Câu 1:

a) $\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}=\frac{5+\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-1}=\frac{5+\sqrt{5}}{4}$.

b) Thay x = - 2 và y = $\frac{1}{4}$ vào hàm số y = ax^2 ta được:

$$\frac{1}{4}=a.(-2)^2 \Leftrightarrow 4a=\frac{1}{4} \Leftrightarrow a=\frac{1}{16}.$$

Câu 2: a) $\sqrt{2x+1}=7-x \Leftrightarrow \begin{cases} 7-x \geq 0 \\ 2x+1=(7-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \ (1) \\ x^2-16x+48=0 \end{cases}$

Giải phương trình: $x^2 - 16x + 48 = 0$ ta được hai nghiệm là 4 và 12. Đối chiếu với điều kiện (1) thì chỉ có x = 4 là nghiệm của phương trình đã cho.

b) $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ x-y=\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y=4 \\ 6x-6y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x=5 \\ y=x-\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$.

Câu 3: a) Với m = 3 ta có phương trình: $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Giải ra ta được hai nghiệm: $x_1=3+\sqrt{5}$; $x_2=3-\sqrt{5}$.

b) Ta có: $\Delta' = m^2 - 4$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$ (*).

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1x_2 = 4$. Suy ra: $(x_1+1)^2+(x_2+1)^2=2$

$\Leftrightarrow x_1^2+2x_1+x_2^2+2x_2=0 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2+2(x_1+x_2)=0 \Leftrightarrow 4m^2-8+4m=0$

$\Leftrightarrow m^2+m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1=1 \\ m_2=-2 \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (*) ta thấy chỉ có nghiệm $m_2 = - 2$ thỏa mãn. Vậy m = - 2 là giá trị cần tìm.

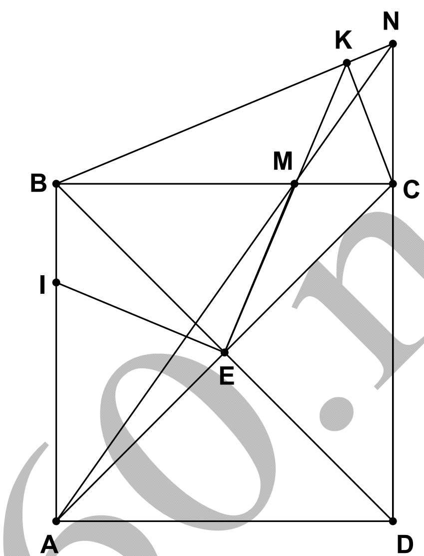
Câu 4:

a) Tứ giác BIEM có: $\widehat{IBM} = \widehat{IEM} = 90^0$ (gt); suy ra tứ giác BIEM nội tiếp đường tròn đường kính IM.

b) Tứ giác BIEM nội tiếp suy ra: $\widehat{IME} = \widehat{IBE} = 45^0$ (do ABCD là hình vuông).

c) ΔEBI và ΔECM có: $\widehat{IBE} = \widehat{MCE} = 45^0$, BE = CE, $\widehat{BEI} = \widehat{CEM}$ (do $\widehat{IEM} = \widehat{BEC} = 90^0$)

$\Rightarrow$ ΔEBI = ΔECM (g-c-g)$\Rightarrow$ MC = IB; suy ra MB = IA



Vì CN // BA nên theo định lí Thalet, ta có: $\frac{MA}{MN} = \frac{MB}{MC} = \frac{IA}{IB}$.

Suy ra IM song song với BN

(định lí Thalet đảo)

$\Rightarrow \widehat{BKE} = \widehat{IME} = 45^0$ (2). Lại có $\widehat{BCE} = 45^0$ (do ABCD là hình vuông).

Suy ra $\widehat{BKE} = \widehat{BCE} \Rightarrow$ BKCE là tứ giác nội tiếp.

Suy ra: $\widehat{BKC} + \widehat{BEC} = 180^0$ mà $\widehat{BEC} = 90^0$; suy ra $\widehat{BKC} = 90^0$; hay $CK \perp BN$.

Câu 5:

Ta có: $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (1).

Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên ta có: $a^2 < a.(b+c) \Rightarrow a^2 < ab + ac$.

Tương tự: $b^2 < ab + bc$; $c^2 < ca + bc$. Suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.