$2\cos^2 x+5\sin x.\cos x+\cos^2 x-m-1=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1+5\sin x.\cos x+6\dfrac{1-\cos 2x}{2}=m$

$\Leftrightarrow \cos 2x+\dfrac{5}{2}\sin 2x+3-3\cos 2x=m \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}\sin 2x-2\cos 2x=m-3$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{2}\right)^2+(-2)^2\ge(m-3)^2$

$\Leftrightarrow (m-3)^2\le\dfrac{41}{4}\Leftrightarrow |m-3|\le\dfrac{\sqrt{41}}{2}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{41}}{2}\le m-3\le\dfrac{\sqrt{41}}{2}\Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{41}}{2}+3\le m\le\dfrac{\sqrt{41}}{2}+3$

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$.

Vậy có 7 giá trị m thỏa mãn.

Câu 34. **Đáp án B.**

Phương trình $\sin x+\cos x-4\sin^3 x=0\,(*)$

-Với $\cos x=0\Rightarrow\sin x=\pm1$ không thỏa mãn phương trình.

-Với $\cos x\ne0$, chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ ta được

$(*)\Leftrightarrow \tan x\left(1+\tan^2 x\right)+1+\tan^2 x-4\tan^3 x=0$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x-\tan^2 x-\tan x-1=0$

$\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow \sin x-\cos x=0$

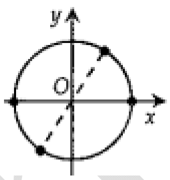
Câu 35. **Chọn đáp án B.**

Điều kiện $\cos x\ne0$

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3}\tan x+1=1+\tan^2 x\Leftrightarrow \tan^2 x-\sqrt{3}\tan x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=0\\ \tan x=\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

Vậy só nghiệm trên $(0;2\pi)$ là 3.



Câu 36. **Đáp án C.**

$2\sin^2 x-\sin x.\cos x-m\cos^2 x=1\,(1)$

Trên $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]\Rightarrow\cos x\ne0$

$(1)\Leftrightarrow 2\tan^2 x-\tan x-m=\tan^2 x+1\Leftrightarrow m=\tan^2 x-\tan x-1$

Đặt $\tan x=t\Rightarrow t\in[-1;1]\,\forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$

Yêu cầu bài toán tìm m để phương trình $m=f(t)=t^2-t-1$ có nghiệm trên $[-1;1]$

t	-1		$\frac{1}{2}$		1
$f(t)$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	-1

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m \in \left[-\frac{5}{4};1\right]$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Phương trình đối xứng và các phương trình lượng giác không mẫu mực.

Câu 37. **Đáp án C.**

$\sin x + \cos x + \sqrt{2}\sin 2x = 0(1)$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sqrt{2}\sin x.\cos x = 0$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$t^2 = 1 + 2\sin x.\cos x \Rightarrow 2\sin x.\cos x = t^2 - 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow t + \sqrt{2}\left(t^2 - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ t = -\sqrt{2} \end{array}\right.$

+ Với $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

+ Với $t = -\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Vậy có 3 điểm biểu diễn các nghiệm.

Câu 38. **Đáp án D.**

$\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - m - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin x.\cos x + \sin x - \cos x - m - 1 = 0$

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

$2\sin x.\cos x = -t^2 + 1$

Phương trình $\Leftrightarrow m = -t^2 + t(*)$ có nghiệm trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + t$ trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

t	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
$-t^2+t$	$-\sqrt{2}-2$ ↗	$\frac{1}{4}$	↘ $\sqrt{2}-2$

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow m \in \left[-\sqrt{2}-2;\frac{1}{4}\right]$

Vậy các giá trị $m \in \{-3;-2;-1;0\}$ thỏa mãn.

Câu 39. **Đáp án A.**

Điều kiện $\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}(k \in \mathbb{Z})$.

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{\cos x} = \sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \sin x.\cos x(\sin x + \cos x)$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin x.\cos x + \sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0(1)\\ \sin x.\cos x + \sin x - \cos x = 0(2)\end{array}\right.$

Giải (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi(k \in \mathbb{Z})$

Giải (2). Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$, $\sin x.\cos x = \dfrac{1-t^2}{2}$.

$(2) \Leftrightarrow \dfrac{1-t^2}{2} + t = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = 1-\sqrt{2}(tm)\\ t = 1+\sqrt{2}(l)\end{array}\right.$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$. Vậy $t = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Câu 40. **Chọn đáp án B.**

Cách 1: Điều kiện để phương tình $\tan x + \cot x = t$ có nghiệm:

$|t| = |\tan x + \cot x| = |\tan x| + |\cot x| \geq 2\sqrt{|\tan x.\cot x|} = 2 \Rightarrow t \in (-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$

Cách 2: Phương trình $\tan x + \dfrac{1}{\tan x} = t(\tan x \neq 0)$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \tan^2 x - t.\tan x + 1 = 0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta \geq 0\\ 0^2 - t.0 + 1 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow t^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |t| \geq 2$.

Câu 41. **Đáp án C.**

$3\tan^2 x + 4\tan x + 4\cot x + 3\cot^2 x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 4(\tan x + \cot x) + 3(\tan^2 x + \cot^2 x) + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 4t + 3(t^2 - 2) + 2 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 4 = 0$.

Câu 42. **Đáp án A.**

$\cos x + \cos 3x + 2\cos 5x = 0$

$\Leftrightarrow (\cos 5x + \cos x) + (\cos 5x + \cos 3x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 3x.\cos 2x + 2\cos 4x.\cos x = 0$

$\Leftrightarrow (4\cos^3 x - 3\cos x)\cos 2x + \cos 4x.\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left[(4\cos^2 x - 3\cos x)\cos 2x + \cos 4x\right] = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left[(2\cos 2x - 1)\cos 2x + 2\cos^2 2x - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(4\cos^2 2x - \cos 2x - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos 2x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{8} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{8} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$.

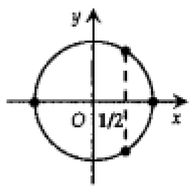
Câu 43. **Đáp án C.**

$\sin 3x - \sin x + \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x.\sin x + 2\sin x.\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos^2 x + \cos x - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pi + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$



Vậy có 4 điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 44. **Đáp án A.**

$$\sin^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos 2x)^2 + \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-2x)\right)\right]^2 = 1$$

$\Leftrightarrow (1 - \cos 2x)^2 + (1 - \sin 2x)^2 = 1$

$\Leftrightarrow 1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 - 2\sin 2x + \sin^2 2x = 1$

$\Leftrightarrow 3 - 2\cos 2x - 2\sin 2x = 1$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm thuộc $(2\pi;3\pi)$.

Câu 45. **Đáp án B.**

$$\cos^3x.\sin3x+\sin^3x.\cos3x=\sin^3 4x$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos3x+3\cos x}{4}.\sin3x+\frac{3\sin x-\sin3x}{4}.\cos3x=\sin^3 4x$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{4}(\sin3x.\cos x+\sin x.\cos3x)=\sin^3 4x$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{4}\sin4x=\sin^3 4x\Leftrightarrow\sin12x=0\Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{12}(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có 24 nghiệm trên $[0;2\pi]$.

Câu 46. **Đáp án B.**

$$\cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{3x}{2}-\sin x.\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos x.\frac{1}{2}(\cos2x+\cos x)-\sin x.\frac{1}{2}(\cos x-\cos2x)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos x(\cos2x+\cos x)+1-\sin^2x-\sin x.\cos x=1$$

$$\Leftrightarrow\cos2x(\sin x+\cos x)-\sin x(\sin x+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(1-2\sin^2x-\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\2\sin^2x+\sin x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\\sin x=-1\\\sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Suy ra có hai nghiệm thuộc $(-\pi;0)$ là $-\dfrac{\pi}{4}$ và $-\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy tích hai nghiệm là $\dfrac{\pi^2}{8}$.

Câu 47. **Đáp án A.**

$$\sin5x.\cos3x=\sin7x.\cos5x\Leftrightarrow\sin8x+\sin2x=\sin12x+\sin2x$$

$$\Leftrightarrow\sin8x=\sin12x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}12x=8x+k2\pi\\12x=\pi-8x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{2}\\x=\dfrac{\pi}{20}+k\dfrac{\pi}{10}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Câu 48. **Đáp án D.**

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \sin\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \dfrac{3\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có

$$\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4} - x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x).$$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} = -2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left(\frac{1}{\sin x.\cos x} + 2\sqrt{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x.\cos x = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin 2x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{8} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy tổng các nghiệm âm liên tiếp lớn nhất là $-\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{3\pi}{8} = -\dfrac{3\pi}{4}$.

Câu 49. **Đáp án A.**

Ta có $\begin{cases} \sin^8 x \leq 1 \\ -\cos^8 x \leq 0 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin^8 x - \cos^8 x \leq 1$, mà $\dfrac{2}{\sqrt{3}} > 1$.

Vậy phương tình đã cho vô nghiệm.

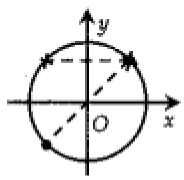
Câu 50. **Đáp án A.**

$$\tan^2 x + 2\sin^2 x - 2\tan x - 2\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan^2 x - 2\tan x + 1) + (2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x - 1)^2 + (\sqrt{2}\sin x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$



Vậy phương trình có 1 nghiệm trên $(0; 2\pi)$.

Câu 51. **Đáp án C.**

Đặt $t = \dfrac{3\pi}{10} - \dfrac{x}{2} \Rightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{3\pi}{10} - t \Leftrightarrow \dfrac{3x}{2} = \dfrac{9\pi}{10} - 3t$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin t = \dfrac{1}{2}\sin(\pi - 3t) \Leftrightarrow 2\sin t = \sin 3t$

$$\Leftrightarrow 2\sin t = 3\sin t - 4\sin^3 t \Leftrightarrow \sin t(2\cos 2t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t = 0 \\ \cos 2t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = k\pi \\ t = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{5} - k2\pi \\ x = \frac{14\pi}{5} + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right) \\ x = \frac{4\pi}{5} + k2\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm thuộc $\left(0;2\pi\right)$.

Câu 52. **Đáp án B.**

$\sqrt{2}\left(\sin x - 2\cos x\right) = 2 - \sin 2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x - 2\sqrt{2}\cos x = 2 - 2\sin x.\cos x$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\sin x - 2\right)\left(\sqrt{2}\cos x + 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \sqrt{2}\left(vn\right) \\ \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Câu 53. **Đáp án B.**

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \ne 0 \\ \cos x \ne 0 \\ \tan x \ne -1 \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x}} + \sin x\left(\sin x - \cos x\right)$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = \sin x.\cos x\left(\cos x - \sin x\right) + \sin x\left(\cos x - \sin x\right)$

$\Leftrightarrow \left(\cos x - \sin x\right)\left(1 - \sin x\cos x + \sin^2 x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1 - \cos 2x}{2} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1\left(tm\right) \\ \sin x + \cos x = 3\left(vn\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Câu 54. **Đáp án B.**

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \ne 0 \\ \cos x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \ne 0 \Leftrightarrow \cos 2x \ne \pm 1$.

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{\cos x} + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x + 4\sin^2 2x = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1\left(l\right) \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Vậy phương trình có 4 nghiệm trên $\left(0;2\pi\right)$

Câu 55. **Đáp án** C.

$2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x - 1 + \sin 7x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x + 2\cos 4x.\sin\ 3x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x\left(1 + \sin 3x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0\\ 1 + \sin 3x = 0\end{array}\right.$

Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 56. **Đáp án D.**

$2\sin x\left(1 + \cos 2x\right) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(1 + \cos^2 x - 1\right) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$

$\Leftrightarrow 4\sin x.\cos^2 x + \sin 2x = 1 + 2\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos x + \sin 2x = 1 + 2\cos x$

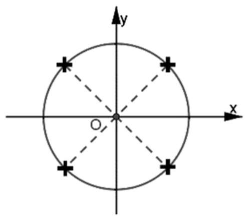
$\Leftrightarrow \left(2\cos x + 1\right)\left(\sin 2x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\cos x + 1 = 0\\ \sin 2x - 1 = 0\end{array}\right.$

Vậy ta chọn đáp án D.

Câu 57. **Đáp án A.**

Điều kiện: $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$



Phương trình $\Leftrightarrow 6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x.\cos x$

$\Leftrightarrow 3\sin x - \cos^3 x - 5\sin x.\cos^3 x = 0\left(*\right)$

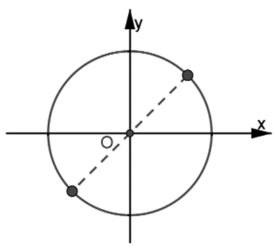
- Với $\cos x = 0$: Không thỏa mãn phương trình $\left(*\right)$

- Với $\cos x \neq 0$: Chia hai vế cho $\cos^3 x$ ta được:

$\left(*\right) \Leftrightarrow 3\tan x\left(1 + \tan^2 x\right) - 1 - 5\tan x = 0$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x - 2\tan x - 1 = 0$

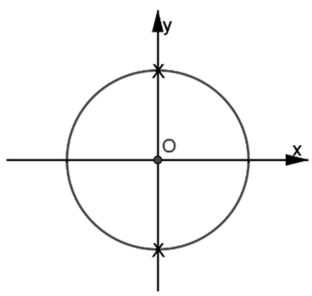
$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$



Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm

Câu 58. **Đáp án A.**

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$



Phương trình $\Leftrightarrow \sin 4x.\cos x = \sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x.\cos x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin x.\cos^2 x.\cos 2x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \left(4\cos^2 x.\cos 2x - 1\right)\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ 2\cos^2 2x+2\cos 2x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos 2x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\\ \cos 2x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}(VN)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow m+n=\frac{1}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Câu 59. **Đáp án B.**

Điều kiện: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

PT: $\Leftrightarrow \cos 2\text{x}-\tan^2 x=1-\cos x-\left(1+\tan^2 x\right)$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbb{Z})$$

Mà $x\in[1;70]\Leftrightarrow 1\le\dfrac{\pi}{3}+k\dfrac{2\pi}{3}\le 70$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2\pi}-\frac{1}{2}\le k\le\frac{105}{\pi}-\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow k\in\{0;1;2;...;32\}$

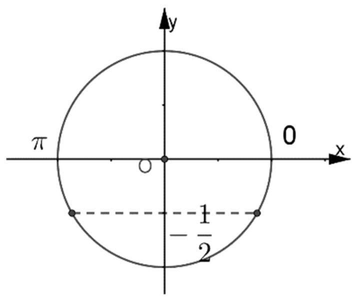
Vậy PT có 33 nghiệm trên $[1;70]$

Phương trình lượng giác chứa tham số

Câu 60. **Đáp án C.**

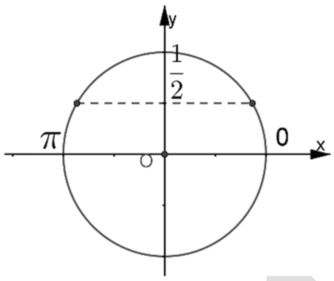
$(2\sin x+1)(\sin x-m)=0(*)$ có nghiệm thuộc $(0;\pi)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-\dfrac{1}{2}(1)\\ \sin x=m(2)\end{array}\right.$$



Giải $(1)\Rightarrow \sin x=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$



$\Rightarrow$ PT (1) không có nghiệm nào thuộc $\left(0;\pi\right)$

$\Rightarrow$(*) có nghiệm $\in \left(0;\pi\right)$

$\Leftrightarrow \sin x = m$ có nghiệm $\in \left(0;\pi\right) \Leftrightarrow m \in \left(0;1\right]$.

Chú ý: Độc giả có thể giải cách khác như sau:

Có $\sin x \in \left(0;1\right] \forall x \in \left(0;\pi\right)$

$\Rightarrow \sin x = m$

$\Leftrightarrow m \in \left(0;1\right]$

Câu 61. **Đáp án A.**

PT $\left(2\cos x - 1\right)\left(2\cos 2x + 2\cos x - m\right) = 3 - 4\sin^2 x$ có đúng hai nghiệm $\in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\Leftrightarrow \left(2\cos x - 1\right)\left(4\cos^2 x - 2 + 2\cos x - m\right)$

$= \left(2\cos x - 1\right)\left(2\cos x + 1\right)$

$\Leftrightarrow \left(2\cos x - 1\right)\left(4\cos^2 x - 3 - m\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x - 1 = 0 \\ 4\cos^2 x - -3 - m = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} (1) \\ \cos^2 x = \dfrac{m+3}{4} (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): $\cos x = \dfrac{1}{2}$ có hai nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

=> Phương trình có hai nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm hoặc (2) $\Leftrightarrow \cos x = \pm\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m+3}{4} > 1 \\ \dfrac{m+3}{4} < 0 \\ \dfrac{m+3}{4} = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -3 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn.

Chú ý: $\cos^2 x \in \left[0;1\right] \forall x \in R$

Câu 62. **Đáp án C**

$\cos 2x + \sin^2 x + 3\cos x - m = 5(*)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 1 - \cos^2 x + 3\cos x - m - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x + 3\cos x = m + 5$

Đặt $\cos x = t \in [-1;1]$, phương trình $\Leftrightarrow t^2 + 3t = m + 5$

Bảng biến thiên:

t	-1	1
t^2+3t	-2 ↗	4

=> Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow -2 \le m + 5 \le 4$

$\Leftrightarrow -7 \le m \le -1$. Vậy a + b = -8

Câu 63. **Đáp án B**

$m\sin x + (m+1)\cos x = \dfrac{m}{\cos x}(*)$

Điều kiện: $\cos x \ne 0$

$(*) \Leftrightarrow m\sin x\cos x + (m+1)\cos^2 x = m$

$\Leftrightarrow \dfrac{m}{2}\sin 2x + \dfrac{m+1}{2}(1+\cos 2x) = m$

$\Leftrightarrow m\sin 2x + (m+1)\cos 2x = m - 1(1)$

+ Từ m = 0 $(*) \Leftrightarrow \cos x = 0$ loại do điều kiện $\Rightarrow m = 0$ phương trình (*) vô nghiệm.

+ Với $m \ne 0$

=> (*) có nghiệm khi (1)

$\Leftrightarrow m^2 + (m+1)^2 \ge (m-1)^2$

$\Leftrightarrow m^2 + 4m \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -4 \\ m \ge 0 \end{array}\right.$

Vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 64. **Đáp án B**

$\cos 2x + (2m+1)\sin - m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 2m\sin x + \sin x - m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(m - \sin x) - (m - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - m)(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2}(1) \\ \sin x = m(2) \end{array}\right.$

Giải (1): $\sin x = \dfrac{1}{2}$ luôn có 2 nghiệm $\in \left(-\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

$\Rightarrow \forall m$ phương trình có nghiệm.

Câu 65. **Đáp án D**

$\frac{3}{\sin^2 x}+3\tan^2 x+tanx+\cot x=m$

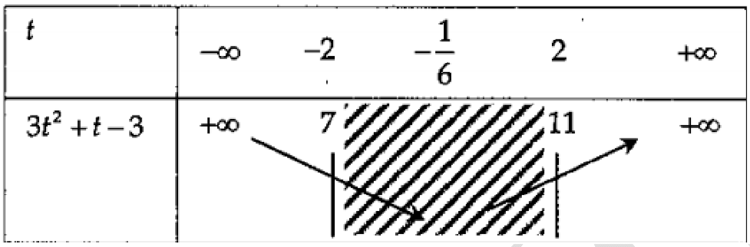
$\Leftrightarrow 3\left(1+\cot^2 x\right)+3\tan^2 x+\tan x+\cot x+3-m=0$ Đặt $t=\tan x+\cot x\Rightarrow t^2-2=\tan^2 x+\cot^2 x$

$\Leftrightarrow 3\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)+\tan x+\cot x+3-m=0$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t\ge 2\\ t\le -2\end{array}\right.$ => Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình $3\left(t^2-2\right)+t+3-m=0$ có nghiệm $t\in\left(-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right)\Leftrightarrow m=3t^2+t-3$

có nghiệm $t\in\left(-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right)$

Bảng biến thiên:



=> Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge 7$

Vậy có 2011 giá trị của m nhỏ hơn 2018

+ Với $\cos x=0\Rightarrow\begin{cases}\sin 2x=2\sin x\cos x=0\\ \cos 2x=2\cos^2 x-1=-1\end{cases}$ thì $(1)\Rightarrow -m-1=m-1\Leftrightarrow m=0$