^3+c^3$ (4)

Các bất đẳng thức sau:

$x^2\ge 3y$ (5)

$x^3\ge 27z$ (6)

$y^2\ge 3xz$ (7)

$xy\ge 9z$ (8)

$x^3-4xy+9z\ge 0$ (9)

(Bạn đọc tự chứng minh các bất đẳng thức trên).

Ví dụ 24: Cho ba số dương a, b, c thoả mãn điều kiện *abc* = 1. Chứng minh

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 2(1+a+b+c)$$

Giải:

Đặt $x=a+b+c$; $y=ab+bc+ca$; $z=abc$.

Theo (1) thì bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$xy-z \ge 2(1+x) \Leftrightarrow xy-1 \ge 2(1+x) \Leftrightarrow x(y-2) \ge 3.$$

Do $z = abc = 1$ nên theo (6) và (7) suy ra: $x \ge 3$; $y \ge 3$ suy ra: $x(y-2) \ge 3$ là BĐT đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $x = y = 3$ hay a = b = c =1. Suy ra bài toán được chứng minh.

Ví dụ 25: Cho ba số dương a, b, c thoả mãn: $a + b + c = 3$. Chứng minh:

$$abc + \frac{12}{ab+bc+ca} \ge 5$$

Giải:

Đặt $x=a+b+c$; $y=ab+bc+ca$; $z=abc$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$z+\frac{12}{y} \ge 5 \qquad (*)$$

Theo (9) kết hợp với $x = a + b + c = 3$ ta có: $27-12y+9z \ge 0$.

Suy ra: $$z \ge \frac{4y-9}{3} \Rightarrow z+\frac{12}{y} \ge \frac{4y-9}{3}+\frac{12}{y} \qquad (**)$$

Mặt khác: $\frac{4y-9}{3}+\frac{12}{y} \ge 5 \Leftrightarrow 4y^2-9y+36 \ge 15y \Leftrightarrow (y-3)^2 \ge 0$ (đúng với mọi y).

Từ (*) và (**) suy ra bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a = b = c =1.

Bài tập tương tự:

1. Giả sử a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi là 3.

   Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\sqrt{a+b-c}}+\dfrac{1}{\sqrt{b+c-a}}+\dfrac{1}{\sqrt{c+a-b}} \ge \dfrac{9}{ab+bc+ca}$.

2. Cho $a,b,c:abc=1$. CMR: $\dfrac{1}{a(1+b)}+\dfrac{1}{b(1+c)}+\dfrac{1}{c(1+a)} \ge \dfrac{3}{2}$.

3. Cho x, y, z là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

   $(x+y+z)xyz \ge (xy+yz+zx)\sqrt[3]{(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)}$.

4. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

   $\sqrt{\dfrac{a}{b+c-a}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a-b}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b-c}} \ge 3$.

5. Cho a, b, c >0. Tìm GTLN của: $P=\dfrac{\sqrt{bc}}{a+3\sqrt{bc}}+\dfrac{\sqrt{ca}}{b+3\sqrt{ca}}+\dfrac{\sqrt{ab}}{c+3\sqrt{ab}}$.

6. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $4^x+4^y+4^z=3$. CMR: $2^x+2^y+2^z \ge 4^{x+y}+4^{y+z}+4^{z+x}$.

7. Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{2007}{2008+b} \le \dfrac{c+1}{2007+c}$.

   Tìm GTNN của P = (a+1)(b+1)(c+1).

8. Xét a, b, c > 0 tùy ý. Tìm GTLN của: $T=\dfrac{\sqrt{abc}}{(1+a)(1+a+b)(1+a+b+c)}$.

9. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $\dfrac{a+1}{b+2c+3}+\dfrac{b+1}{c+2a+3}+\dfrac{c+1}{a+2b+3} \ge 1$.

10. Cho ba số không âm a, b, c, thoả mãn: $ab+bc+ca+abc=4$.

   Chứng minh: $3(a^2+b^2+c^2)+abc \ge 10$

11. Cho ba số dương a, b, c thoả mãn điều kiện ab + bc + ca = 3.

   Chứng minh: $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a} \ge \dfrac{a+b+c}{6}+\dfrac{3}{a+b+c}$

12. Cho ba số a, b, c thuộc (0; 1) thoả mãn $abc=(1-a)(1-b)(1-c)$.

   Chứng minh: $a^3+b^3+c^3+5abc \ge 1$

13. Cho a, b, c là các số dương và $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}=2$. Chứng minh: 8abc $\le$ 1.

14. Cho ba số dương a, b, c thoả mãn abc = 1. Chứng minh:

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 5(a + b + c) - 7$$

15. Cho các số dương a, b, c sao cho abc = 1. Chứng minh: $\frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}+\frac{c+3}{(c+1)^2}\geq 3$

16. Cho các số dương a, b, c sao cho abc = 1. Chứng minh: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{3}{2}(a+b+c-1)$

17. Cho $a,b,c\geq 0$ thoả a + b + c = 1. Chứng minh: $0\leq 27(ab+bc+ca)-54abc\leq 7$

18. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}\geq(1+a)(1+b)(1+c)-2(1+abc)$

19. Cho x, y, z là các số thực không âm, đôi một khác nhau và thỏa mãn điều kiện $(x+z)(y+z)=1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}\geq 4$.

20. Cho $a,b,c\geq -1$ thỏa $a^2+b^2+c^2=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=a+b+c$.

21. Cho $x,y,z\in[0;2]$ và $x+y+z=3$. Chứng minh $3\leq x^2+y^2+z^2\leq 5$.

22. Cho $x,y,z\in[0;2]$ và $x+y+z=3$. Tìm GTNN va GTLN của biểu thức

$$P=x^4+y^4+z^4-12(x-1)(y-1)(z-1)$$

&3. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPSKI

(Cauchy-Schwarz - *Bất đẳng thức BCS*)

***Bất** đẳng thức BCS*

Cho $2n$ số dương ($n \in Z, n \geq 2$): $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ ta có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

Dấu "=' xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ (quy ước nếu $b_i = 0 \Rightarrow a_i = 0$)

Hệ quả (dạng thường dùng)

Cho hai dãy số $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ với $b_i > 0\ \forall i = \overline{1,n}$ ta luôn có:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

Dấu "=' xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$

Ví dụ 1: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $3x^3 + 4y^2 = 5$. Chứng minh $2x + y \leq \sqrt{\frac{95}{12}}$

<u>*Giải:*</u>

Sử dụng BCS cho 2 dãy số $\sqrt{3}x,\ 2y$ và $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}$ ta có

$$(2x+y)^2 = \left(\sqrt{3}x.\frac{2}{\sqrt{3}} + 2y.\frac{1}{2}\right) \leq \left(3x^3 + 4y^2\right)\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{4}\right) = 5.\frac{19}{12} = \frac{95}{12}$$

Dấu "=' xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}x}{\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)} = \dfrac{2y}{\left(\dfrac{1}{2}\right)} \\ 3x^2 + 4y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{15}{76}} \\ y = \sqrt{\dfrac{15}{76}} \end{cases}$. Vậy bất đẳng thức được chứng.

Ví dụ 2: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$.

Giải:

Áp dụng hệ quả bất đẳng thức BCS với hai dãy a,b,c và $a(b+2c),b(c+2a),c(a+2b)$,ta có

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}=\frac{a^2}{a(b+2c)}+\frac{b^2}{b(c+2a)}+\frac{c^2}{c(a+2b)}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)}$$

Do đó, ta còn chứng minh

$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$ **(bạn đọc tự chứng minh)**

Dấu "=' xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{a(b+2c)}=\frac{b}{b(c+2a)}=\frac{c}{c(a+2b)}\Leftrightarrow a=b=c$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với a, b c dương , ta đều có $\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}\ge\frac{1}{a^2+bc}$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có

$$(a+b)^2=\left(a.1+\sqrt{bc}.\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2\le(a^2+bc)\left(1+\frac{b}{c}\right)\Rightarrow\frac{1}{(a+b)^2}\ge\frac{c}{(b+c)(a^2+bc)}\qquad(1)$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $\frac{1}{(a+c)^2}\ge\frac{b}{(b+c)(a^2+bc)}\qquad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Dấu "=' xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 4: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh $\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)}+\frac{b^3}{(2b^2+c^2)(2b^2+a^2)}+\frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)}\le\frac{1}{a+b+c}$

Giải:

Áp dụng bất dẳng thức BCS, ta có

$$\left(a^2+b^2+a^2\right)\left(a^2+a^2+c^2\right)\geq\left(a^2+ba+ac\right)^2=a^2\left(a+b+c\right)$$
$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{\left(2a^2+b^2\right)\left(2a^2+c^2\right)}\leq\frac{1}{a+b+c}\Leftrightarrow\frac{a^3}{\left(2a^2+b^2\right)\left(2a^2+c^2\right)}\leq\frac{a}{\left(a+b+c\right)^2}$$

Tương tự

$$\frac{b^3}{\left(2b^2+c^2\right)\left(2b^2+a^2\right)}\leq\frac{b}{\left(a+b+c\right)^2},\quad\frac{c^3}{\left(2c^2+a^2\right)\left(2c^2+b^2\right)}\leq\frac{c}{\left(a+b+c\right)^2}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức cùng chiều, ta được (1)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 5: Cho x, y, z là các thực thỏa $xy+yz+zx=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^4+y^4+z^4$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức BCS hai lần liên tiếp, ta có

$$\left(x^2.1+y^2.1+z^2.1\right)^2\leq\left(x^4+y^4+z^4\right)\left(1^2+1^2+1^2\right)\Rightarrow 3\left(x^4+y^4+z^4\right)\geq\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\quad(1)$$
$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(y^2+z^2+x^2\right)\geq\left(xy+yz+zx\right)^2=16\quad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $P=x^4+y^4+z^4\geq\frac{16}{3}$.

Vậy $\min P=\frac{16}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}xy+yz+zx=4\\x^2=y^2=z^2\\\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=z=\frac{2\sqrt{3}}{3}\\x=y=z=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$.

Lưu ý: Vấn đề bảo tồn dấu "=" luôn xảy ra trong quá trình biến đổi bài toán cũng quan trọng như bất đẳng thức Côsi.

Ví dụ 6: Cho x, y, z là ba số dương và $x+y+z \le 1$, chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} \ge \sqrt{82}$$

Sai lầm

$$\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(1^2+1^2\right)} \ge \sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2} = x+\frac{1}{x} \Rightarrow \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

Tương tự ta có:

$$P \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(x+y+z)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right] \ge \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} = 3\sqrt{2}$$

Vậy $P \ge 3\sqrt{2}$....?

Nguyên nhân sai lầm: $P = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{1}=\frac{1}{x}, \frac{y}{1}=\frac{1}{y}, \frac{z}{1}=\frac{1}{z}\,(vn) \\ x+y+z=1 \end{cases}$

Lời giải đúng: Ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$; và biểu thức trong căn gợi cho tam sử dụng BCS: $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right) \ge \left(\alpha x+\frac{\beta}{y}\right)^2$ với α, β là những số thỏa mãn

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{\frac{1}{x}}{\beta}=\frac{1}{\beta x} \Leftrightarrow x^2=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{9},$$ chọn $\alpha=1, \beta=9$

Ta có $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(1^2+9^2\right) \ge \left(x+\frac{9}{x}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{82}}\left(x+\frac{9}{x}\right)$

Tương tự ta có: $P \ge \frac{1}{\sqrt{82}}\left[9x+y+z)+9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right]$

Do $x+y+z=1;\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=9$ nên ta tách:

$$(x+y+z)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{80}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq\frac{2}{3}\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}+\frac{80}{9}\frac{9}{x+y+z}\geq 82$$

Vậy $P\geq\sqrt{82}$, dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 7: Cho $\begin{cases} x,y,z.0 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq 1 \end{cases}$. Tìm GTLN của $P=\frac{1}{\sqrt{2}x+y+z}+\frac{1}{x+\sqrt{2}y+z}+\frac{1}{x+y+\sqrt{2}z}$

Giải:

Áp dụng BCS ta có: $\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}x}+\frac{1^2}{y}+\frac{1^2}{z}\geq\frac{(\alpha+1+1)^2}{\sqrt{2}x+y+z}$, ta chọn α thỏa

$x=y=z=3$ và $\frac{\alpha}{\sqrt{2}x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}\Rightarrow\frac{\alpha}{\sqrt{2}.3}=\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow\alpha=\sqrt{2}$

Vậy ta có: $\begin{cases} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}x}+\frac{1^2}{y}+\frac{1^2}{z}\geq\frac{(\sqrt{2}+1+1)^2}{\sqrt{2}x+y+z} \\ \frac{1^2}{x}+\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}y}+\frac{1^2}{z}\geq\frac{(1+\sqrt{2}+1)^2}{x+\sqrt{2}y+z} \\ \frac{1^2}{x}+\frac{1^2}{y}+\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}z}\geq\frac{(1+1+\sqrt{2})^2}{x+y+\sqrt{2}z} \end{cases}\Rightarrow P\leq\frac{\left(\sqrt{2}+2\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right]\leq\frac{1}{2+\sqrt{2}}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=3\Rightarrow MaxP=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$ khi $x=y=z=3$

Ví dụ 8: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2x-y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

Giải:

Nhận xét: Ý tương là dùng bất đẳng thức BCS, nhưng ta không biết được dấu "=" xảy ra tại đâu. Ta giả định dấu "=" là có như sau

Giả sử P đạt min tại $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ với $2a - b = 2$

Áp dụng BCS, ta có

$$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \geq \frac{ax + (b+1)(y+1)}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}}, \qquad \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \geq \frac{ax + (b-3)(y-3)}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}}$$

Suy ra

$$P = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \geq \frac{ax + (b+1)(y+1)}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} + \frac{ax + (b-3)(y-3)}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}}$$

$$= \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}} \right] x + \left[\frac{b+1}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} + \frac{b+1}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}} \right] y$$

$$+ \frac{b+1}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} - \frac{3(b+1)}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}}$$

Ta sẽ chọn a, b thỏa

$$\begin{cases} 2a - b = 2 \\ \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} + \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}} = -2\left(\dfrac{b+1}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} + \dfrac{b+1}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{-2}{3} \end{cases}$$

Tới đây suy ra $P \geq \frac{12\sqrt{5}}{25}x - \frac{6\sqrt{5}}{25}y + \frac{38\sqrt{5}}{25} = \frac{6\sqrt{5}}{25}(2x - y) + \frac{38\sqrt{5}}{25} = 2\sqrt{5}$

Các bạn tự viết lại bài giải hoàn chỉnh.

Ví dụ 9: Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a + b + c = 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 14$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{4a + b}{c}$$

<u>*Giải:*</u>

Đây là một bài toán khó, dấu "=" không biết xảy ra tại đâu. Ý tưởng như ví dụ 8, nhưng khó áp dụng được BCS. Vì vậy ta có thể giả sử $\max P \le m \Leftrightarrow \frac{4a+b}{c} \le m \Leftrightarrow 4a+b-mc \le 0$ với $m>0$.

Kết hợp với giả thiết $n(a+b+c)=6n$ với $n>0$, ta có

$$(4+n)a+(1+n)b+(n-m)c \le 6n \qquad (1)$$

Từ đây ta cố gắng đánh giá theo bất đẳng thức BCS sao cho vế trái xuất hiện $a^2+b^2+c^2$.

Áp dụng BCS, ta có

$$\left[(4+n)a+(1+n)b+(n-m)c\right]^2 \le \left[(4+n)^2+(1+n)^2+(n-m)^2\right].\left[a^2+b^2+c^2\right]=14\left[(4+n)^2+(1+n)^2+(n-m)^2\right](2)$$

Vì cần chứng minh (1), nên ta chọn m,n sao cho bình phương của vế phải của (1) và vế phải của (2) bằng nhau. Tức là

$$14\left[(4+n)^2+(1+n)^2+(n-m)^2\right]=36n^2$$

Ngoài ra dấu "=" trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{4+n}=\frac{b}{1+n}=\frac{c}{n-m}=\frac{a+b+c}{5+3n-m}=\frac{6}{5+3n-m}$

Hay $$a=\frac{6(4+n)}{5+3n-m},\quad b=\frac{6(1+n)}{5+3n-m},\quad c=\frac{6(n-m)}{5+3n-m}.$$

Khi đó $\max P$ đạt được thỏa yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n>m>0 \\ a+b+c=6 \qquad (h/n) \\ a^2+b^2+c^2=14 \\ 14\left[(4+n)^2+(1+n)^2+(n-m)^2\right]=36n^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n>m>0 \\ 36\left[(4+n)^2+(1+n)^2+(n-m)^2\right]=14(5+3n-m)^2 \\ 14\left[(4+n)^2+(1+n)^2+(n-m)^2\right]=36n^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{31}{2} \\ n=\frac{49}{2} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{19}{7},\quad b=\frac{17}{7},\quad c=\frac{6}{7}$$

Trình bày lại bài giải hoàn chỉnh (dành cho bạn đọc).

Bài tập tương tự

1. Cho $a,b,c>0$ thỏa $abc=1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$
2. Cho $a,b,c>0$ thỏa $abc=1$. Tìm GTNN của $P=\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}$
3. Cho $a,b,c,d>0$. Tìm GTNN của $P=\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}$
4. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$
5. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\frac{a^4}{b+4c}+\frac{b^4}{c+4a}+\frac{c^4}{a+4b}\geq\frac{a^3+b^3+c^3}{4}$
6. Cho $a,b,c>0$ thỏa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng $\frac{a}{a+2bc}+\frac{b}{b+2ca}+\frac{c}{c+2ab}\geq 1$
7. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$
8. Cho $a,b,c>0$ thỏa $a+b+c=6$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{a+b}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b+c}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c+a}}\geq\frac{3\sqrt{17}}{2}$$

&4. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

Đây là một trong những phương pháp cơ bản để chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của một biểu thức nhiều biến.

Để sử dụng phương pháp này người ta tiến hành như sau

- Với mỗi bất đẳng thức hãy chọn một hàm thích hợp
- Khảo sát chiều biến thiên của hàm số vừa tìm được trên miền xác định của nó (miền xác định này được tìm thấy dựa vào vào điều kiện của đề bài).
- Từ bước 2 sẽ cho ta lời giải của phép chứng minh bất đẳng thức, hoặc giá trị lớn nhất, nhỏ nhất biểu thức cần tìm.

I-PHƯƠNG PHÁP VÀ BÀI TẬP CƠ BẢN

1-MỘT BIẾN SỐ

Chứng minh bất đẳng thức P(x) > Q(x), $\forall x \in (a,b)$

- Xét hàm số f(x) = P(x) – Q(x) liên tục trên [a,b). ***(liên tục trên (a,b])***
- Tính $f'(x)$. Chứng tỏ $f'(x) \geq 0, \forall x \in [a,b)$ $\left(f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b]\right)$
- ⇨ Hàm số đồng biến trên [a,b) ***(Hàm số nghịch biến trên (a,b])***
- ⇨ $\forall x \in (a,b): f(x) > f(a) =$... $\left(\forall x \in (a,b): f(x) > f(b)\right)$

Suy ra đpcm

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ đúng với mọi $x > 0$

<u>Giải:</u>

Xét $f(x) = e^x - \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)$ liên tục $\forall x \geq 0$.

Ta có $f'(x) = e^x - x - 1$, $f''(x) = e^x - 1 \geq 0$, $\forall x \geq 0$

Do đó $f'(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$ $\Rightarrow f'(x) \geq f'(0) = 0, \forall x \geq 0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty) \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$, $\forall x > 0$

$\Rightarrow e^x - \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right) > 0$, $\forall x > 0$ hay $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ với $\forall x > 0$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ với $x > 0$

Giải:

BĐT $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < x & (a) \\ x - \frac{x^3}{6} < \sin x & (b) \end{cases}$ với $x > 0$

a) Ta chứng minh $\sin x < x$ với $x > 0$

Xét hàm số $f(x) = x - \sin x$ liên tục trên $[0;+\infty)$

Ta có: $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, $\forall x \in [0;+\infty) \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

$\Rightarrow f(x) > f(0)$ với $x > 0 \Rightarrow x - \sin x > 0$ với $x > 0$

b) Ta chứng minh $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$ với $x > 0$

Xét hàm số $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ liên tục trên $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = g(x)$

$\Rightarrow g'(x) = -\sin x + x \geq 0$ với $\forall x \geq 0 \Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

$\Rightarrow g(x) \geq g(0) = 0$ với $x \geq 0$

hay $f'(x) \geq 0$ với $x \geq 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

$\Rightarrow f(x) > f(0) = 0$ với $x > 0$

$\Rightarrow \sin x - x + \frac{x^3}{6} > 0$ hay $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$ với $x > 0$

Từ a) và b) suy ra $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ với $x > 0$.

Ví dụ 3: Cho $0 < \alpha \le \frac{3}{4}$. Chứng minh rằng $2.\alpha + \frac{1}{\alpha^2} > 3$

Giải:

Xét hàm số $f\left(x\right) = 2x + \frac{1}{x^2}$ trên $\left(0;\frac{3}{4}\right]$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{59}{18}$

Ta có $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3-1)}{x^3} < 0$ với $\forall x \in \left(0;\frac{3}{4}\right]$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{3}{4}\right] \Rightarrow f(x) \ge f\left(\frac{3}{4}\right)$, $\forall x \in \left(0;\frac{3}{4}\right]$

$\Rightarrow f\left(\alpha\right) \ge f\left(\frac{3}{4}\right)$, $\forall \alpha \in \left(0;\frac{3}{4}\right] \Rightarrow 2\alpha + \frac{1}{\alpha^2} \ge \frac{59}{18} > 3$, $\forall \alpha \in \left(0;\frac{3}{4}\right]$

A. **Vớ dụ 4.** Chứng minh rằng $2^{\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{x+1}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Giải:

Áp dụng BĐT Cô–si: $2^{\sin x} + 2^{\tan x} \ge 2.\sqrt{2^{\sin x}.2^{\tan x}}$ = $2.2^{\frac{\sin x + \tan x}{2}} = 2^{\frac{\sin x + \tan x}{2}+1}$

$$\Leftrightarrow 2^{\sin x} + 2^{\tan x} \ge 2^{\frac{\sin x + \tan x}{2}+1}$$

Mà dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$, nên $2^{\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{\frac{\sin x + \tan x}{2}+1}$

Ta cần chứng minh

$$2^{\frac{\sin x + \tan x}{2}+1} > 2^{x+1} \Leftrightarrow \frac{\sin x + \tan x}{2} + 1 > x + 1 \Leftrightarrow \sin x + \tan x > 2x \text{, với } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Xét hàm số $f(x)=\sin x+\tan x-2x$ liên tục trên $[0;\frac{\pi}{2})$

Ta có: $f'(x)=\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-2\geq \cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}-2\overset{Co-si}{\geq} 2.\sqrt{\cos^2 x.\frac{1}{\cos^2 x}}-2=0$

(vì $\cos x\geq \cos^2 x$ với $0\leq x<\frac{\pi}{2}$)

$\Rightarrow f'(x)\geq 0, \forall x\in[0;\frac{\pi}{2})\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;\frac{\pi}{2})\Rightarrow f(x)>f(0)$ với $0<x<\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin x+\tan x-2x>0\Rightarrow \sin x+\tan x>2x$ với $0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 5: Chứng minh $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$ với mọi $x>0$

<u>*Giải:*</u>

Xét $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$ liên tục $\forall x\geq 0$, $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}\geq 0,\ \forall x\geq 0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến với mọi $x\geq 0$

$\Rightarrow f(x)>f(0)\Rightarrow \ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}>0,\ \forall x>0\Rightarrow x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$ với mọi $x>0$

2-HAI BIẾN SỐ

Loại 1: Sử dụng tính đơn điệu hàm số

Ta đưa bất đẳng thức về dạng: f(a)<f(b). Xét tính đơn điệu của hàm số f(x) trên đoạn [a;b] hoặc khoảng $(c;d)\supset[a;b]$

Ví dụ 6: Cho $0<a<b<\frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $a.\sin a-b.\sin b>2.(\cos b-\cos a)$

<u>*Giải:*</u>

YCBT $\Leftrightarrow a.\sin a+2\cos a>b.\sin b+2.\cos b$

Xét hàm số $f(x) = x.\sin x + 2.\cos x$ với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

Ta có: $f'(x) = \sin x + x.\cos x - 2.\sin x$, $f'(0) = 0$

$f''(x) = \cos x + \cos x - x.\sin x - 2.\cos x = -x.\sin x < 0$ (vì $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ thì $\sin x > 0$).

Do đó $f'(x) < f'(0) = 0$ khi $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f(x)$ giảm trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(a) > f(b)$ với $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow a.\sin a + 2\cos a > b.\sin b + 2.\cos b \Leftrightarrow a.\sin a - b.\sin b > 2.(\cos b - \cos a)$

Ví dụ 7: Chứng minh với $0<a<\sqrt[3]{b}<a+1$ thì $\dfrac{a(a^3+2b)}{2a^3+b} < \sqrt[3]{b} < \dfrac{(a+1)\left[(a+1)^3+2b\right]}{2(a+1)^3+b}$

__Giải:__

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x(x^3+2.b)}{2x^3+b}$ liên tục trên $\left[0;a+1\right]$

Ta có $f'(x) = \dfrac{2(x^3-b)^2}{(2x^3+b)^2} \geq 0,\ \forall x \in \left[0;a+1\right]$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[0;a+1\right] \Rightarrow f(a) < f\left(\sqrt[3]{b}\right) < f(a+1)$ với $0 < a < x < a+1$

$$\Rightarrow \frac{a.(a^3+2.b)}{2.a^3+b} < \sqrt[3]{b} < \frac{(a+1)\left[(a+1)^3+2.b\right]}{2.(a+1)^3+b} \qquad \text{(đpcm)}.$$

***Loại 2: Sử dụng* ĐỊNH LÝ LAGRANGE**

Định lý lagrange

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và khả vi trên $(a;b)$ thì tồn tại một số $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ví dụ 8: Chứng minh rằng $\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$ với $0 < a < b$

Giải:

Xét hàm số : $f(x) = \ln x$ liên tục trên $[a;b]$ và $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(c) = \frac{1}{c}$

Hàm số $f\left(x\right) = \ln x$ thoả mãn định lý Larange trên $[a;b]$

$\Rightarrow \exists c \in (a;b):\ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$

Do $0 < a < c < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$.

Ví dụ 9: Chứng minh rằng với mọi *x, y* $\in$ R ta có: $|\sin x - \sin y| \le |x-y|$

Giải:

Xét hàm số $f(t) = \sin t$, $f'(t) = \cos t \Rightarrow f'(c) = \cos c$

Hàm số $f(t) = \sin t$ thỏa định lý Lagrange trên [*x; y*]

Nên $\exists c \in (x;y)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \Leftrightarrow \cos c = \frac{\sin y - \sin x}{y-x}$

$\Rightarrow |\cos c| = \left|\frac{\sin x - \sin y}{x-y}\right| \le 1 \Leftrightarrow |\sin x - \sin y| \le |x-y|,\ \forall x; y \in R$

Ví dụ 10: Chứng minh rằng $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$ với $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

Giải:

Xét hàm số $f(x) = \tan x$ liên tục và khả vi trên $[a;b]$ và $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $f'(c) = \frac{1}{\cos^2 c}$

$\Rightarrow \exists c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\tan b - \tan a}{b-a}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 c} = \frac{\tan b - \tan a}{b-a} \Rightarrow \tan b - \tan a = \frac{b-a}{\cos^2 c}.$$

Do $a < c < b$ và $y = \cos x$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} < \frac{b-a}{\cos^2 c} < \frac{b-a}{\cos^2 b} \Leftrightarrow \frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$$ với $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\frac{\tan a}{\tan b} < \frac{a}{b},\ với\ 0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

b) $a - \sin a < b - \sin b,\ với\ 0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

2. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120},\ với\ x > 0$

b) $x\sin x + \cos x > 1,\ với\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

3. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $e^x > 1 + x,\ với\ x > 0$

b) $\ln(1+x) < x,\ với\ x > 0$

4. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\ln(1+x) - \ln x > \frac{1}{1+x},\ với\ x > 0$

b) $1 + x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \geq \sqrt{1+x^2}$

5. Cho $x > 1$ và $\alpha > 1$. Chứng minh rằng: $x^a - 1 > \alpha(x-1)$

6. Chứng minh rằng: $\ln(x+1) < x$ mọi $x > 0$.

7. Cho $x > 0$. Chứng minh rằng: $\left(1 + \frac{1}{1+x}\right)^{1+x} > \left(1 + \frac{1}{1+x}\right)^x$

II-ỨNG DỤNG

Trong phần này chúng ta vận dụng linh hoạt các kỹ thuật và phương pháp đã trình bày phần trước và lưu ý đến các mối liên hệ với $x,y,z\geq 0$, ta có

$$\frac{x^2+y^2}{2}\geq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\geq xy\ ;\qquad \frac{x^3+y^3+z^3}{3}\geq\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3\geq xyz\ ;$$

$$x^2+y^2+z^2\geq\frac{(x+y+z)^2}{3}\geq xy+yz+zx$$

Phương pháp chung là đặt ẩn phụ (có thể nhiều hơn một lần) dựa vào thông tin từ đề bài.

Lưu ý:

- Hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} f(t)=f(a),\ \max\limits_{[a;b]} f(t)=f(b)$
- Hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $[a;b)$ thì $\min\limits_{[a;b)} f(t)=f(a)$
- Hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $(a;b]$ thì $\max\limits_{(a;b]} f(t)=f(b)$

Nếu $f(t)$ liên tục và nghịch biến thì ta có điều ngược lại.

Ví dụ 1: (Đề thi khối B, 2009) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=3\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)-2\left(x^2+y^2\right)+1,$$

với x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $(x+y)^3+4xy\geq 2$.

Giải:

Nhận xét: **Thông tin từ đề bài gợi ý đổi biến $t=\left(x^2+y^2\right);\ t=x+y$ hoặc $t=xy$.**

Từ giả thiết và chú ý đến bất đẳng thức $(x+y)^2\geq 4xy,\ \forall x,y\in R$, ta có

$$(x+y)^3+4xy\geq 2\Rightarrow (x+y)^3+(x+y)^2\geq (x+y)^3+4xy\geq 2$$

$\Leftrightarrow (x+y-1)\left[(x+y)^2+(x+y)+2\right]\ge 0$ (vì $(x+y)^2+(x+y)+2>0, \forall x,y\in R$)

$\Rightarrow x+y\ge 1, \quad \forall x,y\in R$

Khi đó kết hợp với bất đẳng thức $x^4+y^4\ge \dfrac{(x^2+y^2)^2}{2}, \forall x,y\in R$, ta có

$$A=3(x^4+y^4+x^2y^2)-2(x^2+y^2)+1=\frac{3}{2}(x^2+y^2)^2+\frac{3}{2}(x^4+y^4)-2(x^2+y^2)+1$$

$$\Rightarrow A\ge \frac{3}{2}(x^2+y^2)^2+\frac{3}{4}(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)+1=\frac{9}{4}(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)+1$$

Mặt khác $x^2+y^2\ge \dfrac{(x+y)^2}{2}\ge \dfrac{1}{2}$. Đặt $t=x^2+y^2$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{9}{4}t^2-2t+1$ với $t\ge \dfrac{1}{2}$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{9}{2}t-2\ge \dfrac{9}{2}.\dfrac{1}{2}-2=\dfrac{1}{4}>0, \forall t\in[\dfrac{1}{2};+\infty) \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[\dfrac{1}{2};+\infty)$

Suy ra $f(t)\ge f\left(\dfrac{1}{2}\right), \forall t\in[\dfrac{1}{2};+\infty) \quad \Rightarrow \min\limits_{[\frac{1}{2};+\infty)} f(t)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{16}$

Từ đó suy ra $\min A=\dfrac{9}{16}$ khi $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{2} \\ x+y=1,\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 2 (Đề thi khối B, 2011) : Cho $a,b>0$ thỏa mãn $2(a^2+b^2)+ab=(a+b)(ab+2)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\right)$ (1)

Giải :

Nhận xét :* *Thông tin từ (1) ***có thể đặt*** $t=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$

Từ giả thiết, ta có

$$2\left(a^2+b^2\right)+ab=\left(a+b\right)\left(ab+2\right)\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(ab+2\right)\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=a+\frac{2}{b}+b+\frac{2}{a}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\left(a+\frac{2}{b}\right)+\left(b+\frac{2}{a}\right)\geq 2\sqrt{a.\frac{2}{b}}+2\sqrt{b.\frac{2}{a}}=2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=2\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab=2$

Suy ra $\quad 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1\geq 2\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2} \qquad (2)$

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, từ $(2)\Rightarrow 2t+1\geq 2\sqrt{2}\sqrt{t+2}\Rightarrow 4t^2-4t-15\geq 0\Rightarrow t\geq\frac{5}{2}$.

Khi đó $P=4\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)=4\left(t^3-3t\right)-9\left(t^2-2\right)=4t^3-9t^2-12t+18$

Xét hàm số $f\left(t\right)=4t^3-9t^2-12t+18$ liên tục trên $\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$, ta có

$$f\left(t\right)=12t^2-18t-12=\left(12t+6\right)\left(t-2\right)>0,\ \ \forall t\geq\frac{5}{2}$$

Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left[\frac{5}{2};+\infty\right)\Rightarrow f\left(t\right)\geq f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{23}{4},\forall t\in\left[\frac{5}{2};+\infty\right)\Rightarrow \min f\left(t\right)=-\frac{23}{4}\ khi\ t=\frac{5}{2}$

Vậy $\min P=-\frac{23}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}ab=2\\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}\vee\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$.

Ví dụ 3 (Đề thi khối D, 2009) Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thoả mãn $x+y=1$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy$.

Giải :

Cách 1 : Không đổi biến

Từ $x+y=1\Rightarrow y=1-x,\ \ 0\leq x\leq 1$, và

$$S=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy=16x^2y^2-2xy+12=16x^2\left(1-x\right)^2-2x\left(1-x\right)+12$$

$$=16x^4-32x^3+18x^2-2x+12=f\left(x\right)$$

Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$.

$f'\left(x\right)=64x^3-96x^2+36x-2$ và $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\vee x=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\vee x=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

$$f\left(0\right)=12,\qquad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{2},\qquad f\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)=f\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{191}{16}$$

Vậy $\min S=\min\limits_{x\in\left[0;1\right]}f\left(x\right)$ $khi\ x=y=\frac{1}{2}$; $\max S=\max\limits_{x\in\left[0;1\right]}f\left(x\right)=\frac{191}{16}$ $khi\ \begin{cases}x=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\\ y=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\\ y=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\end{cases}$

<u>Cách 2 : Đổi biến</u>

Do $x+y=1$, nên $S=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy=16x^2y^2-2xy+12$

Đặt $t=xy\Rightarrow t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$ (vì $0\le xy\le\frac{\left(x+y\right)^2}{4}=\frac{1}{4}$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=16t^2-2t+12$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{1}{4}\right]$

$$f'\left(t\right)=32t-2,\ f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{16},\qquad f\left(0\right)=12,\qquad f\left(\frac{1}{16}\right)=\frac{191}{16},\quad f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{25}{2}$$

Suy ra: $\min S=\min\limits_{t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]}f\left(t\right)$ $khi\ t=\frac{1}{4}\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\ xy=\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$

$$\max S=\max\limits_{t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]}f\left(t\right)=\frac{191}{16}\ khi\ t=\frac{1}{16}\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\ xy=\frac{1}{16}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\\ y=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\\ y=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\end{cases}$$

Ví dụ 4 : (Đề khối A, 2014) Cho x, y, z là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x^2}{x^2+yz+x+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9}$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$2x(y+z)\le x^2+(y+z)^2=2+2yz\Rightarrow yz+1\ge x(y+z)\Rightarrow x^2+x+yz+1\ge x^2+x+x(y+z)$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x^2+yz+x+1}\le\frac{x^2}{x^2+x+x(y+z)}=\frac{x}{x+y+z+1}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y+z$

Do đó $P\le\frac{x}{x+y+z+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9}=1-\left(\frac{1}{x+y+z+1}+\frac{1+yz}{9}\right)$

Theo BĐT BCS ta có : $x+(y+z)\le\sqrt{2(x^2+(y+z)^2}=2\sqrt{1+yz}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y+z$

$$\Rightarrow x+y+z+1\le 1+2\sqrt{1+yz}\Rightarrow -\frac{1}{x+y+z+1}\le-\frac{1}{1+2\sqrt{1+yz}}$$

Do đó $P\le 1-\left(\frac{1}{x+y+z+1}+\frac{1+yz}{9}\right)\le 1-\left(\frac{1}{1+2\sqrt{1+yz}}+\frac{1+yz}{9}\right)$

Đặt $t=\sqrt{1+yz}, t\ge 1$. Xét hàm số $f(t)=1-\left(\frac{1}{2t+1}+\frac{t^2}{9}\right)$ liên tục trên $[1;+\infty)$

$f'(t)=\frac{1}{(2t+1)^2}-\frac{2t}{9}\le\frac{1}{9}-\frac{2}{9}=-\frac{1}{9}<0$ (vì $(2t+1)^2\ge 9,\forall t\ge 1\Rightarrow\frac{1}{(2t+1)^2}\le\frac{1}{9};\frac{2t^2}{9}\ge\frac{2}{9},\forall t\ge 1$)

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $[1;+\infty)\Rightarrow f(t)\le f(1)=\frac{5}{9}$ và $f(t)=\frac{5}{9}\ khi\ t=1$

Vậy $\max P=\frac{5}{9}\ khi\ \begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\x=y+z\\\sqrt{1+yx}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\\z=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=1\\y=1\\z=0\end{cases}$

Ví dụ 5: (Đề khối D, 2014) Cho hai số thực x, y thỏa điều kiện $1 \le x, y \le 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $$P = \frac{x+2y}{x^2+3y+5} + \frac{y+2x}{y^2+3x+5} + \frac{1}{4(x+y-1)}$$

Giải:

Do $1 \le x \le 2 \Rightarrow (x-1)(x-2) \le 0 \Rightarrow x^2+2 \le 3x$. Tương tự $y^2+2 \le 3y$

Suy ra $P \ge \frac{x+2y}{3x+3y+3} + \frac{y+2x}{3y+3x+3} + \frac{1}{4(x+y-1)} = \frac{x+y}{x+y+1} + \frac{1}{4(x+y-1)}$

Đặt $t = x+y$, $2 \le t \le 4$. Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{t+1} + \frac{1}{4(t-1)}$ liên tục trên đoạn $[2;4]$

$$f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{4(t-1)^2}; \qquad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

$f(2) = \frac{11}{12}$; $f(3) = \frac{7}{8}$; $f(4) = \frac{53}{60}$ Suy ra $\min f(t) = \frac{7}{8}$ khi $t = 3$.

Do đó $P \ge \frac{7}{8}$. Vậy $\min P = \frac{7}{8}$ khi $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Ví dụ 6: (Đề thi khối B, 2012) Cho các số thực x, y, z thỏa các điều kiện $x+y+z=0$ và $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^5+y^5+z^5$.

Giải:

Từ $x+y+z=0 \Rightarrow z = -(x+y)$ thế vào giả thiết thứ hai, ta có

$$1 = x^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+(x+y)^2 = 2(x+y)^2 - 2xy \ge 2(x+y)^2 - \frac{1}{2}(x+y)^2 = \frac{3}{2}(x+y)^2$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 \le \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{\sqrt{6}}{3} \le (x+y) \le \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Và từ $x^2+y^2+z^2 = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy + (x+y)^2 = 1 \Rightarrow xy = \frac{2(x+y)^2-1}{2}$

Mặt khác $P = x^5+y^5+z^5 = x^5+y^5-(x+y)^5 = (x^3+y^3)(x^2+y^2) - x^2y^2(x+y) - (x+y)^5$

$$=\left(\left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)\right)\left(\left(x+y\right)^2-2xy\right)-x^2y^2\left(x+y\right)-\left(x+y\right)^5=5x^2y^2\left(x+y\right)-5xy\left(x+y\right)^3$$

Đặt $t=x+y$, suy ra $-\frac{\sqrt{6}}{3}\le t\le\frac{\sqrt{6}}{3}$ và $xy=\frac{2t^2-1}{2}$

Khi đó $P=5\left(\frac{2t^2-1}{2}\right)^2t-5\left(\frac{2t^2-1}{2}\right)t^3=-\frac{5}{4}\left(2t^3-t\right)$

Xét hàm $f\left(t\right)=-\frac{5}{4}\left(2t^3-t\right)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{-\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$

$$f'\left(t\right)=-\frac{5}{4}\left(6t^2-1\right);\quad f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=\frac{5\sqrt{6}}{36},\quad f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=-\frac{5\sqrt{6}}{36}\Rightarrow\min f\left(t\right)=-\frac{5\sqrt{6}}{36}\ khi\ t=-\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Suy ra $\min P=-\frac{5\sqrt{6}}{36}$ khi $x=y=\frac{\sqrt{6}}{6},z=-\frac{\sqrt{6}}{3}\vee x=y=-\frac{\sqrt{6}}{3},z=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ và các hoán vị.

Ví dụ 7: (Đề thi khối A, 2012) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x+y+z=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}-\sqrt{6\left(x^2+y^2+z^2\right)}$

__Giải:__

Ta chứng bất đẳng thức $3^t\ge 1+t,\ \forall t\ge 0\ \left(1\right)$ (xét hàm số $f\left(t\right)=3^t-t-1$)

Áp dụng $\left(1\right)$, ta có

$$P=3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}-\sqrt{6\left(x^2+y^2+z^2\right)}\ge 3+|x-y|+|y-z|+|z-x|-\sqrt{6\left(x^2+y^2+z^2\right)}$$

Áp dụng bất đẳng thức $|a|+|b|\ge|a+b|$, ta có

$$\begin{aligned}\left(|x-y|+|y-z|+|z-x|\right)^2&=|x-y|^2+|y-z|^2+|z-x|^2+|x-y|\left(|y-z|+|z-x|\right)\\&+|y-z|\left(|z-x|+|x-y|\right)+|z-x|\left(|x-y|+|y-z|\right)\ge 2\left(|x-y|^2+|y-z|^2+|z-x|^2\right)\end{aligned}$$

Suy ra

$$|x-y|+|y-z|+|z-x| \geq \sqrt{2\left(|x-y|^2+|y-z|^2+|z-x|^2\right)}=\sqrt{6\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\left(x+y+z\right)^2}=\sqrt{6\left(x^2+y^2+z^2\right)}$$

Do đó $P=3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}-\sqrt{6\left(x^2+y^2+z^2\right)} \geq 3$ và $P=3 \; khi \; x-y=z=0$

Vậy $\min P=3 \; khi \; x=y=z$.

Ví dụ 8: Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^2+y^2+z^2+\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{y^2z}+\frac{1}{z^2x}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$P=x^2+y^2+z^2+\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{y^2z}+\frac{1}{z^2x} \geq 3\sqrt[3]{\left(xyz\right)^2}+\frac{3}{xyz}$$

Và $0<\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3} \leq \frac{1}{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{2}$

Đặt $t=\sqrt[3]{xyz}, t \in \left(0;\frac{1}{2}\right]$. Xét hàm số $f\left(t\right)=3t^2+\frac{3}{t^3} \Rightarrow$ (ĐPCM)

Ví dụ 9: Cho $x \geq y \geq z>0$. Chứng minh: $\frac{x^2.y}{z}+\frac{y^2.z}{x}+\frac{z^2.x}{y} \geq x^2+y^2+z^2$

Giải:

BĐT $\Leftrightarrow \frac{x^3.y^2+z^2.y^3+x^2.z^3}{x.y.z} \geq x^2+y^2+z^2$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3.y^2+z^2.y^3+x^2.z^3}{y} \geq xz(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow \frac{x^3}{y^3}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{z^3}{y^3}.\frac{x^2}{y^2} \geq \frac{x}{y}.\frac{z}{y}\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{z^2}{y^2}+1\right)$$

Đặt $u=\frac{x}{y}$, $v=\frac{z}{y}$. Ta có $u \geq 1 \geq v>0$.

Nên BĐT có dạng $u^3+v^2+u^2.v^3 \geq u.v(u^2+v^2+1)$

$$\Leftrightarrow u^3(1-v)+u^2.v^3-u.v(1+v^2)+v^2 \geq 0 \qquad (1)$$

+ Nếu $v=1$ thì (1) có dạng $u^2-2.u+1 \geq 0$, tức là (1) đúng

+ Nếu $0<v<1$.

Xét hàm số $f(u)=u^3(1-v)+u^2.v^3-u.v(1+v^2)+v^2$ với $u \geq 1$

Ta có $f'(u)=3.u^2(1-v)+2.u.v^3-v(1+v^2)$

$f''(u)=6.u(1-v)+2.v^3>0$ (do $0<v<1$ và $u \geq 1$)

$\Rightarrow f'(u)$ đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$, nên $f'(u) \geq f'(1),\ \forall u \in \left[1;+\infty\right)$

Mà $f'(1)=v^3-4.v+3=(v-1)(v^2+v-3)>0$, nên $f'(u) \geq 0 \Rightarrow$ *f (u)* đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$

Tức là $\forall u \geq 1$ ta có $f(u) \geq f(1)=v^2-2v+1=(v-1)^2>0$

Vậy: $u^3(1-v)+u^2v^2-u^2v^3-uv(1+v^2)+v^2 \geq 0$ với $\forall u \geq 1>v>0$

Hay $\dfrac{x^2.y}{z}+\dfrac{y^2.z}{x}+\dfrac{z^2.x}{y} \geq x^2+y^2+z^2$ với $x \geq y \geq z>0$.

Lưu ý: ***Các bạn có thể lập bảng biến thiên, từ đó rút ra kết luận bài toán.***

Bài tập tương tự

1. Cho $x,y \geq 0$ thỏa mãn $x+y=4$. Tìm GTNN và GTLN của $P=\left(x^3-1\right)\left(y^3-1\right)$.
   HD: Đặt $t=xy,\ 0 \leq t \leq 4$
2. Cho $x,y \geq 0$ thỏa mãn $x^2+y^2=2$. Tìm GTNN và GTLN của $P=x+y-xy$.
   HD: Đặt $t=x+y,\ \sqrt{2} \leq t \leq 2$
3. Cho $x,y \geq 0$ thỏa mãn $x^2+y^2=8$. Tìm GTNN và GTLN của $P=\dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}$.
   HD: Đặt $t=x+y,\ 2\sqrt{2} \leq t \leq 4$
4. Cho $x,y \geq 0$ thỏa mãn $x+y+xy=3$. Tìm GTNN và GTLN của $P=\dfrac{x^2}{y+1}+\dfrac{y^2}{x+1}-\dfrac{1}{x+y+3}$
   HD: Đặt $t=x+y,\ 2 \leq t \leq 3$

5. (Đề thi khối A, 2013) Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$.

   HD: Đặt $x=\frac{a}{c},\ y=\frac{b}{c}$. Sau đó đặt $t=x+y,\ t\geq 2$.

6. (Đề thi khối D, 2012) Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\leq 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+y^3+3(xy-1)(x+y-2)$

   HD: Đặt $t=x+y,\ 0\leq t\leq 8$.

7. (Đề thi khối B, 2013) Cho a, b, c là các số thực dương . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

   $$P=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$$

   HD: Đặt $t=\sqrt{a^2+b^2+c^2+4},\ t>2$.

8. (Đề thi khối B, 2010) Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+3(ab+bc+ca)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

   HD: Đặt $t=ab+bc+ca,\ 0\leq t\leq\frac{1}{3}$.

9. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z\leq\frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

   $$P=\frac{x}{y^2z}+\frac{y}{z^2x}+\frac{z}{x^2y}+\frac{x^5}{y}+\frac{y^5}{z}+\frac{z^5}{x}$$