$$=\frac{1+2\sin\alpha.\cos\alpha-1}{\cos\alpha.\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{2\sin\alpha.\cos\alpha}{\dfrac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\tan^2\alpha.$$ **Chọn A.**

Câu 97. Ta có $\dfrac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+1}=\dfrac{\sin\alpha\left(1+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha+1}=\dfrac{\sin\alpha\left(\dfrac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha+1}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha.$.

Suy ra $P=\tan^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. **Chọn C.**

Câu 98. Ta có $P=\tan\alpha\left(\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\right)$.

$$=\frac{1}{\cos\alpha}+\cos\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\left(1-\sin^2\alpha\right)+\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=2\cos\alpha.$$

Chọn B.

Câu 99. Ta có $\dfrac{\cot^2x-\cos^2x}{\cot^2x}=1-\dfrac{\cos^2x}{\cot^2x}=1-\cos^2x.\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x}=1-\sin^2x.$

Và $\dfrac{\sin x.\cos x}{\cot x}=\sin x.\cos x.\dfrac{\sin x}{\cos x}=\sin^2x$.

Suy ra $P=1-\sin^2x+\sin^2x=1.$ **Chọn A.**

Câu 100. Ta có $\dfrac{\sin x+\tan x}{\tan x}=\dfrac{\sin x}{\tan x}+1=\sin x.\dfrac{\cos x}{\sin x}+1=1+\cos x\neq 1+\sin x+\cot x.$

Chọn C.

BÀI 3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Câu 1. Ta có $M=\cos^4 15^\circ-\sin^4 15^\circ=\left(\cos^2 15^\circ\right)^2-\left(\sin^2 15^\circ\right)^2$

$$=\left(\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ\right)\left(\cos^2 15^\circ+\sin^2 15^\circ\right)$$

$$=\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ=\cos\left(2.15^\circ\right)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$ **Chọn B.**

Câu 2. Áp dụng công thức nhân đôi $\cos^2 a-\sin^2 a=\cos 2a$.

Ta có $M=\left(\cos^4 15^\circ-\sin^4 15^\circ\right)+\left(\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ\right)$.

$$=\left(\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ\right)\left(\cos^2 15^\circ+\sin^2 15^\circ\right)+\left(\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ\right).$$

$$=\left(\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ\right)+\left(\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ\right)=\cos 30^\circ+\cos 30^\circ=\sqrt{3}.$$ **Chọn A.**

Câu 3. Ta có

$$\cos^6\alpha-\sin^6\alpha=\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\left(\cos^4\alpha+\cos^2\alpha.\sin^2\alpha+\sin^4\alpha\right)$$

$$=\cos 2\alpha.\left[\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)^2-\cos^2\alpha.\sin^2\alpha\right]$$

$$=\cos 2\alpha.\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right).$$

Vậy $M=\cos 30^\circ.\left(1-\dfrac{1}{4}\sin^2 30^\circ\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\left(1-\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{15\sqrt{3}}{32}$. **Chọn D.**

Câu 4. Ta có $\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{30}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **Chọn A.**

Câu 5. Áp dụng công thức $\begin{cases}\sin a.\cos b-\cos a.\sin b=\sin(a-b)\\ \cos a.\cos b-\sin a.\sin b=\cos(a+b)\end{cases}$.

Khi đó $\sin\frac{5\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{18}=\sin\left(\frac{5\pi}{18}-\frac{\pi}{9}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

Và $\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$. Vậy $P=\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=1$. **Chọn A.**

Câu 6. Ta có $\frac{\tan 225^0-\cot 81^0.\cot 69^0}{\cot 261^0+\tan 201^0}=\frac{\tan\left(180^0+45^0\right)-\tan 9^0.\cot 69^0}{\cot\left(180^0+81^0\right)+\tan\left(180^0+21^0\right)}$.

$=\frac{1-\tan 9^0.\tan 21^0}{\tan 9^0+\tan 21^0}=\frac{1}{\tan\left(9^0+21^0\right)}=\frac{1}{\tan 30^0}=\sqrt{3}$. **Chọn C.**

Câu 7. Ta có $\sin\frac{7\pi}{24}=\cos\frac{5\pi}{24}$ và $\sin\frac{11\pi}{24}=\cos\frac{\pi}{24}$.

Do đó $M=\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\cos\frac{5\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}=\frac{1}{4}.\left(2.\sin\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{24}\right).\left(2.\sin\frac{5\pi}{24}.\cos\frac{5\pi}{24}\right)$

$=\frac{1}{4}.\sin\frac{\pi}{12}.\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{4}.\frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{8}.\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$. **Chọn D.**

Câu 8. Áp dụng công thức $\sin 2a=2.\sin a.\cos a$, ta có

$A=\sin\frac{\pi}{48}.\cos\frac{\pi}{48}.\cos\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.\sin\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{4}.\sin\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{8}.\sin\frac{\pi}{6}.\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{16}.\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{32}$. **Chọn D.**

Câu 9. Vì $\sin 10^0\neq 0$ nên suy ra

$M=\frac{16\sin 10^0\cos 10^0\cos 20^0\cos 40^0\cos 80^0}{16\sin 10^0}=\frac{8\sin 20^0\cos 20^0\cos 40^0\cos 80^0}{16\sin 10^0}$

$\Rightarrow M=\frac{4\sin 40^0\cos 40^0\cos 80^0}{16\sin 10^0}=\frac{2\sin 80^0\cos 80^0}{16\sin 10^0}=\frac{\sin 160^0}{16\sin 10^0}$.

$\Rightarrow M=\frac{\sin 20^0}{16\sin 10^0}=\frac{2\sin 10^0\cos 10^0}{16\sin 10^0}=\frac{1}{8}\cos 10^0$. **Chọn D.**

Câu 10. Áp dụng công thức $\sin a-\sin b=2.\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$.

Ta có $2\sin\frac{\pi}{7}.M=2.\cos\frac{2\pi}{7}.\sin\frac{\pi}{7}+2.\cos\frac{4\pi}{7}.\sin\frac{\pi}{7}+2.\cos\frac{6\pi}{7}.\sin\frac{\pi}{7}$

$=\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{7\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\pi=-\sin\frac{\pi}{7}$.

Vậy giá trị biểu thức $M=-\frac{1}{2}$. **Chọn B.**

Câu 11. Chọn B. Ta có $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$.

Câu 12. Áp dụng công thức $\sin 2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha$ ta được

$\sin(2018a)=2\sin(1009a).\cos(1009a)$. **Chọn D.**

Câu 13. Áp dụng công thức $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$, ta được

$\cos 6a=\cos^2 3a-\sin^2 3a=2\cos^2 3a-1=1-2\sin^2 3a$. **Chọn C.**

Câu 14. Chọn D. Ta có $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Câu 15. Chọn B.

Câu 16. Ta có $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right] = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

Chọn B.

Câu 17. Chọn B. **Câu 18. Chọn A.**

Câu 19. Ta có $\cos(a+b)=0 \Leftrightarrow a+b=\frac{\pi}{2}+k\pi \longrightarrow a=-b+\frac{\pi}{2}+k\pi$.

$\longrightarrow |\sin(a+2b)| = \left|\sin\left(-b+2b+\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right| = |\cos(b+k\pi)| = |\cos b|$. **Chọn D.**

Câu 20. Ta có $\sin(a+b)=0 \Leftrightarrow a+b=k\pi \longrightarrow a=-b+k\pi$.

$\longrightarrow |\cos(a+2b)| = |\cos(-b+2b+k\pi)| = |\cos(b+k\pi)| = |\cos b|$. **Chọn D.**

Câu 21. Áp dụng công thức $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$, ta được

$M=\sin(x-y)\cos y+\cos(x-y)\sin y=\sin[(x-y)+y]=\sin x.$ **Chọn A.**

Câu 22. Áp dụng công thức $\cos x\cos y-\sin x\sin y=\cos(x+y)$, ta được

$M=\cos(a+b)\cos(a-b)-\sin(a+b)\sin(a-b)=\cos(a+b+a-b)=\cos 2a=1-2\sin^2 a.$

Chọn B.

Câu 23. Áp dụng công thức $\cos x\cos y+\sin x\sin y=\cos(x-y)$, ta được

$M=\cos(a+b)\cos(a-b)+\sin(a+b)\sin(a-b)$

$=\cos(a+b-(a-b))=\cos 2b=1-2\sin^2 b.$ **Chọn A.**

Câu 24. Áp dụng công thức $\cos a.\cos b-\sin a.\sin b=\cos(a+b)$, ta được

$\sin 2x.\sin 3x=\cos 2x.\cos 3x \Leftrightarrow \cos 2x.\cos 3x-\sin 2x.\sin 3x=0$

$\Leftrightarrow \cos 5x=0 \Leftrightarrow 5x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{10}+k\frac{\pi}{5}.$ **Chọn A.**

Câu 25. Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\cot a+\cot b=\frac{\cos a}{\sin a}+\frac{\cos b}{\sin b}=\frac{\cos a.\sin b+\sin a.\cos b}{\sin a.\sin b}=\frac{\sin(a+b)}{\sin a.\sin b}$.
- Đáp án B. Ta có $\cos 2a=2\cos^2 a-1 \Leftrightarrow \cos^2 a=\frac{1}{2}(1+\cos 2a)$. **Chọn B.**

Câu 26. Chọn B.

Câu 27. Áp dụng công thức $\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$, ta được

$M=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4}}{2}\right).\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{4}-x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)$

$=-2\sin x.\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}\sin x.$ **Chọn B.**

Câu 28. Ta có $\begin{cases}\cos A=\frac{4}{5}\\ \cos B=\frac{5}{13}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sin A=\frac{3}{5}\\ \sin B=\frac{12}{13}\end{cases}$. Mà $A+B+C=180^\circ$, do đó

$$\cos C = \cos\left[180^\circ - (A+B)\right] = -\cos(A+B)$$
$$= -(\cos A.\cos B - \sin A.\sin B) = -\left(\frac{4}{5}.\frac{5}{13} - \frac{3}{5}.\frac{12}{13}\right) = \frac{16}{65}.$$

Chọn C.

Câu 29. Ta có $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}.\frac{1}{5}} = \dfrac{7}{9}$

$\longrightarrow \tan(A+B+C) = \dfrac{\tan(A+B)+\tan C}{1-\tan(A+B).\tan C} = \dfrac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}.\frac{1}{8}} = 1 \longrightarrow A+B+C = \dfrac{\pi}{4}$. **Chọn C.**

Câu 30. Do $\begin{cases} \dfrac{A+B}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2} \\ \dfrac{C}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A+B}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sin\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{C}{2} \\ \sin\dfrac{C}{2} = \cos\dfrac{A+B}{2} \end{cases}$.

Áp dụng, ta được

$$P = (\sin A + \sin B) + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right) = 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.$$ **Chọn A.**

Câu 31. Do $A+B = \pi - C \longrightarrow \sin(A+B) = \sin C$.

Áp dụng, ta được

$$P = (\sin 2A + \sin 2B) + \sin 2C = 2\sin(A+B).\cos(A-B) + 2\sin C.\cos C$$
$$= 2\sin C.\cos(A-B) + 2\sin C.\cos C = 2\sin C\left[\cos(A-B) + \cos C\right].$$
$$= 4\sin C.\cos\frac{A-B+C}{2}.\cos\frac{A-B-C}{2}$$
$$= 4\sin C.\cos\frac{(A+B+C)-2B}{2}.\cos\frac{(-A-B-C)+2A}{2}$$
$$= 4\sin C.\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right).\cos\left(-\frac{\pi}{2} + A\right) = 4\sin C.\sin B.\sin A = 4\sin A.\sin B.\sin C.$$ **Chọn B.**

Câu 32. Ta có $P = \tan A + \tan B + \tan C = (\tan A + \tan B) + \tan C = \dfrac{\sin(A+B)}{\cos A.\cos B} + \dfrac{\sin C}{\cos C}$.

Mà $A+B = \pi - C \longrightarrow \begin{cases} \sin(A+B) = \sin C \\ -\cos(A+B) = \cos C \end{cases}$. Khi đó, ta được

$$P = \frac{\sin C}{\cos A.\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} = \sin C\left(\frac{\cos C + \cos A.\cos B}{\cos A.\cos B.\cos C}\right) = \sin C.\left(\frac{-\cos(A+B) + \cos A.\cos B}{\cos A.\cos B.\cos C}\right)$$
$$= \sin C.\frac{-\cos A.\cos B + \sin A.\sin B + \cos A.\cos B}{\cos A.\cos B.\cos C} = \frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\cos A.\cos B.\cos C} = \tan A.\tan B.\tan C$$

Chọn D.

Câu 33. Do $A+B+C = \pi \longrightarrow \dfrac{C+B}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A}{2}$

$\longrightarrow \tan\left(\frac{C+B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\longrightarrow \frac{\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{C}{2}\tan\frac{B}{2}}=\cot\frac{A}{2}=\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$

$\longrightarrow \tan\frac{A}{2}\left(\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)+\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{B}{2}=1$

$\longrightarrow \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}=1$. **Chọn A.**

Câu 34. Ta có $\frac{\sin B}{\sin C}=2\cos A\longrightarrow \sin B=2\sin C.\cos A.=\sin(C+A)+\sin(C-A)$

Mặt khác $A+B+C=\pi\longrightarrow B=\pi-(A+C)\longrightarrow \sin B=\sin(A+C)$. Do đó, ta được $\sin(C-A)=0\longrightarrow A=C$. **Chọn A.**

Câu 35. Ta có $\frac{\tan A}{\tan C}=\frac{\sin^2 A}{\sin^2 C}\longleftrightarrow \frac{\sin A\cos C}{\cos A\sin C}=\frac{\sin^2 A}{\sin^2 C}\longleftrightarrow \sin 2C=\sin 2A$

$\longrightarrow \left[\begin{array}{l}2C=2A\\ 2C=\pi-2A\end{array}\right.\longrightarrow \left[\begin{array}{l}C=A\\ A+C=\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 36. Ta có $P=\sin 2(\alpha+\pi)=\sin(2\alpha+2\pi)=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, suy ra $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\frac{3}{5}$.

Do $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ nên ta chọn $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

Thay $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ và $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ vào P, ta được $P=2.\frac{4}{5}.\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$. **Chọn A.**

Câu 37. Ta có $P=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}=2\cos\alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, suy ra $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Do $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}\longrightarrow P=\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **Chọn D.**

Câu 38. Ta có $-\frac{3}{5}=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, suy ra $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\frac{4}{5}$.

Do $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

Suy ra $P=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{-4-3\sqrt{3}}{10}$. **Chọn C.**

Câu 39. Áp dụng công thức $\sin a.\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$, ta được

$P=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha\right)$.

Ta có $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2.\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{7}{25}$.

Thay vào P, ta được $P=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{25}\right)=\frac{11}{100}$. **Chọn A.**

Câu 40. Ta có $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 1-2.\left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$.

Suy ra $P=\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2.\frac{49}{625}-1=-\frac{527}{625}$. **Chọn B.**

Câu 41. Vì $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$ suy ra $\begin{cases}\sin\alpha>0\\ \cos\alpha<0\end{cases}$ nên $\sin\alpha-\cos\alpha>0$.

Ta có $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2 = 1-\sin 2\alpha = 1+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$. Suy ra $\sin\alpha-\cos\alpha=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Do $\sin\alpha-\cos\alpha>0$ nên $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{5}}$. Vậy $P=\frac{3}{\sqrt{5}}$. **Chọn A.**

Câu 42. Áp dụng $a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2$.

Ta có $P=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha=\frac{7}{9}$.

Chọn C.

Câu 43. Ta có $P=\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha.\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-1}$.

Từ hệ thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, suy ra $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\frac{12}{13}$.

Do $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ nên ta chọn $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$.

Thay $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$ và $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ vào P, ta được $P=\frac{120}{119}$. **Chọn C.**

Câu 44. Ta có $P=\left(1+3.\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)\left(1-4.\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\cos 2\alpha\right)(-1-2\cos 2\alpha)$.

Thay $\cos 2\alpha=-\frac{2}{3}$ vào P, ta được $P=\left(\frac{5}{2}+1\right)\left(-1+\frac{4}{3}\right)=\frac{7}{6}$. **Chọn D.**

Câu 45. Ta có $P=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha=\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, suy ra $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Do $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ nên ta chọn $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Thay $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{4}$ và $\cos\alpha=\frac{3}{4}$ vào P, ta được $P=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)=\frac{3-\sqrt{21}}{8}$.

Chọn B.

Câu 46. Ta có $P=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}$.

Từ hệ thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, suy ra $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\frac{3}{5}$.

Do $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$. Suy ra $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$.

Thay $\tan\alpha=\frac{3}{4}$ vào P, ta được $P=-\frac{1}{7}$. **Chọn A.**

Câu 47. Ta có $P=\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos2\alpha+\sin2\alpha)$.

Từ hệ thức $\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$, suy ra $\sin2\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\pm\frac{3}{5}$.

Do $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}<2\alpha<\pi$ nên ta chọn $\sin2\alpha=\frac{3}{5}$.

Thay $\sin2\alpha=\frac{3}{5}$ và $\cos2\alpha=-\frac{4}{5}$ vào P, ta được $P=-\frac{\sqrt{2}}{10}$. **Chọn B.**

Câu 48. Ta có $P=\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{3\alpha}{2}=\frac{1}{2}(\sin2\alpha-\sin\alpha)=\frac{1}{2}\sin\alpha(2\cos\alpha-1)$.

Từ hệ thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, suy ra $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\frac{3}{5}$.

Do $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$.

Thay $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ và $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ vào P, ta được $P=\frac{39}{50}$. **Chọn D.**

Câu 49. Ta có $P=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha.\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}$.

Từ giả thiết $\cot\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=2\Leftrightarrow\cot\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\Leftrightarrow\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\Leftrightarrow\tan\alpha=2$.

Thay $\tan\alpha=2$ vào P, ta được $P=-3$. **Chọn C.**

Câu 50. Ta có $\cot\alpha=15\Leftrightarrow\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=15\Leftrightarrow\cos\alpha=15\sin\alpha$.

Suy ra $P=\sin2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha=30\sin^2\alpha=\frac{30}{\frac{1}{\sin^2\alpha}}=\frac{30}{1+\cot^2\alpha}=\frac{30}{1+15^2}=\frac{15}{113}$.

Chọn C.

Câu 51. Ta có $P=\tan\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{\sin\alpha}$.

Từ hệ thức $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\longrightarrow\sin\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{19}}$.

Do $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\longrightarrow\sin\alpha>0$ nên ta chọn $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{19}}\longrightarrow P=2\sqrt{19}$. **Chọn A.**

Câu 52. Ta có $P^2=1+\sin\alpha$. Với $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right]\Rightarrow\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{3\pi}{4};\pi\right]$.

Khi đó $\begin{cases} 0 \le \sin\frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \le \cos\frac{\alpha}{2} < -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, suy ra $P = \sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} < 0$.

Từ hệ thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, suy ra $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{16}{25}$.

Vì $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ nên ta chọn $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

Thay $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ vào P^2, ta được $P^2 = \frac{1}{5}$. Suy ra $P = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. **Chọn C.**

Câu 53. Ta có $P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha}$.

Nhắc lại công thức: Nếu đặt $t = \tan\alpha$ thì $\sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ và $\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Do đó $\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = -\frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = -\frac{3}{5}$.

Thay $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$ vào P, ta được $P = -\frac{10}{9}$. **Chọn C.**

Câu 54. Ta có $A = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Từ hệ thức $\cot^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} = 25 \Leftrightarrow \cot^2\alpha = 24 \Rightarrow \cot\alpha = \pm 2\sqrt{6}$.

Vì $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ cùng dấu và $\tan\alpha + \cot\alpha < 0$ nên $\tan\alpha < 0,\ \cot\alpha < 0$.

Do đó ta chọn $\cot\alpha = -2\sqrt{6}$. Suy ra $\cos\alpha = \cot\alpha.\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Thay $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ và $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ vào P, ta được

$P = 2.\frac{1}{5}.\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) = -\frac{4\sqrt{6}}{25}$. **Chọn B.**

Câu 55. Với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ suy ra $\begin{cases} \sin\alpha > 0 \\ \cos\alpha < 0 \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} \sin\alpha + 2\cos\alpha = -1 \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow (-1 - 2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow 5\cos^2\alpha + 4\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \ (\text{loại}) \\ \cos\alpha = -\frac{4}{5} \end{array}\right.$.

Từ hệ thức $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, suy ra $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ (do $\sin\alpha > 0$).

Vậy $P = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha = 2.\frac{3}{5}.\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$. **Chọn C.**

Câu 56. Ta có $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$ mà $a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos a = -\frac{12}{13}$.

Tương tự, ta có $\sin^2 b = 1 - \cos^2 b = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ mà $b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin b = \frac{4}{5}$.

Khi đó $\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\sin b.\cos a=\frac{5}{13}.\frac{3}{5}-\frac{12}{13}.\frac{4}{5}=-\frac{33}{65}$. **Chọn C.**

Câu 57. Ta có $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ với $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ suy ra $\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{25}{169}}=-\frac{12}{13}$.

Tương tự, có $\cos\beta=\frac{3}{5}$ với $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ suy ra $\sin\beta=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$.

Vậy $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha.\sin\beta=-\frac{12}{13}.\frac{3}{5}+\frac{5}{13}.\frac{4}{5}=-\frac{16}{65}$. **Chọn B.**

Câu 58. Ta có $P=\cos(a+b).\cos(a-b)=(\cos a.\cos b+\sin a.\sin b)(\cos a.\cos b-\sin a.\sin b)$

$=(\cos a.\cos b)^2-(\sin a.\sin b)^2=\cos^2 a.\cos^2 b-(1-\cos^2 a).(1-\cos^2 b)$.

$=\frac{1}{9}.\frac{1}{16}-\left(1-\frac{1}{9}\right).\left(1-\frac{1}{16}\right)=-\frac{119}{144}$. **Chọn D.**

Câu 59. Vì $a,\ b\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên suy ra $\begin{cases}\cos a=\sqrt{1-\sin^2 a}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\\ \cos b=\sqrt{1-\sin^2 b}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

Khi đó $\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b=\frac{2\sqrt{2}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{3}.\frac{1}{2}=\frac{-1+2\sqrt{6}}{6}$.

Vậy $\cos 2(a+b)=2\cos^2(a+b)-1=2.\left(\frac{-1+2\sqrt{6}}{6}\right)^2-1=\frac{7-4\sqrt{6}}{18}$. **Chọn D.**

Câu 60. Ta có $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}=\frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}.\frac{3}{4}}=1$ suy ra $a+b=\frac{\pi}{4}$. **Chọn B.**

Câu 61. Ta có $\cot(x+y)=\frac{\cot x.\cot y-1}{\cot x+\cot y}=\frac{\frac{3}{4}.\frac{1}{7}-1}{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}=-1$.

Mặt khác $0<x,\ y<\frac{\pi}{2}$ suy ra $0<x+y<\pi$. Do đó $x+y=\frac{3\pi}{4}$. **Chọn B.**

Câu 62. Ta có $\tan(\alpha+\beta).\sin\gamma=\cos\gamma\Rightarrow\sin(\alpha+\beta).\sin\gamma=\cos(\alpha+\beta).\cos\gamma$.

$\Rightarrow\cos(\alpha+\beta).\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta).\sin\gamma=0\Rightarrow\cos(\alpha+\beta+\gamma)=0$.

Vậy tổng ba góc $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ (vì $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ là ba góc nhọn). **Chọn C.**

Câu 63. Ta có $\cos 2a=\frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{3}{5}$ suy ra $\sin 2a=\sqrt{1-\cos^2 2a}=\frac{4}{5}$.

Lại có $1+\tan^2 b=\frac{1}{\cos^2 b}\Rightarrow\cos b=-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 b}}=-\frac{3}{\sqrt{10}}$ vì $90^0<b<180^0$

Mặt khác $\sin b=\tan b.\cos b=\left(-\frac{1}{3}\right).\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=\frac{1}{\sqrt{10}}$

Khi đó $\cos(2a-b)=\cos 2a.\cos b+\sin 2a.\sin b=\frac{3}{5}.\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)+\frac{4}{5}.\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$. **Chọn A.**

Câu 64. Ta có $\sin a-\cos a=\frac{1}{5}\Rightarrow(\sin a-\cos a)^2=\frac{1}{25}\Leftrightarrow 1-\sin 2a=\frac{1}{25}\Leftrightarrow \sin 2a=\frac{24}{25}$.

Khi đó $\cos 2a=\sqrt{1-\sin^2 2a}=\sqrt{1-\left(\frac{24}{25}\right)^2}=\frac{7}{25}$ vì $270^0<2a<360^0$.

Vậy giá trị của biểu thức $\tan 2a=\frac{\sin 2a}{\cos 2a}=\frac{24}{7}$. **Chọn C.**

Câu 65. Ta có $\tan 2a=\tan\left[(a+b)+(a-b)\right]=\frac{\tan(a+b)+\tan(a-b)}{1+\tan(a+b).\tan(a-b)}=\frac{7+4}{1-7.4}=-\frac{11}{27}$.

Chọn A.

Câu 66. Ta có $\sin\alpha.\cos(\alpha+\beta)=\sin\beta=\sin\left[(\alpha+\beta)-\alpha\right]$.

$\Leftrightarrow \sin\alpha.\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta).\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta).\sin\alpha$.

$\Leftrightarrow 2\sin\alpha.\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta).\cos\alpha\Rightarrow\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=2.\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\tan\alpha$. **Chọn D.**

Câu 67. Từ giả thiết, ta có $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{2}-(\alpha+\gamma)$.

Suy ra $\cot\alpha+\cot\gamma=2\cot\beta=2.\cot\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\gamma)\right]=2.\tan(\alpha+\gamma)=2.\frac{\tan\alpha+\tan\gamma}{1-\tan\alpha.\tan\gamma}$

Mặt khác $\frac{\tan\alpha+\tan\gamma}{1-\tan\alpha.\tan\gamma}=\frac{\frac{1}{\cot\alpha}+\frac{1}{\cot\gamma}}{1-\frac{1}{\cot\alpha}.\frac{1}{\cot\gamma}}=\frac{\cot\alpha+\cot\gamma}{\cot\alpha.\cot\gamma-1}$ nên suy ra

$\cot\alpha+\cot\gamma=2.\frac{\cot\alpha+\cot\gamma}{\cot\alpha.\cot\gamma-1}\Leftrightarrow\cot\alpha.\cot\gamma-1=2\Leftrightarrow\cot\alpha.\cot\gamma=3$. **Chọn C.**

Câu 68. Vì $\tan\alpha,\tan\beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2+px+q=0$ nên theo định lí Viet, ta có $\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=-p\\ \tan\alpha.\tan\beta=q\end{cases}$. Khi đó $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{p}{q-1}$. **Chọn A.**

Câu 69. Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=p\\ \tan\alpha.\tan\beta=q\end{cases}$ và $\begin{cases}\cot\alpha+\cot\beta=r\\ \cot\alpha.\cot\beta=s\end{cases}$.

Khi đó $P=r.s=(\cot\alpha+\cot\beta).\cot\alpha.\cot\beta=\left(\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}\right).\frac{1}{\tan\alpha}.\frac{1}{\tan\beta}$

$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{(\tan\alpha.\tan\beta)^2}=\frac{p}{q^2}$. Vậy $P=r.s=\frac{p}{q^2}$. **Chọn B.**

Câu 70. Vì $\tan\alpha,\tan\beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-px+q=0$ nên theo định lí Viet, ta có $\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=p\\ \tan\alpha.\tan\beta=q\end{cases}\longrightarrow\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}=\frac{p}{1-q}$.

Khi đó $P=\cos^2(\alpha+\beta).\left[1+p.\tan(\alpha+\beta)+q.\tan^2(\alpha+\beta)\right]$.

$$=\frac{1+p.\tan(\alpha+\beta)+q.\tan^2(\alpha+\beta)}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}=\frac{1+p.\frac{p}{1-q}+q.\left(\frac{p}{1-q}\right)^2}{1+\left(\frac{p}{1-q}\right)^2}$$

$$=\frac{(1-q)^2+p^2(1-q)+q.p^2}{(1-q)^2+p^2}=\frac{(1-q)^2+p^2-p^2.q+q.p^2}{(1-q)^2+p^2}=1.$$ **Chọn C.**

Câu 71. Ta có $M=\tan x-\tan y=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin x\cos y-\cos x\sin y}{\cos x\cos y}=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}.$

Chọn C.

Câu 72. Vì hai góc $\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ phụ nhau nên $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$

Suy ra $M=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=-\sin 2\alpha.$ **Chọn D.**

Câu 73. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)}{2}=\frac{1+\sin(-a)}{2}=\frac{1-\sin a}{2}$. **Chọn A.**

Câu 74. Ta có

$$M=\frac{\sin y.\cos x-\cos y.\sin x}{\sin x.\sin y}=\frac{\sin y.\cos x}{\sin x.\sin y}-\frac{\cos y.\sin x}{\sin x.\sin y}=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos y}{\sin y}=\cot x-\cot y.$$

Chọn B.

Câu 75. Ta có: $M=\cos x+\cos 2x+\cos 3x=(\cos x+\cos 3x)+\cos 2x$

$=2\cos 2x.\cos x+\cos 2x=\cos 2x(2\cos x+1)$.

Chọn D.

Câu 76. Ta có: $\frac{\sin 3x-\sin x}{2\cos^2 x-1}=\frac{2\cos 2x\sin x}{\cos 2x}=2\sin x$. **Chọn D.**

Câu 77. Ta có: $A=\frac{(1+\cos 2x)+(\cos x+\cos 3x)}{(2\cos^2 x-1)+\cos x}=\frac{2\cos^2 x+2\cos 2x\cos x}{\cos x+\cos 2x}$

$=\frac{2\cos x(\cos x+\cos 2x)}{\cos x+\cos 2x}=2\cos x.$ **Chọn C.**

Câu 78. Ta có

$$\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=-\cos 2\alpha.$$

Do đó $A=-\cos 2\alpha+\cos 2\alpha=0.$ **Chọn A.**

Câu 79. Ta có

$$A=\frac{(1-\cos 4\alpha)+\sin 4\alpha}{(1+\cos 4\alpha)+\sin 4\alpha}=\frac{2\sin^2 2\alpha+2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha+2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=\frac{2\sin 2\alpha(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)}{2\cos 2\alpha(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)}=\tan 2\alpha.$$

Chọn C.

Câu 80. Ta có $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha;\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha-1=2\left(1-2\sin^2\alpha\right)^2-1$. Do đó:

$$A=\frac{3-4\left(1-2\sin^2\alpha\right)+2\left(1-2\sin^2\alpha\right)^2-1}{3+4\left(2\cos^2\alpha-1\right)+2\left(2\cos^2\alpha-1\right)^2-1}=\frac{8\sin^2 a-8\sin^2\alpha+8\sin^4\alpha}{8\cos^2 a-8\cos^2\alpha+8\cos^4\alpha}=\tan^4\alpha.$$

Chọn B.

Câu 81. Ta có

$$A=\frac{\sin^2 2\alpha+4\sin^4\alpha-4\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{4-\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}=\frac{4\sin^4\alpha}{4(1-\sin^2\alpha)-4\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}=\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}=\tan^4 a.$$

Do đó giá trị của biểu thức A tại $\alpha=\frac{\pi}{6}$ là $\tan^4\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4=\frac{1}{9}$. **Chọn C.**

Câu 82. Ta có $A=\frac{\sin 2\alpha+\sin\alpha}{1+\cos 2\alpha+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha\left(2\cos\alpha+1\right)}{2\cos^2\alpha+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha\left(2\cos\alpha+1\right)}{\cos\alpha\left(2\cos\alpha+1\right)}=\tan\alpha$

Chọn A.

Câu 83. Ta có $A=\frac{1-\sin a+2\sin^2 a-1}{2\sin a.\cos a-\cos a}=\frac{\sin a\left(2\sin a-1\right)}{\cos a\left(2\sin a-1\right)}=\frac{\sin a}{\cos a}=\tan a.$ **Chọn B.**

Câu 84. Ta có $\sin x=\sin\left(2.\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$,

$$1+\cos x=1+\cos\left(2.\frac{x}{2}\right)=2\cos^2\frac{x}{2}$$

Do đó $A=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}+1\right)}{\cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}+1\right)}=\tan\frac{x}{2}$. **Chọn A.**

Câu 85. Ta có $\sin\alpha.\cos^5\alpha-\sin^5\alpha.\cos\alpha=\sin\alpha.\cos\alpha\left(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha\right)$

$$=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\frac{1}{4}\sin 4\alpha.$$ **Chọn D.**

Câu 86. Ta có $-1\le\sin x\le 1\longrightarrow -3\le 3\sin x\le 3\longrightarrow -5\le 3\sin x-2\le 1$

$\longrightarrow -5\le P\le 1\longrightarrow\begin{cases}M=1\\ m=-5\end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 87. Ta có $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1\longrightarrow 2\ge -2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\ge -2$

$\longrightarrow 4\ge -2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\ge 0\longrightarrow 4\ge P\ge 0.$ **Chọn C.**

Câu 88. Áp dụng công thức $\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$, ta có

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

Ta có $-1\le\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 1\longrightarrow -1\le P\le 1\xrightarrow{P\in\mathbb{Z}}P\in\{-1;0;1\}$. **Chọn C.**

Câu 89. Ta có $P=\sin^2 x+2\cos^2 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+\cos^2 x=1+\cos^2 x$

Do $-1 \le \cos x \le 1 \longrightarrow 0 \le \cos^2 x \le 1 \longrightarrow 1 \le 1+\cos^2 x \le 2 \longrightarrow \begin{cases} M=2 \\ m=1 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 90. Ta có $P = 8\sin^2 x + 3\cos 2x = 8\sin^2 x + 3\left(1-2\sin^2 x\right) = 2\sin^2 x + 3.$

Mà $-1 \le \sin x \le 1 \longrightarrow 0 \le \sin^2 x \le 1 \longrightarrow 3 \le 2\sin^2 x + 3 \le 5$

$\longrightarrow 3 \le P \le 5 \longrightarrow \begin{cases} M=5 \\ m=3 \end{cases} \longrightarrow T = 2M - m^2 = 1.$ **Chọn A.**

Câu 91. Ta có $P = \cos^4 x + \sin^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$

$$= 1 - \frac{1}{2}.\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.$$

Mà $-1 \le \cos 4x \le 1 \longrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x \le 1 \longrightarrow \frac{1}{2} \le P \le 1.$ **Chọn B.**

Câu 92. Ta có $P = \sin^4 x - \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) = -\cos 2x.$

Mà $-1 \le \cos 2x \le 1 \longrightarrow -1 \ge -\cos 2x \ge 1 \longrightarrow -1 \le P \le 1 \longrightarrow \begin{cases} M=1 \\ m=-1 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 93. Ta có $P = \sin^6 x + \cos^6 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$