CHỦ ĐỀ. QUAN HỆ VUÔNG GÓC. VÉCTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa và các phép toán:

✓ Định nghĩa, tính chất và các phép toán về vectơ trong không gian được xây dựng hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng.

✓ Phép cộng, trừ vectơ:

- ***Quy tắc ba điểm***: Cho ba điểm *A, B, C* bất kì, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
- ***Quy tắc hình bình hành***: Cho hình bình hành *ABCD*, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
- ***Quy tắc hình hộp:*** Cho ***hình*** hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

✓ Lưu ý:

- ***Điều kiện để hai vectơ cùng phương***:
  Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{b}\neq\vec{0}) \Leftrightarrow \exists! k\in\mathbb{R}: \vec{a}=k.\vec{b}$.
- Điểm *M* chia đoạn thẳng *AB* theo tỉ số *k* ($k\neq 1$), điểm *O* tùy ý.
  Ta có: $\overrightarrow{MA}=k.\overrightarrow{MB}$ $\quad \overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}}{1-k}$
- ***Trung điểm của đoạn thẳng***: Cho *I* là trung điểm của đoạn thẳng *AB*, điểm *O* tùy ý.
  Ta có: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ $\quad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$
- ***Trọng tâm của tam giác***: Cho *G* là trọng tâm ΔABC, điểm *O* tùy ý.
  Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ $\quad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

2. Sự đồng phẳng của ba vectơ:

✓ ***Định nghĩa***: Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

✓ ***Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:*** Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

Khi đó: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists! m, n\in\mathbb{R}: \vec{c}=m.\vec{a}+n.\vec{b}$

✓ Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, $\vec{x}$ tùy ý.

Khi đó: $\exists! m, n, p\in\mathbb{R}: \vec{x}=m.\vec{a}+n.\vec{b}+p.\vec{c}$

3. Tích vô hướng của hai vectơ:

✓ ***Góc giữa hai vectơ trong không gian***: Ta có: $\overrightarrow{AB}=\vec{u}, \overrightarrow{AC}=\vec{v}$.

Khi đó: $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\widehat{BAC}$ $(0^0\leq\widehat{BAC}\leq 180^0)$

✓ ***Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian:***

Cho $\vec{u}, \vec{v}\neq\vec{0}$. Khi đó: $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

- Với $\vec{u}=\vec{0}$ hoặc $\vec{v}=\vec{0}$, quy ước: $\vec{u}.\vec{v}=0$

- Với $\vec{u},\ \vec{v} \neq \vec{0}$, ta có: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

II. KỸ NĂNG CƠ BẢN

***Dạng 1:* Chứng minh đẳng thức. Phân tích vectơ. Áp dụng công thức tính tích vô hướng.**

- Áp dụng các phép toán đối với vectơ (phép cộng hai vectơ, phép hiệu hai vectơ, phép nhân một vectơ với một số).
- Áp dụng các tính chất đặc biệt của hai vectơ cùng phương, trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác.

Ví dụ: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b},\ \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$. **C.** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$. **D.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

Hướng dẫn :

Cần lưu ý tính chất M là trung điểm của thì $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}$. Khi đó :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\ .$$

***Dạng 2:* Chứng minh hai đường thẳng song song, ba điểm thẳng hàng, đường thẳng song song với mặt phẳng, các tập hợp điểm đồng phẳng**

- Ứng dụng điều kiện của hai vectơ cùng phương, ba vectơ đồng phẳng

Ví dụ : Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là:

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$. **B.** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$. **D.** $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

Hướng dẫn:

Để A, B, C, D tạo thành hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ hoặc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Khi đó

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\right)$.

B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$: Với O là trọng tâm của tứ giác (hoặc tứ diện) $ABCD$.

C. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

D. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

Vậy chọn **A.**

Bài 2. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

III. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Vectơ chỉ phương của đường thẳng:**

   Vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng *d* nếu giá của $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng *d*.

2. **Góc giữa hai đường thẳng:**

✓ Cho $a//a'$, $b//b'$ và a', b' cùng đi qua một điểm. Khi đó: $\left(\widehat{a,b}\right)=\left(\widehat{a',b'}\right)$

✓ Giả sử $\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của đường thẳng a, b và $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\varphi$.

Khi đó: $\left(\widehat{a,b}\right)=\begin{cases}\varphi & \left(0^0\le\varphi\le 90^0\right)\\ 180^0-\varphi & \left(90^0<\varphi\le 180^0\right)\end{cases}$

✓ Nếu $a//b$ hoặc $a\equiv b$ thì $\left(\widehat{a,b}\right)=0^0$.

3. **Hai đường thẳng vuông góc:**

✓ $a\perp b\Leftrightarrow\left(\widehat{a,b}\right)=90^0$.

✓ Giả sử $\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của đường thẳng a, b. Khi đó: $a\perp b\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$

✓ Cho $a//b$. Nếu $a\perp c$ thì $b\perp c$.

Lưu ý: Hai đường thẳng vuông góc với nhau chỉ có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

IV. KỸ NĂNG CƠ BẢN :

Xác định góc giữa hai đường thẳng, chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Ví dụ :Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào ***sai***?

A. $A'C'\perp BD$. **B.** $BB'\perp BD$. **C.** $A'B\perp DC'$. **D.** $BC'\perp A'D$.

Hướng dẫn

Theo tính chất hình hộp, các cạnh bên vuông góc các cạnh đáy nên $BB'\perp BD$

Bài 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG

V. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Định nghĩa:** $d\perp(\alpha)\Leftrightarrow d\perp a,\ \forall a\subset(\alpha)$

2. **Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng:** $\begin{cases}d\perp a\\ d\perp b\\ a,b\subset(\alpha)\\ a\cap b=I\end{cases}\Rightarrow d\perp(\alpha)$

3. **Tính chất:**

✓ Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng: là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của đoạn thẳng đó. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là tập hợp tất cả các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

✓ $\begin{cases}a\in b\\ \left(\alpha\right)\perp a\end{cases}\Rightarrow\left(\alpha\right)\perp b$

✓ $\begin{cases}a\ne b\\ a\perp\left(\alpha\right)\Rightarrow a//b\\ b\perp\left(\alpha\right)\end{cases}$

✓ $\begin{cases}(\alpha)//(\beta) \\ a \perp (\alpha)\end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta)$

✓ $\begin{cases}(\alpha) \neq (\beta) \\ (\alpha) \perp a \\ (\beta) \perp a\end{cases} \Rightarrow (\alpha)//(\beta)$

✓ $\begin{cases}a//(\alpha) \\ b \perp (\alpha)\end{cases} \Rightarrow b \perp a$

✓ $\begin{cases}a \not\subset (\alpha) \\ a \perp b \\ (\alpha) \perp b\end{cases} \Rightarrow a//(\alpha)$

4. Định lý ba đường vuông góc:

Cho $a \subset (\alpha)$ và $b \not\subset (\alpha)$, b' là hình chiếu của b lên (α). Khi đó: $a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'$

5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

✓ Nếu d vuông góc với (α) thì góc giữa d và (α) là 90^0.

✓ Nếu d không vuông góc với (α) thì góc giữa d và (α) là thì góc giữa d và d' với d' là hình chiếu của d trên (α).

✓ Chú ý: góc giữa d và (α) là φ thì $0^0 \leq \varphi \leq 90^0$.

VI. KỸ NĂNG CƠ BẢN

Xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Ví dụ : Khẳng định nào sau đây ***sai*** ?

A. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α).

B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α).

D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a \| (\alpha)$ thì $d \perp a$.

Hướng dẫn :

A. Đúng vì $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow d \perp a,\ \forall a \subset (\alpha)$.

B. Sai vì Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.

C. Đúng vì $\begin{cases}d \perp a \\ d \perp b \\ a,b \subset (\alpha) \\ a \cap b = I\end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha) \Leftrightarrow d \perp c,\ \forall c \subset (\alpha)$.

D. Đúng vì $\begin{cases} a//(\alpha) \\ d\perp(\alpha) \end{cases} \Rightarrow d\perp a$

Bài 4. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

VII.KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Góc giữa hai mặt phẳng:

✓ Nếu $\begin{cases} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{cases}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng a và b.

✓ Giả sử $(\alpha)\cap(\beta)=d$. Từ điểm $I\in d$, dựng $\begin{cases} a\perp d, a\subset(\alpha) \\ b\perp d, b\subset(\beta) \end{cases}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng a và b.

✓ Chú ý: Gọi góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là φ thì $\varphi\in\left[0^0;90^0\right]$.

2. Diện tích hình chiếu của một đa giác:

Gọi S là diện tích của đa giác $\mathcal{H}$ nằm trong (α) và S' là diện tích của đa giác $\mathcal{H}'$ là hình chiếu vuông góc của đa giác $\mathcal{H}$ lên (β). Khi đó $S'=S.\cos\varphi$ với φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

3. Hai mặt phẳng vuông góc:

Nếu hai mặt phẳng (α) vuông góc mặt phẳng (β) thì góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) bằng 90^0.

Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau: $\begin{cases} a\subset(\alpha) \\ a\perp(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta)$

4. Tính chất:

✓ $\begin{cases} (\alpha)\perp(\beta) \\ (\alpha)\cap(\beta)=d \\ a\subset(\alpha) \\ a\perp d \end{cases} \Rightarrow a\perp(\beta)$

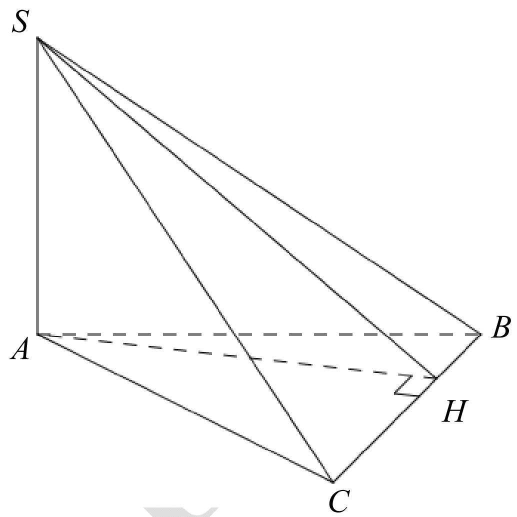
✓ $\begin{cases} (\alpha)\perp(\beta) \\ A\in(\alpha) \\ A\in a \\ a\perp(\beta) \end{cases} \Rightarrow a\subset(\alpha)$

✓ $\begin{cases} (\alpha)\perp(\gamma) \\ (\beta)\perp(\gamma) \\ (\alpha)\cap(\beta)=d \end{cases} \Rightarrow d\perp(\gamma)$

VIII. KỸ NĂNG CƠ BẢN

Dạng 1 : Góc giữa hai mặt phẳng

Ví dụ : Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy là tam giác vuông ở A. Khẳng định nào sau đây ***sai***?



A. $(SAB) \perp (ABC)$.

B. $(SAB) \perp (SAC)$.

C. Vẽ $AH \perp BC$, $H \in BC$ thì góc $\angle ASH$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

D. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là góc $\angle SCB$.

Hướng dẫn :

A. Đúng vì $\begin{cases} SA \subset (SAB) \\ SA \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$.

B. Đúng vì $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAC)$, $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ AC \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \perp (SAC)$

C. Đúng vì $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH \supset (SAH)$.

$\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SBC);(ABC))} = \widehat{(SH;AH)} = \widehat{SHA}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc giữa hai đường thẳng SH và AH, là góc $\widehat{SHA}$.

D. Sai do cách xác định như câu **C.**

BÀI TẬP

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 1. Trong không gian cho tứ diện đều $ABCD$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***:

A. $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{DC}$. **B.** $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$. **C.** $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Câu 2. Trong không gian cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó 4 vectơ nào sau đây đồng phẳng?

A. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC'}$. **B.** $\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{A'D'}, \overrightarrow{DD'}$.

C. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$. **D.** $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$.

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$. M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chọn mệnh đề ***đúng***:

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. **B.** $\overrightarrow{MN} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD})$. **D.** . $\overrightarrow{MN} = 2(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

Câu 4. Trong không gian cho hai đường thẳng a và b lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}, \vec{v}$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng a và b. Khẳng định nào sau đây là ***đúng***:

A. $\alpha = \left|(\vec{u}, \vec{v})\right|$.

B. $\cos\alpha = \left|\cos(\vec{u}, \vec{v})\right|$.

C. Nếu a và b vuông góc với nhau thì $\vec{u}.\vec{v} = \sin\alpha$.

D. Nếu a và b vuông góc với nhau thì $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Câu 5. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào ***sai***?

A. Nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ thì bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng

B. Tam giác ABC có I là trung điểm cạnh BC thì ta có đẳng thức: $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

C. Vì $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ nên suy ra B là trung điểm của AC

D. Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AD}$ nên 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng.

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Chọn mệnh đề ***đúng***:

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD})$. **B.** $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$. **D.** $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$.

Câu 7. Cho tứ diện đều $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây là ***sai?***

A. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DC} = \vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

Câu 8. Trong không gian cho 3 vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ không đồng phẳng. Mệnh đề nào sau đây là ***đúng***?

A. Các vectơ $\vec{u} + \vec{v}, \vec{v}, \vec{w}$ đồng phẳng.

B. Các vectơ $\vec{u} + \vec{v}, -2\vec{u}, 2\vec{w}$ đồng phẳng.

C. Các vectơ $\vec{u}+\vec{v},\ \vec{v},\ 2\vec{w}$ không đồng phẳng.

D. Các vectơ $2\left(\vec{u}+\vec{v}\right),\ -\vec{u},-\vec{v}$ không đồng phẳng.

Câu 9. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{w}$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$. Chọn đáp án ***đúng:***

A. $\overrightarrow{BC'}=\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$.
B. $\overrightarrow{BC'}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.
C. $\overrightarrow{BC'}=\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$.
D. $\overrightarrow{BC'}=\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}$.

Câu 10. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. Nếu $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AD}$ thì 4 điểm A,B,C,D đồng phẳng.

B. $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

C. Nếu $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm của AC.

D. Cho $d\subset(\alpha)$ và $d'\subset(\beta)$. Nếu mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau thì hai đường thẳng d và d' cũng vuông góc với nhau.

Câu 11. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}, \overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$.
B. $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$.
C. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$.
D. $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$.

Câu 12. Trong không gian cho điểm *O* và bốn điểm *A, B, C, D* không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để *A, B, C, D* tạo thành hình bình hành là:

A. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.
B. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
C. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.
D. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

Câu 13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$; $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$; $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{b}$.
B. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.
C. $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$.
D. $\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{b}=\vec{0}$.

Câu 14. Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *M* và *P* lần lượt là trung điểm của *AB* và *CD*. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$.Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d}\right)$.
B. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c}\right)$.
C. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$.
D. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b}\right)$.

Câu 15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'}=\vec{u}$, $\overrightarrow{CA'}=\vec{v}$, $\overrightarrow{BD'}=\vec{x}$, $\overrightarrow{DB'}=\vec{y}$. Chọn khẳng định **đúng**?

A. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$. B. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

C. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$. **D.** $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

Câu 16. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a\sqrt{6}$. Tính góc α giữa đường SC và mặt phẳng (SAD)?

A. $\alpha\approx 20^0 42'$. **B.** $\alpha\approx 20^0 70'$. **C.** $\alpha\approx 69^0 17'$. **D.** $\alpha\approx 69^0 30'$.

Câu 17. Cho $S.ABC$ có (SAC) và (SAB) cùng vuông góc với đáy, ΔABC đều cạnh a, $SA=2a$ Tính góc α giữa SB và (SAC) ?

A. $\alpha\approx 22^0 47'$. **B.** $\alpha\approx 22^0 79'$. **C.** $\alpha\approx 37^0 45'$. **D.** $\alpha\approx 67^0 12$.

Câu 18. Cho ΔSAB đều và hình vuông $ABCD$ nằm trong 2 mặt phẳng vuông góc nhau. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$?

A. $\alpha\approx 18^0 35'$. **B.** $\alpha\approx 15^0 62'$. **C.** $\alpha\approx 37^0 45'$. **D.** $\alpha\approx 63^0 72'$.

Câu 19. Cho $S.ABCD$ có đáy hình thang vuông tại A và B, $AD=2a$, $AB=BC=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết SC tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 60^0. Tính góc giữa SD và mặt phẳng (SAC)?

A. $\alpha\approx 24^0 5'$. **B.** $\alpha\approx 34^0 15'$. **C.** $\alpha\approx 73^0 12'$. **D.** $\alpha\approx 62^0 8'$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=2a$, đáy là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC}=60^0$, , $AB=a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) ?

A. $\alpha\approx 76^0 24'$ **B.** $\alpha\approx 44^0 12'$ **C.** $\alpha\approx 63^0 15'$ **D.** $\alpha\approx 73^0 53'$

Câu 21. Cho $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SC tạo đáy góc 45^0, SA vuông góc với đáy. Tính góc giữa (SAB) và (SCD) ?

A. $\alpha\approx 35^0 15'$. **B.** $\alpha\approx 75^0 09'$. **C.** $\alpha\approx 67^0 19'$. **D.** $\alpha\approx 38^0 55'$.

Câu 22. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và (SCD) tạo với mặt phẳng đáy góc 45^0. Tính góc giữa (SBC) và (SCD).

A. $\alpha=74^0 12'$. **B.** $\alpha=42^0 34'$. **C.** $\alpha=30^0$. **D.** $\alpha=60^0$.

Câu 23. Cho $S.ABC$ có SA,SB,SC đôi một vuông góc. Biết rằng $SA=SB=a$, $SC=a\sqrt{2}$. Hỏi góc giữa (SBC) và (ABC) ?

A. $\alpha\approx 50^0 46'$. **B.** $\alpha=63^0 12'$. **C.** $\alpha=34^0 73'$. **D.** $\alpha=42^0 12'$.

Câu 24. Cho $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, SA$ vuông góc mặt phẳng đáy, SC hợp với mặt phẳng đáy góc 45^0 và hợp với (SAB) góc 30^0. Tính góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy?

A. $\alpha = 83^0 81'$. **B.** $\alpha = 79^0 01'$. **C.** $\alpha = 62^0 33'$. **D.** $\alpha \approx 54^0 44'$.

Câu 25. Cho chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 4a$, $AD = 3a$. Các cạnh bên đều có độ dài $5a$. Tính góc giữa (SBC) và $(ABCD)$?

A. $\alpha = 75^0 46'$ **B.** $\alpha = 71^0 21'$ **C.** $\alpha = 68^0 31'$ **D.** $\alpha \approx 65^0 12'$

Câu 26. Khẳng định nào sau đây là khẳng định ***sai*** ?

A. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α).

B. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α).

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.

D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a // (\alpha)$ thì $a \perp d$.

Câu 27. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 28. Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 29. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề ***sai*** ?

A. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

Câu 30. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước là *3, 4, 5* thì độ dài đường chéo của nó là:

A. $5\sqrt{2}$. **B.** 50. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 12.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ vuông ở B. AH là đường cao của $\triangle SAB$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định ***sai*** ?

A. $SA \perp BC$. **B.** $AH \perp BC$. **C.** $AH \perp AC$. **D.** $AH \perp SC$.

Câu 32. Cho điểm A nằm ngoài mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu của A lên (P). M, N là các điểm thay đổi trong (P). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A. Nếu $AM = AN$ thì $HM = HN$. **B.** Nếu $AM > AN$ thì $HM > HN$.

C. Nếu $AM > AN$ thì $HM < HN$. **D.** Nếu $HM > HN$ thì $AM > AN$.

Câu 33. Cho tứ diện *ABCD* có *AB, AC, AD* đôi một vuông gó**C.** Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. Ba mặt phẳng (ABC); (ABD); (ACD) đôi một vuông gó**C.**

B. Tam giác BCD vuông**.**

C. Hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) là trực tâm tam giác BC***D.***

D. Hai cạnh đối của tứ diện vuông góc.

Câu 34. Cho đoạn thẳng *AB* là *(P)* là mặt phẳng trung trực của nó**.** Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A. $MA = MB \Rightarrow M \in (P)$.

B. $MN \subset (P) \Rightarrow MN \perp AB$.

C. $MN \perp AB \Rightarrow MN \subset (P)$.

D. $M \in (P) \Rightarrow MA = MB$.

VẬN DỤNG THẤP

Câu 35. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AC'}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$**.** Chọn đáp án **đúng**:

A. $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

B. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$.

C. $\overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$.

D. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Câu 36. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a**.** Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ có giá trị bằng:

A. a^2.

B. $a\sqrt{2}$.

C. $a^2\sqrt{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$.

Câu 37. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = k\overrightarrow{AC'}$**.** Giá trị của k là:

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Câu 38. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N là trung điểm của các cạnh AC và BD, G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ và O là một điểm bất kỳ trong không gian. Giá trị k thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{OG} = k\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$ là:

A. 4.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. 2..

Câu 39. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, Gọi I là điểm thuộc CC' sao cho $\overrightarrow{C'I} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C'C}$, G là trọng tâm của tứ diện $BA'B'C'$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{IG}$ qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Chọn đáp án ***đúng*** :

A. $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}\right)$.

B. $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}\left(\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - 2\vec{a}\right)$.

D. $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}\right)$..

Câu 40. Cho chóp $S.ABC$ có ΔSAB đều cạnh a, ΔABC vuông cân tại B và $(SAB)\perp(ABC)$. Tính góc giữa SC và (ABC) ?

A. $\alpha = 39^0 12'$. **B.** $\alpha = 46^0 73'$. **C.** $\alpha \approx 35^0 45'$. **D.** $\alpha = 52^0 67'$

Câu 41. Cho chóp $S.ABCD$ có mặt phẳng đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa SB và AC ?

A. $\alpha \approx 69^0 17'$. **B.** $\alpha \approx 72^0 84'$. **C.** $\alpha \approx 84^0 62'$. **D.** $\alpha \approx 27^0 38'$.

Câu 42. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 1$, $AA' = m(m > 0)$. Hỏi m bằng bao nhiêu để góc giữa AB' và BC' bằng 60^0 ?

A. $m = \sqrt{2}$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = \sqrt{3}$. **D.** $m = \sqrt{5}$.

Câu 43. Cho chóp $S.ABCD$ có mặt phẳng đáy là hình vuông cạnh a, ΔSAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa SC và AD ?

A. $\alpha \approx 39^0 22'$. **B.** $\alpha \approx 73^0 45'$. **C.** $\alpha \approx 35^0 15'$. **D.** $\alpha \approx 42^0 24'$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt phẳng đáy hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^0$, SA vuông góc mặt phẳng đáy là $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa (SBC) và $(ABCD)$?

A. $\alpha \approx 33^0 11'$ **B.** $\alpha \approx 14^0 55'$ **C.** $\alpha \approx 62^0 17'$ **D.** $\alpha \approx 26^0 33'$

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt phẳng đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SD. Chọn mệnh đề **đúng :**

A. $SC \perp (AEF)$. **B.** $SC \perp (ADE)$. **C.** $SC \perp (ABF)$. **D.** $SC \perp (AEC)$.

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC). Khi đó khẳng định nào **đúng**?

A. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
B. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
C. H là trọng tâm tam giác ABC.
D. H là trực tâm tam giác ABC.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt phẳng đáy là hình chữ nhật, tam giác SBD đều, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc đường thẳng SB cắt các đường SB, SC lần lượt tại M, N.

1. $MN = \frac{1}{2}BC$.
2. $SA \perp MN$
3. A, D, M, N không đồng phẳng.
4. $(\alpha) \perp (SBC)$.
5. Thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (α) là hình bình hành.

Có bao nhiêu nhận định **sai**?

A. 0 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Câu 48. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cosin của góc giữa hai mặt bên không liền kề nhau.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 49. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cosin của góc giữa hai mặt bên liền kề nhau.

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 50. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi E là trung điểm cạnh SC. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (EBD).

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 51. Cho tam giác cân ABC có đường cao $AH = a\sqrt{3}$, mặt phẳng đáy $BC = 3a$, $BC \subset (P)$, $A \notin (P)$ 0. Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên (P). Tam giác $A'BC$ vuông tại A'. Gọi α là góc giữa (P) và (ABC). Chọn khẳng định **đúng**.

A. $\alpha = 30^0$. **B.** $\alpha = 60^0$. **C.** $\alpha = 45^0$. **D.** $cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 52. Cho tam giác đều ABC cạnh a. d_B, d_C lần lượt là đường thẳng đi qua B, C và vuông góc (ABC). (P) là mặt phẳng đi qua A và hợp với (ABC) một góc bằng 60^o. (P) cắt d_B, d_C tại D và E. $AD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $AE = a\sqrt{3}$. Đặt $\beta = \widehat{DAE}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $\beta = 30^o$. **B.** $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{6}}$. **C.** $\sin\beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\beta = 60^o$.

Câu 53. Cho hình tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với mặt phẳng (BCD). Gọi BE và DF là hai đường cao của tam giác BCD, DK là đường cao của tam giác ACD, bảy điểm A, B, C, D, E, F, K không trùng nhau. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $(ABE) \perp (DFK)$. **B.** $(ADC) \perp (DFK)$.

C. $(ABC) \perp (DFK)$. **D.** $(ABE) \perp (ADC)$.

Câu 54. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là tâm của hình vuông $ABCD$, $AB = a$, $SO = 2a$. Gọi (P) là mặt phẳng qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A. Hình thang vuông.
B. Tam giác cân.
C. Hình thang cân.
D. Hình bình hành.

Câu 55. Cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh có độ dài bằng a, M là trung điểm đoạn CD. Gọi α là góc giữa AC và BM. Chọn khẳng định **đúng?**

A. $\alpha = 30^o$.
B. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
C. $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
D. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I – ĐÁP ÁN 7.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	B	A	D	A	C	A	C	A	A	B	D	A	C	C	A	A	D	A	B

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	A	A	B	D	C	A	D	D	A	C	C	B	C	D	A	D	C	A	A

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55					
B	D	D	C	A	A	C	A	A	D	A	B	A	C	D					

II –HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Trong không gian cho tứ diện đều $ABCD$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***:

A. $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{DC}$. **B.** $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$. **C.** $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải

Tứ diện $ABCD$ là đều nên $\overrightarrow{AD}$ không thể vuông góc với $\overrightarrow{DC}$.

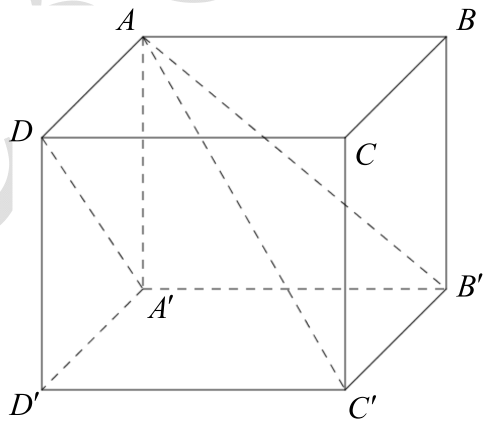
Câu 2. Trong không gian cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó 4 vectơ nào sau đây đồng phẳng?

A. $\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AC'}$. **B.** $\overrightarrow{A'D},\ \overrightarrow{AA'},\ \overrightarrow{A'D'},\ \overrightarrow{DD'}$.

C. $\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AA'}$. **D.** $\overrightarrow{AB'},\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AA'}$.

Hướng dẫn giải

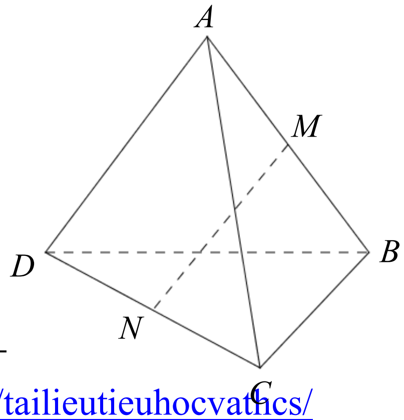
Từ hình vẽ ta thấy các vectơ $\overrightarrow{A'D},\ \overrightarrow{AA'},\ \overrightarrow{A'D'},\ \overrightarrow{DD'}$ cùng thuộc mặt phẳng $(AA'D'D)$.



Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$. M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chọn mệnh đề ***đúng***:

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. **B.** $\overrightarrow{MN} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD})$. **D.** .$\overrightarrow{MN} = 2(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.



Hướng dẫn giải

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \end{cases}$

Cộng vế theo vế hai đẳng thức trên ta có:

$2\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN})$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC})\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$

Câu 4. Trong không gian cho hai đường thẳng a và b lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u},\vec{v}$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng a và b. Khẳng định nào sau đây là ***đúng***:

A. $\alpha=\left|(\vec{u},\vec{v})\right|$.

B. $\cos\alpha=\left|\cos(\vec{u},\vec{v})\right|$.

C. Nếu a và b vuông góc với nhau thì $\vec{u}.\vec{v}=\sin\alpha$.

D. Nếu a và b vuông góc với nhau thì $\vec{u}.\vec{v}=0$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IC'}+\left(2\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{IC}\right)+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{C'B'}\right)+\overrightarrow{C'A'}$. (Theo tính chất tích vô hướng của hai vectơ)

Câu 5. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào ***sai***?

A. Nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ thì bốn điểm A,B,C,D đồng phẳng

B. Tam giác ABC có I là trung điểm cạnh BC thì ta có đẳng thức: $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

C. Vì $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ nên suy ra B là trung điểm của AC

D. Vì $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}$ nên 4 điểm A,B,C,D đồng phẳng.

Hướng dẫn giải

Bằng quy tắc 3 điểm ta nhận thấy rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ đúng với mọi điểm A,B,C,D nằm trong không gian chứ không phải chỉ riêng 4 điểm đồng phẳng.

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Chọn mệnh đề ***đúng***:

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})$.

B. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})$.

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$.

D. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})$.

Hướng dẫn giải

Vì G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên suy ra**:**

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}\right)$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Câu 7. Cho tứ diện đều $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây là ***sai?***

A. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

D. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải

Vì tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều nên có các cặp cạnh đối vuông góc.

Vậy $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

Câu 8. Trong không gian cho 3 vectơ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ không đồng phẳng. Mệnh đề nào sau đây là ***đúng***?

A. Các vectơ $\vec{u}+\vec{v},\ \vec{v},\ \vec{w}$ đồng phẳng.

B. Các vectơ $\vec{u}+\vec{v},\ -2\vec{u},\ 2\vec{w}$ đồng phẳng.

C. Các vectơ $\vec{u}+\vec{v},\ \vec{v},\ 2\vec{w}$ không đồng phẳng.

D. Các vectơ $2\left(\vec{u}+\vec{v}\right),\ -\vec{u},-\vec{v}$ không đồng phẳng.

Hướng dẫn giải

Vì $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ không đồng phẳng nên :

- $\vec{u}+\vec{v},\ \vec{v},\ \vec{w}$ không đồng phẳng,
- $\vec{u}+\vec{v},\ \vec{v},\ 2\vec{w}$ không đồng phẳng.
- $\vec{u}+\vec{v},\ -2\vec{u},\ 2\vec{w}$ không đồng phẳng.

Các vectơ $2\left(\vec{u}+\vec{v}\right),\ -\vec{u},-\vec{v}$ hiển nhiên là đồng phẳng.

Câu 9. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{w}$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$. Chọn đáp án ***đúng:***

A. $\overrightarrow{BC'}=\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$.

B. $\overrightarrow{BC'}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.

C. $\overrightarrow{BC'}=\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$.

D. $\overrightarrow{BC'}=\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}=-\vec{v}+\vec{w}+\vec{u}=\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$

Câu 10. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. Nếu $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AD}$ thì 4 điểm A,B,C,D đồng phẳng.

B. $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

C. Nếu $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm của AC.

D. Cho $d\subset(\alpha)$ và $d'\subset(\beta)$. Nếu mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau thì hai đường thẳng d và d' cũng vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AD}$ thỏa mãn biểu thức $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ (với m,n là duy nhất) của định lý về các vectơ đồng phẳng.

Câu 11. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}, \overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$.
B. $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

C. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$.
D. $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$.

Hướng dẫn giải

Cần lưu ý tính chất M là trung điểm của thì $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}$.

Khi đó:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}=-\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}.$$

Câu 12. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là:

A. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.
B. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.
D. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

Hướng dẫn giải

Để A, B, C, D tạo thành hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ hoặc $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.
Khi đó

- $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$: O là trọng tâm của tứ giác (hoặc tứ diện) $ABCD$. (Loại)
- $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ (Loại)
- $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ (Loại)

Câu 13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$; $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$; $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{b}$.
B. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

C. $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$.
D. $\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{b}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$, khi đó $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$. Vậy $\vec{a}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{b}$.

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d}\right)$.
B. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$.
D. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b}\right)$.

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$.

Câu 15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'}=\vec{u}$, $\overrightarrow{CA'}=\vec{v}$, $\overrightarrow{BD'}=\vec{x}$, $\overrightarrow{DB'}=\vec{y}$. Chọn khẳng định **đúng**?

A. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

B. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

C. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

D. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

Hướng dẫn giải

Do I là tâm hình bình hành $ABCD$ nên

$4\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{D'B}+\overrightarrow{A'C}+\overrightarrow{B'D}\right)$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{BD'}+\overrightarrow{CA'}+\overrightarrow{DB'}\right)$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$

Câu 16. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a\sqrt{6}$. Tính góc α giữa đường SC và mặt phẳng (SAD)?

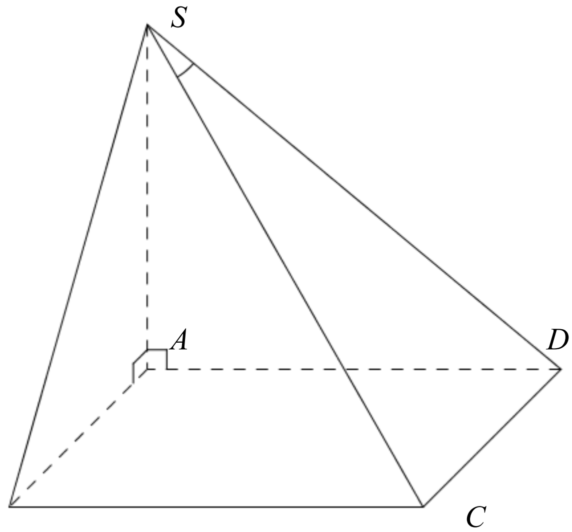
A. $\alpha\approx 20^0 42'$.

B. $\alpha\approx 20^0 70'$.

C. $\alpha\approx 69^0 17'$.

D. $\alpha\approx 69^0 30'$.

Hướng dẫn giải



Ta có $\begin{cases} CD\perp AD \\ CD\perp SA \end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAD)$. Tức D là hình chiếu vuông góc của C lên (SAD)

$\Rightarrow$ Góc giữa SC và (SAD) là $\widehat{CSD}$.

$SD=\sqrt{SA^2+AD^2}=a\sqrt{7}$;

$\tan\widehat{CSD}=\frac{CD}{SD}=\frac{1}{\sqrt{7}}\Rightarrow\widehat{CSD}\approx 20^0 42'$

Câu 17. Cho $S.ABC$ có (SAC) và (SAB) cùng vuông góc với đáy, ΔABC đều cạnh a, $SA=2a$ Tính góc α giữa SB và (SAC) ?

A. $\alpha\approx 22^0 47'$.

B. $\alpha\approx 22^0 79'$.

C. $\alpha\approx 37^0 45'$.

D. $\alpha\approx 67^0 12$.

Hướng dẫn giải

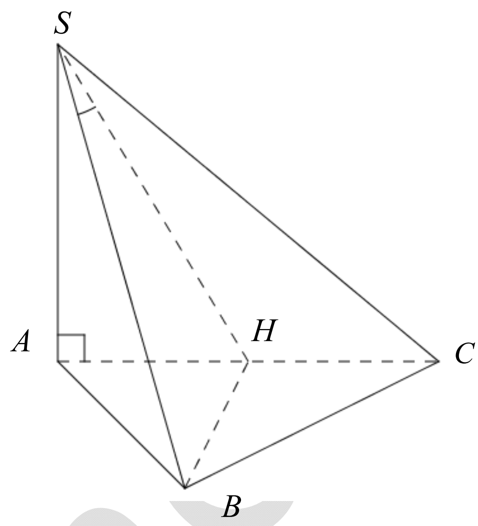
Lấy H là trung điểm AC. Dễ chứng minh $BH \perp (SAC)$

suy ra H là hình chiếu vuông góc của B lên (SAC).

$\Rightarrow$ Góc giữa SB và (SAC) là góc $\widehat{BSH}$.

$SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}; BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \tan \widehat{BSH} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}} \Rightarrow \alpha \approx 22^0 47'$



Câu 18. Cho ΔSAB đều và hình vuông $ABCD$ nằm trong 2 mặt phẳng vuông góc nhau. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$?

A. $\alpha \approx 18^0 35'$.
B. $\alpha \approx 15^0 62'$.
C. $\alpha \approx 37^0 45'$.
D. $\alpha \approx 63^0 72'$.

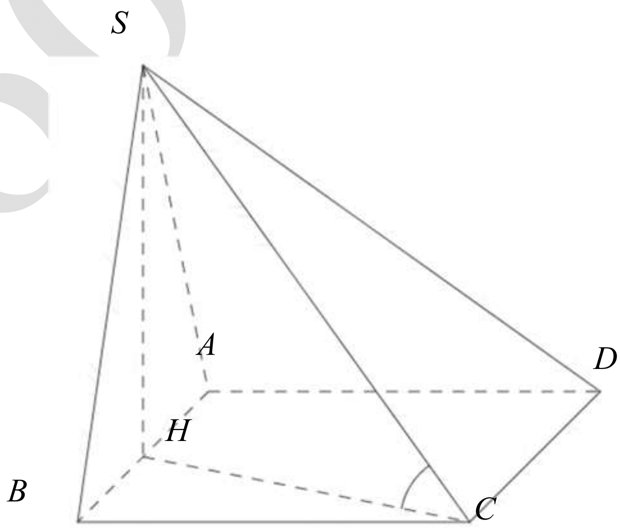
Hướng dẫn giải

Lấy H là trung điểm AB khi đó $SH \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow$ Góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCH}$.

$SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, CH = \sqrt{HB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \tan \widehat{SCH} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 37^0 45'$



Câu 19. Cho $S.ABCD$ có đáy hình thang vuông tại A và B, $AD = 2a$, $AB = BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết SC tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 60^0. Tính góc giữa SD và mặt phẳng (SAC)?

A. $\alpha \approx 24^0 5'$.
B. $\alpha \approx 34^0 15'$.
C. $\alpha \approx 73^0 12'$.
D. $\alpha \approx 62^0 8'$.

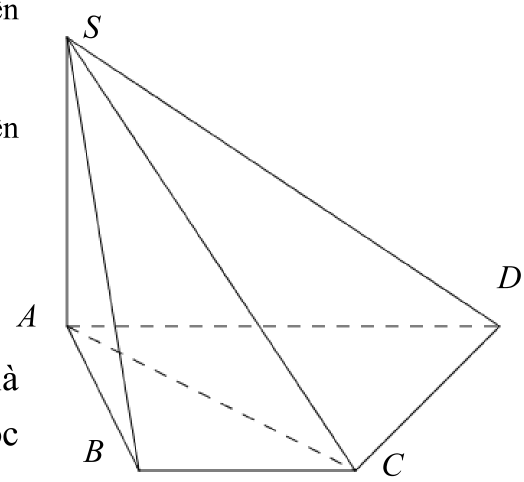
Hướng dẫn giải

Dễ chứng minh $DC \perp AC$ và $DC \perp SA$ nên $DC \perp (SAC)$, vậy góc giữa SD và (SAC) là $\widehat{DSC}$.

Dễ thấy góc giữa SC tạo mặt phẳng đáy là góc $\widehat{SCA}$ nên $\widehat{SCA} = 60^0$.

$SA = a\sqrt{6}, SD = a\sqrt{10}, CD = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow \tan\widehat{DSC} = \dfrac{CD}{SD} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 24^0 5'$



Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 2a$, đáy là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 60^0$, , $AB = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) ?

A. $\alpha \approx 76^0 24'$ **B.** $\alpha \approx 44^0 12'$

C. $\alpha \approx 63^0 15'$ **D.** $\alpha \approx 73^0 53'$

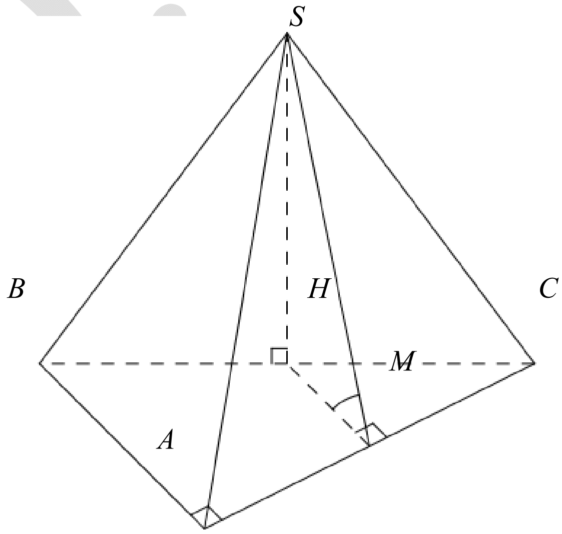
Hướng dẫn giải

Từ giải thiết có . $SA = SB = SC = 2a$, nếu ta hạ $SH \perp (ABC)$ thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow H$ là trung điểm BC.

Ta có: $\begin{cases} (SAC) \cap (ABC) = AC \\ AC \perp (SHM) \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa (SAC) và (ABC) là $\widehat{SMH}$.

$HM = \dfrac{a}{2}, SH = a\sqrt{3} \quad \Rightarrow \tan\widehat{SMH} = \dfrac{SH}{MH} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{SMH} \approx 73^0 53'$



Câu 21. Cho $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SC tạo đáy góc 45^0, SA vuông góc với đáy. Tính góc giữa (SAB) và (SCD) ?

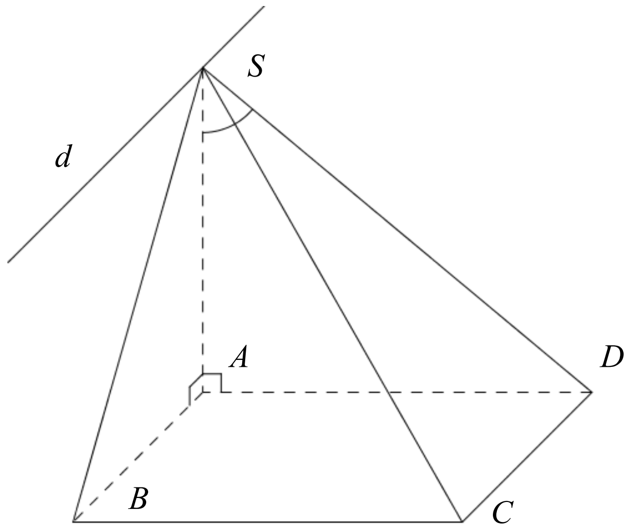
A. $\alpha \approx 35^0 15'$. **B.** $\alpha \approx 75^0 09'$.

C. $\alpha \approx 67^0 19'$. **D.** $\alpha \approx 38^0 55'$.

Hướng dẫn giải

Ta thấy giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường d qua S và song song với AB.
Dễ chứng minh $d \perp (SAD)$ nên góc giữa (SAB) và (SCD) là $\widehat{DSA}$.
Ta dễ thấy góc giữa SC và mặt phẳng đáy là góc $\widehat{SCA} = 45^0$.Từ đó dễ dàng tính được $SA = AC = a\sqrt{2}, AD = a$.

$\Rightarrow \tan \widehat{DSA} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha \approx 35^0 15'$.



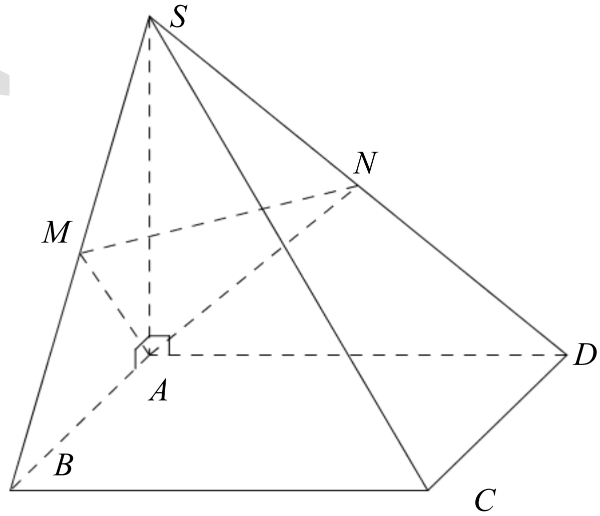
Câu 22. Cho chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và (SCD) tạo với mặt phẳng đáy góc 45^0. Tính góc giữa (SBC) và (SCD).

A. $\alpha = 74^0 12'$. **B.** $\alpha = 42^0 34'$.
C. $\alpha = 30^0$. **D.** $\alpha = 60^0$.

Hướng dẫn giải

Dễ chứng minh được góc giữa (SCD) và đáy là $\widehat{SDA} = 45^0$ nên $SA = a$
Lấy M, N là trung điểm SB, SD. Dễ chứng minh $AN \perp (SCD)$, $AM \perp (SBC)$ suy ra góc giữa (SBC) và (SCD) là góc giữa AN, AM.

$AM = AN = MN = \dfrac{DB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{MAN} = 60^0$.



Câu 23. Cho $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc. Biết rằng $SA = SB = a$, $SC = a\sqrt{2}$. Hỏi góc giữa (SBC) và (ABC) ?

A. $\alpha \approx 50^0 46'$. **B.** $\alpha = 63^0 12'$.
C. $\alpha = 34^0 73'$. **D.** $\alpha = 42^0 12'$.

Hướng dẫn giải

Hạ $SH \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow$ Góc giữa (SBC) và (ABC) là $\widehat{SHA}$.

$SH = \dfrac{SB.SC}{BC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \tan \widehat{SHA} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \alpha \approx 50^0 46'$.

Câu 24. Cho $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, SA$ vuông góc mặt phẳng đáy, SC hợp với mặt phẳng đáy góc 45^0 và hợp với (SAB) góc 30^0. Tính góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy?

A. $\alpha = 83^0 81'$. **B.** $\alpha = 79^0 01'$.

C. $\alpha = 62^0 33'$. **D.** $\alpha \approx 54^0 44'$.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy rằng $\widehat{SCA} = 45^0, \widehat{BSC} = 30^0$.

$\Rightarrow SA = \sqrt{x^2 + a^2}$

$\Delta SBA \Rightarrow SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{x^2 + 2a^2}$

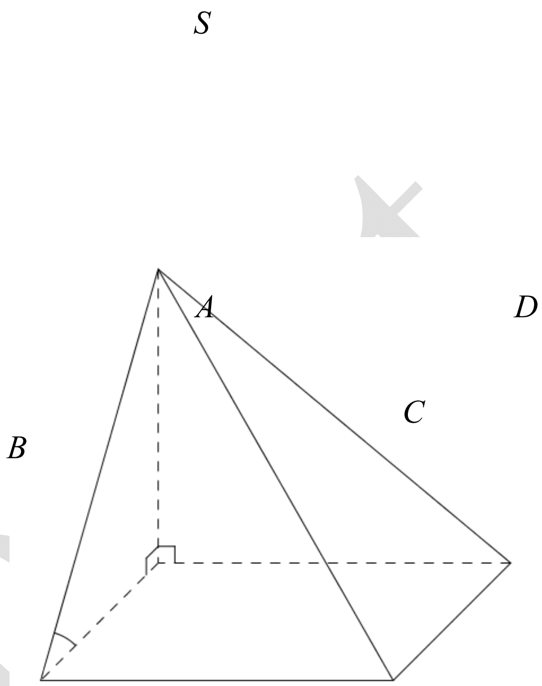
$\Delta SBC \Rightarrow SB.\tan 30^0 = BC$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2a^2} = \sqrt{3}.x \Leftrightarrow x = a$

$BC = x \Rightarrow AC = \sqrt{x^2 + a^2}$

$\Rightarrow SA = a\sqrt{2}$.

Xét ΔSAB có $\tan \widehat{SBA} = \sqrt{2}$ nên $\alpha \approx 54^0 44'$.



Câu 25. Cho chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 4a$, $AD = 3a$. Các cạnh bên đều có độ dài $5a$. Tính góc giữa (SBC) và $(ABCD)$?

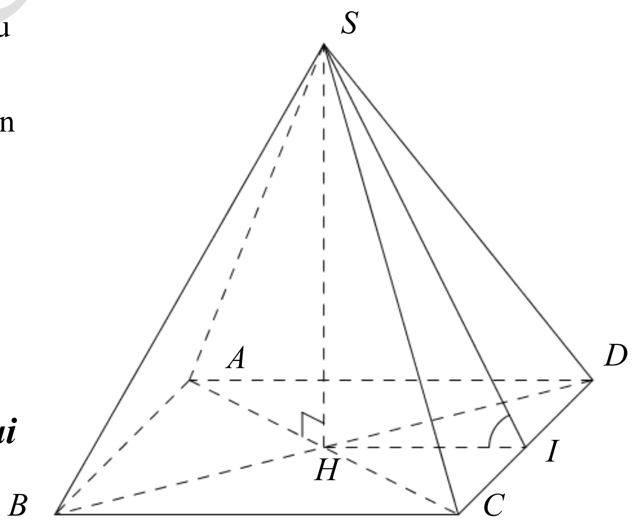
A. $\alpha = 75^0 46'$ **B.** $\alpha = 71^0 21'$ **C.** $\alpha = 68^0 31'$ **D.** $\alpha \approx 65^0 12'$

Hướng dẫn giải

Hạ $SH \perp (ABCD)$. Do các cạnh bên bằng nhau nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp của đáy, tức H là tâm đáy. Lấy I là trung điểm BC nên góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là $\widehat{SIH}$.

$IH = 2a,\ SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \dfrac{5a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow \tan \widehat{SIH} = \dfrac{5\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \alpha \approx 65^0 12'$.



Câu 26. Khẳng định nào sau đây là khẳng định ***sai*** ?

A. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α).

B. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α).

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.

D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a // (\alpha)$ thì $a \perp d$.

Hướng dẫn giải:

- Đường thẳng d có thể vuông góc với hai đường thẳng song song nằm trên mặt phẳng (α) nên đáp án này **sai.**
- Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì lúc đó nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) nên nó vuông góc với hai đường thẳng thì hiển nhiên **đúng.**
- đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (α) thì nó sẽ vuông góc với mặt phẳng (α) và do đó d vuông với mọi đường thẳng nằm trong (α) là hiển nhiên **đúng.**
- Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì d song song hoặc trùng với giá của véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) do đó nếu đường thẳng $a//(\alpha)$ thì $a\perp d$ là **đúng.**

Câu 27. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Qua điểm O có vô số đường thẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước chúng nằm trong mặt phẳng qua O và vuông góc với đường thẳng Δ.

Câu 28. Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải:

Qua điểm O cho trước có duy nhất một mặt phẳng đi qua O và vuông góc với một đường thẳng cho trước

Câu 29. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề ***sai*** ?

A. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

Hướng dẫn giải:

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song **nếu hai đường thẳng này đồng phẳng.** Trong trường hợp không đồng phẳng chúng có thể chéo nhau trong không gian.

Các đáp án khác đều đúng hiển nhiên

Câu 30. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước là *3, 4, 5* thì độ dài đường chéo của nó là:

A. $5\sqrt{2}$. **B.** 50. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 12.

Hướng dẫn giải:

Độ dài đường chéo của hình hộp là $\sqrt{3^2+4^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

Vậy đáp án đúng là $5\sqrt{2}$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABC)$ và $\triangle ABC$ vuông ở B. AH là đường cao của $\triangle SAB$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định ***sai*** ?

A. $SA\perp BC$. **B.** $AH\perp BC$. **C.** $AH\perp AC$. **D.** $AH\perp SC$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $SA\perp(ABC)$ nên $SA\perp BC$.

Mà $\triangle ABC$ vuông tại *B*: $AB\perp BC$.

$\begin{cases} SA\perp BC \\ AB\perp BC \end{cases}\Rightarrow BC\perp AH\subset(SAB)$; $\begin{cases} AH\perp BC \\ AH\perp SB \end{cases}\Rightarrow AH\perp SC\subset(SBC)$.

Nếu $\begin{cases} AH\perp AC \\ SA\perp AC \end{cases}\Rightarrow AC\perp AB\subset(SAB)$ thì $\triangle ABC$ vuông tại *A* (Vô lý).

Vậy $AH\perp AC$ là **sai.**

Câu 32. Cho điểm *A* nằm ngoài mặt phẳng (P). Gọi *H* là hình chiếu của *A* lên (P). *M, N* là các điểm thay đổi trong (P). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A. Nếu $AM=AN$ thì $HM=HN$.

B. Nếu $AM>AN$ thì $HM>HN$.

C. Nếu $AM>AN$ thì $HM<HN$.

D. Nếu $HM>HN$ thì $AM>AN$.

Hướng dẫn giải

Theo tính chất mối liên hệ giữa đường xiên (AM,AN) và hình chiếu (HM,HN). Đường xiên dài hơn có hình chiếu dài hơn và ngược lại. Mệnh đề **sai** là "Nếu $AM>AN$ thì $HM<HN$".

Câu 33. Cho tứ diện *ABCD* có *AB, AC, AD* đôi một vuông gó**C.** Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. Ba mặt phẳng (ABC); (ABD); (ACD) đôi một vuông gó**C.**

B. Tam giác *BCD* vuông.

C. Hình chiếu của *A* lên mặt phẳng (BCD) là trực tâm tam giác *BC**D.***

D. Hai cạnh đối của tứ diện vuông góc.

Hướng dẫn giải:

- Theo giả thiết ba đoạn thẳng *AB, AC, AD* đôi một vuông góc nên $AB\perp(ACD)$; $AC\perp(ABD)$; $AD\perp(ABC)$ do đó ba mặt phẳng (ABC); (ABD); (ACD) đôi một vuông góc.
- Gọi *H* là hình chiếu của *A* trên (BCD). $AH\perp(BCD)$

$\mathrm{AH}\perp(\mathrm{BCD})\Rightarrow\mathrm{AH}\perp\mathrm{CD}\Rightarrow\mathrm{CD}\perp(\mathrm{ABH})\Rightarrow\mathrm{CD}\perp\mathrm{BH}$

Tương tự $AH \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow CD \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp DH$

Do đó H là trực tâm của tam giác BCD.

- Theo giả thiết ba đoạn thẳng *AB, AC, AD* đôi một vuông góc nên

$AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp CD$

$AC \perp (ABC) \Rightarrow AC \perp BD$

$AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp BC$

Vậy hai cạnh đối của tứ diện vuông góc.

- Vậy tam giác *BCD* vuông là **sai**.

Câu 34. Cho đoạn thẳng *AB* là *(P)* là mặt phẳng trung trực của nó**.** Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A. $MA = MB \Rightarrow M \in (P)$. **B.** $MN \subset (P) \Rightarrow MN \perp AB$.

C. $MN \perp AB \Rightarrow MN \subset (P)$. **D.** $M \in (P) \Rightarrow MA = MB$.

Hướng dẫn giải:

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB* là tập hợp các điểm trong không gian cách đều 2 điểm *A* và *B* $\Rightarrow$ Nếu $M \in (P) \Rightarrow MA = MB$

Mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của AB $\Rightarrow AB \perp (P)$ do đó Nếu $MN \subset (P) \Rightarrow MN \perp AB$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB* là tập hợp các điểm trong không gian cách đều 2 điểm *A* và *B* $\Rightarrow$ Nếu $MA = MB \Rightarrow M \in (P)$.

Nếu $MN \perp AB \Rightarrow MN \subset (P)$ là sai vì *MN* có thể là đoạn thẳng đi qua *A* và vuông góc với *AB* lúc đó $MN // (P)$.

VẬN DỤNG THẤP

Câu 35. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AC'}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$**.** Chọn đáp án **đúng**:

A. $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. **B.** $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$.

C. $\overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AA'} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Hướng dẫn giải

Lưu ý phép cộng vectơ đối với hình vuông $ABCD$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Ta có: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Câu 36. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a**.** Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ có giá trị bằng:

A. a^2. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a^2\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}a^2}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\left(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\widehat{BAC}=45°$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{A'C'}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{AB}\right)=a.a.1=a^2$

Câu 37. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}=k\overrightarrow{AC'}$. Giá trị của k là:

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}$. Vậy $k=1$.

Câu 38. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M,N là trung điểm của các cạnh AC và BD, G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ và O là một điểm bất kỳ trong không gian. Giá trị k thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{OG}=k\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$ là:

A. 4. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 2..

Hướng dẫn giải

Vì G là trọng tâm tứ diện nên:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OD}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

Vậy $k=\dfrac{1}{4}$.

Câu 39. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, Gọi I là điểm thuộc CC' sao cho $\overrightarrow{C'I}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{C'C}$, G là trọng tâm của tứ diện $BA'B'C'$. Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{IG}$ qua các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Chọn đáp án ***đúng*** :

A. $\overrightarrow{IG}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$. **B.** $\overrightarrow{IG}=\dfrac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{IG}=\dfrac{1}{4}\left(\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}-2\vec{a}\right)$. **D.** $\overrightarrow{IG}=\dfrac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}\right)$..

Hướng dẫn giải

Ta có: G là trọng tâm của tứ diện $BA'B'C'$ nên :

$4\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}+\overrightarrow{IC'}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG}=\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{C'A'}\right)+\left(\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{C'B'}\right)+\overrightarrow{IC'}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IC'}+\left(2\overrightarrow{IC'}+\overrightarrow{IC}\right)+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{C'B'}\right)+\overrightarrow{C'A'}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CC'}+\vec{0}+2\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}+2\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\vec{a}+2\left(\vec{b}-\vec{c}\right)-\vec{c}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IG}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}\right)$

Câu 40. Cho chóp $S.ABC$ có ΔSAB đều cạnh a, ΔABC vuông cân tại B và $(SAB)\perp(ABC)$. Tính góc giữa SC và (ABC) ?

A. $\alpha=39^0 12'$. **B.** $\alpha=46^0 73'$. **C.** $\alpha\approx 35^0 45'$. **D.** $\alpha=52^0 67'$

Hướng dẫn giải

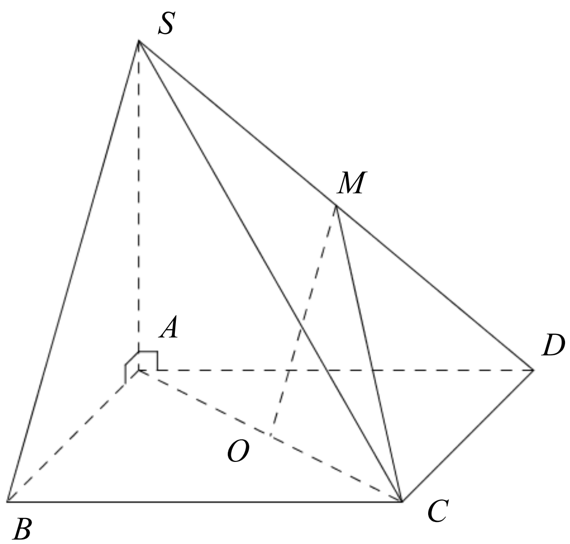
Lấy H là trung điểm AB. Dễ thấy $SH\perp(ABC)$ nên CH là hình chiếu vuông góc của SC lên (ABC). Góc giữa SC và (ABC) là $\widehat{SCH}$.

$SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}, HC=\frac{a\sqrt{5}}{2}\Rightarrow \tan\widehat{SCH}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\Rightarrow \alpha\approx 35^0 45'$.

Câu 41. Cho chóp $S.ABCD$ có mặt phẳng đáy là hình vuông cạnh a, $SA=a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa SB và AC ?

A. $\alpha\approx 69^0 17'$. **B.** $\alpha\approx 72^0 84'$. **C.** $\alpha\approx 84^0 62'$. **D.** $\alpha\approx 27^0 38'$.

Hướng dẫn giải



Lấy M là trung điểm SD. Khi đó góc cần tìm là góc giữa OM và OC.

Ta có MC là trung tuyến $\Delta SCD\Rightarrow MC^2=\frac{SC^2+DC^2}{2}-\frac{SD^2}{4}=2a^2$

$\Rightarrow MC=a\sqrt{2}$

Xét ΔMOC có :

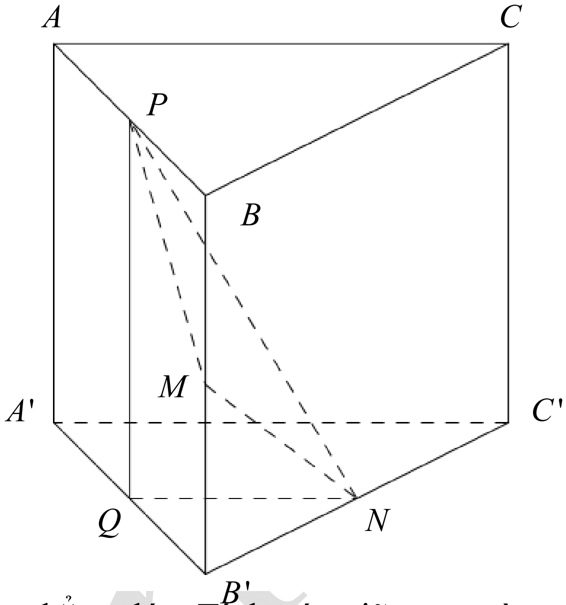
$\cos\widehat{MOC}=\frac{MO^2+OC^2-MC^2}{2.MO.OC}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \alpha\approx 69^0 17'$

Câu 42. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=1$, $AA'=m\left(m>0\right)$. Hỏi m bằng bao nhiêu để góc giữa AB' và BC' bằng 60^0 ?

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\sqrt{3}$. **D.** $m=\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải



Lấy M, N, P là trung điểm $BB', B'C', AB$ khi đó $MP//AB', MN//BC'$.

Suy ra góc cần tìm là góc giữa MP, MN.

$MP = MN = \dfrac{\sqrt{m^2+1}}{2}$. Lấy Q là trung điểm $A'B'$.

$\Rightarrow PN = \sqrt{PQ^2 + QN^2} = \sqrt{m^2 + \dfrac{1}{4}}$.

Suy ra $\cos\widehat{PMN} = \dfrac{PM^2 + MN^2 - PN^2}{2.PM.MN} = \pm\dfrac{1}{2}$, từ đó tính được $m = \sqrt{2}$.

Câu 43. Cho chóp $S.ABCD$ có mặt phẳng đáy là hình vuông cạnh a, ΔSAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa SC và AD ?

A. $\alpha \approx 39^0 22'$. **B.** $\alpha \approx 73^0 45'$. **C.** $\alpha \approx 35^0 15'$. **D.** $\alpha \approx 42^0 24'$.

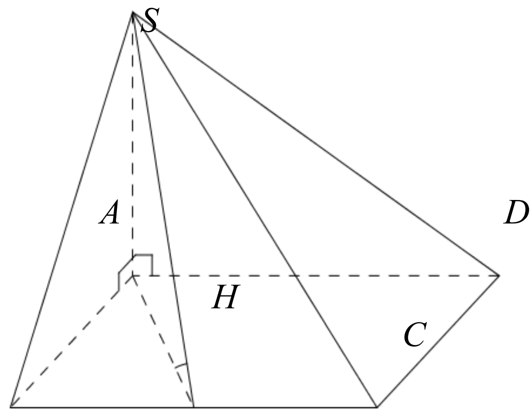
Hướng dẫn giải

Ta có $BC//AD$ nên góc giữa SC và AD là góc giữa SC và BC, vậy góc cần tìm là $\widehat{SCB}$. Dễ chứng minh ΔSBC vuông tại B nên $\tan\widehat{SCB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha \approx 35^0 15'$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt phẳng đáy hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^0$, SA vuông góc mặt phẳng đáy là $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa (SBC) và $(ABCD)$?

A. $\alpha \approx 33^0 11'$ **B.** $\alpha \approx 14^0 55'$ **C.** $\alpha \approx 62^0 17'$ **D.** $\alpha \approx 26^0 33'$

Hướng dẫn giải



Lấy H là trung điểm BC. Do $\widehat{ABC} = 60^0$ nên ΔABC đều. Dễ chứng minh $BC \perp (SAH) \Rightarrow$ Góc cần tìm là $\widehat{SHA}$.

$AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, SA = a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow \tan\widehat{SHA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SHA} \approx 26^0 33'$.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt phẳng đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SD. Chọn mệnh đề **đúng :**

A. $SC \perp (AEF)$. **B.** $SC \perp (ADE)$.

C. $SC \perp (ABF)$. **D.** $SC \perp (AEC)$.

Hướng dẫn giải

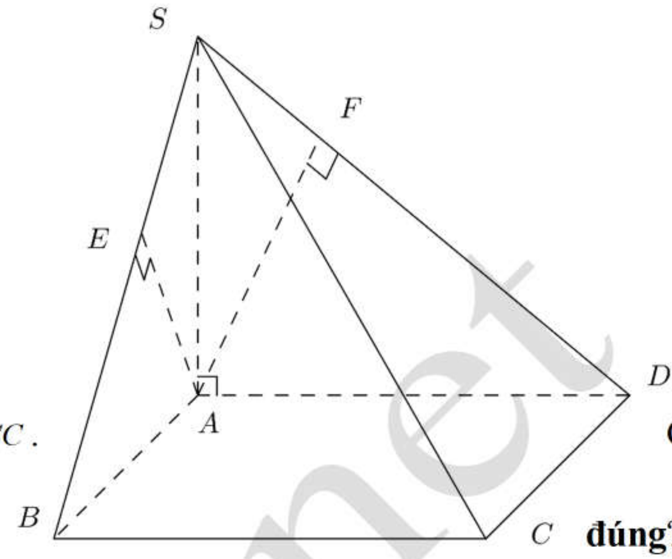
$\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ BC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow BC \perp SA$;

$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp AE$;

$\begin{cases} AE \perp BC \\ AE \perp SB \end{cases} \Rightarrow AE \perp SC$

Tương tự ta cũng có $AF \perp SC$.

Vậy $SC \perp (AEF)$.



Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC). Khi đó khẳng định nào **đúng**?

A. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

B. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

C. H là trọng tâm tam giác ABC.

D. H là trực tâm tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Do $SA = SB = SC$ nên hình chiếu vuông góc của SA, SB, SC lên mặt phẳng (ABC) lần lượt là HA, HB, HC thỏa $HA = HB = HC$. Vậy H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt phẳng đáy là hình chữ nhật, tam giác SBD đều, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc đường thẳng SB cắt các đường SB, SC lần lượt tại M, N.

1. $MN = \frac{1}{2}BC$.

2. $SA \perp MN$

3. A, D, M, N không đồng phẳng.

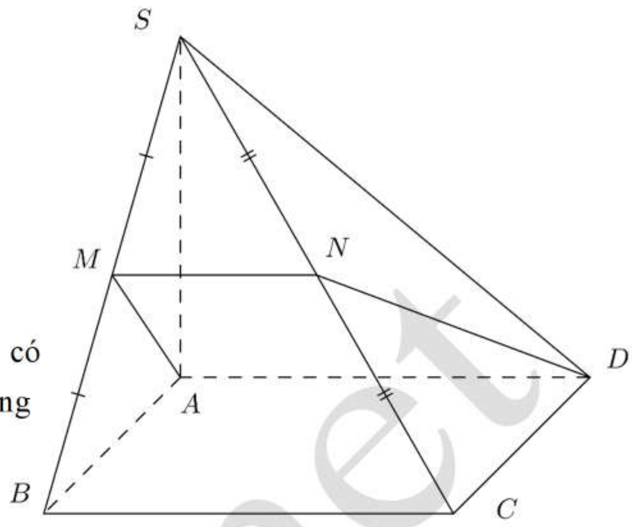
4. $(\alpha) \perp (SBC)$.

5. Thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (α) là hình bình hành.

Có bao nhiêu nhận định **sai**?

A. 0 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Hướng dẫn giải



Do tam giác SBD đều nên $SB = SD = BD$

$\Leftrightarrow \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{AB^2 + AD^2}$

$\Leftrightarrow SA = AB = AD$

$\Rightarrow$ ΔSAB vuông cân tại A.

$\begin{cases} (\alpha) \perp SB \\ (\alpha) \cap SB = M \end{cases} \Rightarrow$ M là trung điểm SB.

ΔSBC vuông tại B có $MN \subset (\alpha) \perp SB \Rightarrow MN \perp SB$. Vậy MN là đường trung bình tam giác ΔSBC $\left(MN \parallel BC, MN = \frac{1}{2}BC \right)$.

$\begin{cases} MN // BC \\ SA \perp (ABCD) \supset BC \end{cases} \Rightarrow MN \perp SA$

$MN // BC // AD \Rightarrow$ bốn điểm A, D, M, N đồng phẳng. Thiết diện được tạo thành là hình thang vuông $ADNM$.

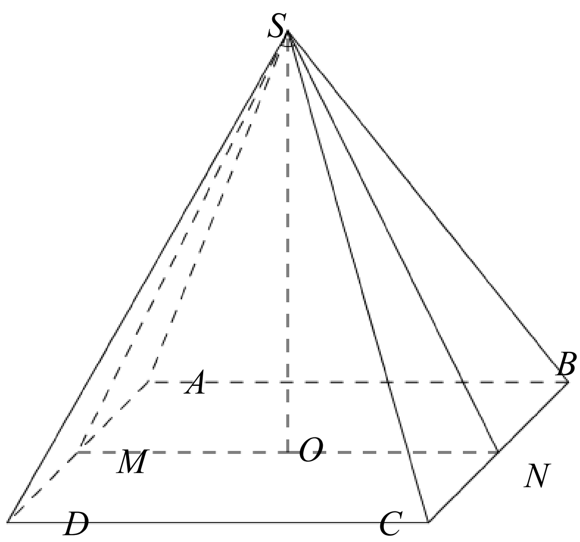
$(\alpha) \equiv (AMN) \cap (SBC) = MN$ có $(\alpha) \supset AM \perp MN$ nên $(\alpha) \perp (SBC)$

Vậy có 2 nhận định **sai**.

Câu 48. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cosin của góc giữa hai mặt bên không liền kề nhau.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải



Gọi M, N là trung điểm các cạnh AD và BC, $SM \perp AD$ và $SN \perp BC$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng d qua S và song song AD, BC.

Vì $SM \perp AD$ và $SN \perp BC$ nên $SM \perp d$ và $SN \perp d$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là góc $\widehat{MSN}$.

Mặt bên là các tam giác đều cạnh a nên $SM = SN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $MN = AB = a$.

Khi đó : $\cos \widehat{MSN} = \frac{SM^2 + SN^2 - MN^2}{2SM.SN} = \frac{1}{3}$.

Câu 49. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính cosin của góc giữa hai mặt bên liền kề nhau.

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

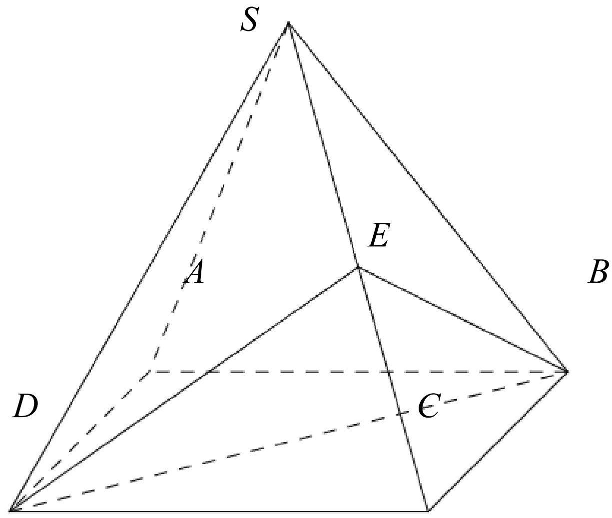
Hướng dẫn giải

Gọi E là trung điểm các cạnh SC, $AC \perp DE$ và $SC \perp BE$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (SBC) là đường thẳng SC.

Vì $AC \perp DE$ và $SC \perp BE$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC) là góc $\widehat{BED}$.

Mặt bên là các tam giác đều cạnh a nên $DE = BE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $BD = \sqrt{2AB^2} = a\sqrt{2}$.

Khi đó : $\cos\widehat{MSN} = \frac{BE^2 + DE^2 - BD^2}{2BE.DE} = -\frac{1}{3}$.



Câu 50. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi E là trung điểm cạnh SC. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (EBD).

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Gọi O là trung điểm cạnh BD. Theo tính chất hình chóp đều $SO \perp BD$.

Mặt bên là các tam giác đều cạnh a nên $DE = BE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $BD = \sqrt{2AB^2} = a\sqrt{2}$.

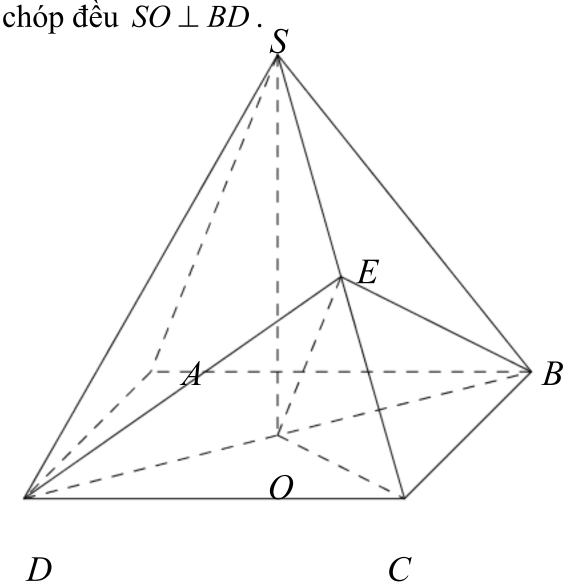
Nên tam giác EBD cân tại E, $EO \perp BD$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (EBD) là góc $\widehat{SOE}$

$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

$OE = \sqrt{BE^2 - BO^2} = \frac{a}{2}$.

$\cos\widehat{SOE} = \frac{SO^2 + OE^2 - SE^2}{2SO.OE} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$



Câu 51. Cho tam giác cân ABC có đường cao $AH = a\sqrt{3}$, mặt phẳng đáy $BC = 3a$, $BC \subset (P)$, $A \notin (P)$ 0. Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên (P). Tam giác $A'BC$ vuông tại A'. Gọi α là góc giữa (P) và (ABC). Chọn khẳng định **đúng**.

A. $\alpha = 30^0$. **B.** $\alpha = 60^0$. **C.** $\alpha = 45^0$. **D.** $cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Tam giác ABC có hình chiếu vuông góc lên (P) là tam giác $A'BC$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. $AB = AC$ và lần lượt có hình chiếu vuông góc lên (P) là $A'B$ và $A'C$ nên $A'B = A'C$. Vậy tam giác $A'BC$ vuông cân tại A'. $S'_{A'BC} = \frac{1}{4}BC^2 = \frac{9a^2}{4}$

$\cos\alpha = \frac{S_{A'BC}}{S_{ABC}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^o$

Câu 52. Cho tam giác đều ABC cạnh a. d_B, d_C lần lượt là đường thẳng đi qua B, C và vuông góc (ABC). (P) là mặt phẳng đi qua A và hợp với (ABC) một góc bằng 60^o. (P) cắt d_B, d_C tại D và E. $AD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $AE = a\sqrt{3}$. Đặt $\beta = \widehat{DAE}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $\beta = 30^o$. **B.** $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{6}}$. **C.** $\sin\beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\beta = 60^o$.

Hướng dẫn giải

Tam giác ADE có hình chiếu vuông góc lên (ABC) là tam giác ABC nên :

$\cos 60^o = \frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}, S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Mặt khác $S_{ADE} = \frac{1}{2}AD.AE\sin\widehat{DAE} = \frac{1}{2}AD.AE\sin\beta$.

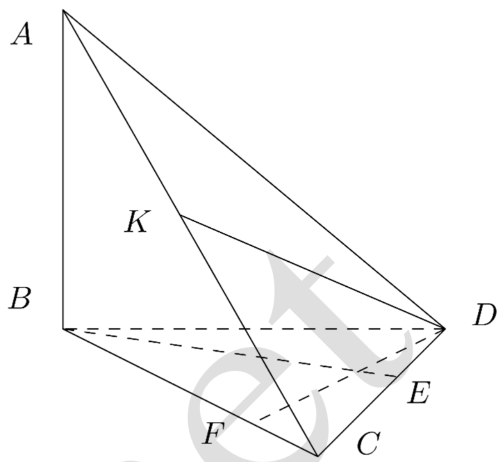
Vậy : $\sin\beta = \frac{2S_{ADE}}{AD.AE} = \frac{2\frac{S_{ABC}}{\cos 60^0}}{AD.AE} = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

Câu 53. Cho hình tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với mặt phẳng (BCD). Gọi BE và DF là hai đường cao của tam giác BCD, DK là đường cao của tam giác ACD, bảy điểm A, B, C, D, E, F, K không trùng nhau. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $(ABE) \perp (DFK)$. **B.** $(ADC) \perp (DFK)$.

C. $(ABC) \perp (DFK)$. **D.** $(ABE) \perp (ADC)$.

Hướng dẫn giải



$\begin{cases} CD \perp BE \\ CD \perp AB \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABE) \Rightarrow (ABE) \perp (ACD)$

- $\begin{cases} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{cases} \Rightarrow DF \perp (ABC) \Rightarrow (ABC) \perp (DFK)$
- $DF \perp (ABC) \Rightarrow DF \perp AC$;

$\begin{cases} DF \perp AC \\ DK \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (DFK) \Rightarrow (ACD) \perp (DFK)$

- $\begin{cases} (ABE) \perp (DFK) \\ (ABC) \perp (DFK) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (DFK) \Rightarrow AB \perp DK$

$\begin{cases} DK \perp AB \\ DK \perp AC \end{cases} \Rightarrow DK \perp (ABC)$

$\begin{cases} DK \perp (ABC) \\ DF \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow DF // DK$ hoặc $DF \equiv DK$ (vô lý)

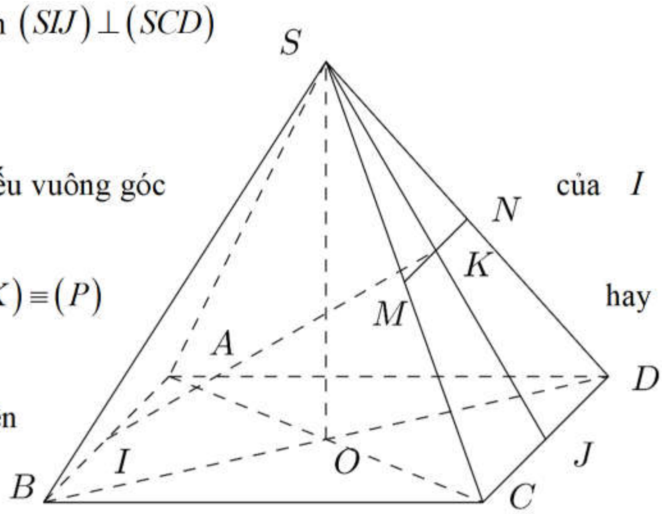
Vậy $(ABE) \perp (DFK)$ là khẳng định **sai**.

Câu 54. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là tâm của hình vuông $ABCD$, $AB = a$, $SO = 2a$. Gọi (P) là mặt phẳng qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD). Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A. Hình thang vuông. **B.** Tam giác cân.

C. Hình thang cân. **D.** Hình bình hành.

Hướng dẫn giải



Gọi I, J là trung điểm AB, CD. Hiển nhiên $(SIJ) \perp (SCD)$

Khi đó $\cos \widehat{SIJ} = \dfrac{IO}{SI} = \dfrac{IO}{\sqrt{IO^2 + SO^2}} = \dfrac{\sqrt{17}}{17} > 0$

nên góc $\angle SIJ$ là góc nhọn. Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên (SCD) thì K nằm trên đoạn SJ.

Do cách xác định K, $IK \perp (SCD)$, nên $(AB; IK) \equiv (P)$ hay (P) chính là (ABK).

Gọi $(P) \cap (SCD) = MN$ khi đó M, N nằm trên đoạn SC, SD.

Khi đó : $AB \subset (P)$, $CD \subset (SCD)$, $AB // CD$

$\Rightarrow MN // AB // \text{CD}$ nên thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là hình là hình thang $ABMN$.

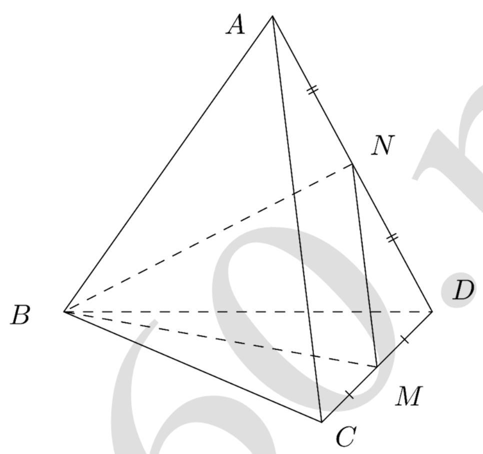
Mặt khác IK vuông góc AB, MN tại các trung điểm I, K của hai đoạn AB, MN nên $ABMN$ là hình thang cân.

Câu 55. Cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh có độ dài bằng a, M là trung điểm đoạn CD. Gọi α là góc giữa AC và BM. Chọn khẳng định **đúng?**

A. $\alpha = 30^o$. **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Hướng dẫn giải

Gọi N là trung điểm AD, khi đó $MN // AC$ nên góc giữa AC và BM bằng góc giữa MN và BM, là góc $\widehat{BMN}$, vậy $\alpha = \widehat{BMN}$.



$BM = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $MN = \frac{a}{2}$. $\cos\alpha = \cos\widehat{BMN} = \frac{BM^2 + MN^2 - BN^2}{2BM.MN} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.