$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-3)^2}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x-1}{x-3}=+\infty.$$

Dạng 3: Giới hạn vô định dạng $\frac{\infty}{\infty}$

Câu 6: Đáp án B

$+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x+1}=-\infty$; $+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2+3}{5x^2-x^3}=-1$;

$+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{x^2-5x}=0$; $+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-1}{3x+x^2}=2$;

Câu 7: Đáp án C

$+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)(3-2x-5x^3)}{x(x^3-1)}=-5$. $+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(2x^2+1)(2x^2+x)}{(2x^4+x)(x+1)}=0$.

$+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x^2+1)(2x^2-x+4)}{x^3(3x+1)}=\frac{2}{3}$. $+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(3x^2+1)(2-x^3)}{(2x^4+x)(x+1)}=-\frac{3}{2}$.

Câu 8: Đáp án B

$+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^2+x-1}{3+x}=+\infty$. $+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+x+1}{1+2x}=-\infty$.

$+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-3x^3+x^2}{5+x-2x^2}=+\infty$. $+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x^4+1}{2-x-x^2}=+\infty$.

Câu 9: Đáp án C

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+3x}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+3}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{2}{x}}=\frac{-1+3}{-2-1}=-\frac{2}{3}$$

Câu 10: Đáp án C

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax-b\sqrt{9x^2+2}}{cx+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax+bx\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{cx+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{a+b\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{c+\frac{1}{x}}=\frac{a+3b}{c}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax-b\sqrt{9x^2+2}}{cx+1}=5\Leftrightarrow\frac{a+3b}{c}=5$.

Câu 11: Đáp án A

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x^2+3x+1}{x+2}-(ax+b)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[(4x+5)+\frac{11}{x+2}-(ax+b)\right].$$

Do đó $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x^2+3x+1}{x+2}-(ax+b)\right]=0\Rightarrow a=4;b=-5\Rightarrow a-b=9.$

Câu 12: Đáp án D

$+\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4-x-1}{x^2+x+2}=+\infty$. $+\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+2}{1+2|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+2}{1-2x}=+\infty$.

$+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^5+x-11}}{x^2+x+2}=+\infty$. $+\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{1-2x}}=-\infty$.

Câu 13: Đáp án D

$+\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3\sqrt{1+\frac{2}{x^6}}}{3x^3-1}=-\frac{1}{3}$. **Ta có**

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{2x-x^2}{8x^2-x+3}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-x^2}{8x^2-x+3}}=\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}.$

$+\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x^2-x+2}=0.$

$+\lim_{x\to+\infty}\frac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2|x|+3}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}}=2.$

Câu 14: Đáp án B

$+\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{(2x-5)(1-x)^2}{3x^3-x+1}}=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$

$+\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-1)|x|\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{x-5x^2}=\frac{2}{5}.$

$+\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2|x|}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-2|x|}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}=1.$

Câu 15: Đáp án A

$+\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}+2x}{3-4|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+2x}{3+4|x|}=\dfrac{1}{4}.$

$+\ \lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{x}{x^3-1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{(1-2x)^2x}{x^3-1}}=2$ **(do** $1-2x>0,\forall x<\dfrac{1}{2}$ **).**

$+\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{3x^4+4x^5+2}{9x^5+5x^4+4}}=\dfrac{2}{3}.$

Dạng 4: Giới hạn vô định dạng $0.\infty$.

Câu 16: Đáp án D

Cách 1: Ta có $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}=\dfrac{a-x}{ax}.\dfrac{1}{(x-a)^2}=\dfrac{-1}{ax(x-a)}.$

Do đó $\lim\limits_{x\to a^-}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{-1}{ax(x-a)}=+\infty;$

$\lim\limits_{x\to a^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{-1}{ax(x-a)}=-\infty;$

Vậy $\lim\limits_{x\to a^-}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}\neq\lim\limits_{x\to a^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}$ nên $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}$ không tồn tại.

Cách 2: Cho a một giá trị cụ thể, chẳng hạn $a=1$, thay vào hàm số rồi sử dụng MTCT để tính giới hạn. Từ đó ta tìm được đáp án đúng là **D.**

Câu 17: Đáp án C

$+\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{x^3}{2x^4+x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^3(x+1)^2}{2x^4+x^2+1}}=+\infty.$

$+\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{3x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{3x(x+1)^2}{x^2-1}}=+\infty.$

$+\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{(x+2)^2(x-1)}{x^3+x}}=1.$

$+\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{2x^4+x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x\left(x^2+1\right)^2}{2x^4+x^2+1}}=+\infty.$

Câu 18: Đáp án B

$+\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{2x+1}{x^3+x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{(2x+1)(x+1)^2}{x^3+x+2}}=-\sqrt{2}.$

$+\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{3x-11}{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{(3x-11)(1-2x)^2}{x^2+1}}=-2\sqrt{3}.$

+

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-1)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1)(x-1)\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1)\sqrt{(x-1)}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}=0.$

$+\lim\limits_{x\to-\infty}(2-3x)\sqrt{\dfrac{x+1}{5x^3+2x+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{(x+1)(2-3x)}{5x^3+2x+1}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}.$

Câu 19: Đáp án A

Cách 1: Sử dụng MTCT.

Cách 2: Đặt $t=\dfrac{1}{x}$ thì $x=\dfrac{1}{t}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}t=0$ và

$$x^2\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}-\sqrt{\frac{x+3}{x}}\right)=\frac{\sqrt{1+2t}-\sqrt[3]{1+3t}}{t^2}=\frac{\sqrt{1+2t}-(t+1)}{t^2}+\frac{(t+1)-\sqrt[3]{1+3t}}{t^2}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1+2t}+(t+1)}+\frac{t+3}{(t+1)^2+(t+1)\sqrt[3]{1+3t}+\sqrt[3]{(1+3t)^2}}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}-\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}\right)=\lim\limits_{t\to0}\left[\dfrac{-1}{\sqrt{1+2t}+(t+1)}+\dfrac{t+3}{(t+1)^2+(t+1)\sqrt[3]{1+3t}+\sqrt[3]{(1+3t)^2}}\right]$

Câu 20: Đáp án C

Cách 1: Sử dụng MTCT.

Cách 2: Đặt $t=\dfrac{\pi}{4}-x$ thì $x=\dfrac{\pi}{4}-t$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}t=0$ **và**

$$\tan2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\tan2\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\tan t=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)\tan t$$

$$=\cot2t\tan t=\frac{\cos2t}{\sin2t}.\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{2t}{\sin2t}.\frac{\sin t}{t}.\frac{\cos2t}{2\cos t}.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan2x\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{2t}{\sin2t}.\dfrac{\sin t}{t}.\dfrac{\cos2t}{2\cos t}=\dfrac{1}{2}.$

Dạng 5: Dạng vô định $\infty-\infty$.

Câu 21: Đáp án B

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giới hạn với một giá trị cụ thể của n rooif so sánh với đáp án. Chẳng hạn $n=3$ ta có $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)=1.$

Cách 2: $\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}=\frac{n-\left(1+x+x^2+...+x^{n-1}\right)}{1-x^n}=\frac{1-x+1-x^2+...+1-x^{n-1}}{1-x^n}$

$=\frac{1+(1+x)+\left(1+x+x^2\right)+....+1+x+x^2+...+x^{n-2}}{1+x+x^2+...+x^{n-1}}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right)=\frac{n-1}{2}.$

Lưu ý: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right)=\frac{n-1}{2}.$

Câu 22: Đáp án B

Theo câu 41, ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{3}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}\right)=1.$

Lại có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(mx+2)=m+2.$ Để $f(x)$ có giới hạn tại điểm $x=1$ thì $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\Leftrightarrow m+2=1\Leftrightarrow m=-1.$

Câu 23: Đáp án A

Ta có $\frac{1}{x-1}-\frac{k}{x^2-1}=\frac{x+1-k}{x^2-1}$. Mà $\lim\limits_{x\to 1}(x+1-k)=2-k;\ \lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-1\right)=0$ nên để $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{k}{x^2-1}\right)$ là hữu hạn thì điều kiện cần là $2-k=0\Leftrightarrow k=2.$

Thật vậy, khi $k=2,\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}$. Nên $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{k}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$

Lưu ý: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{k}{x^n-1}\right)$ hữu hạn $\Leftrightarrow k=n.$

Câu 24: Đáp án B

Cách 1: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn. Đến ý B ta được giới hạn bằng -1. Vậy đáp án đúng là **B.**

Cách 2: Ta thấy ngay A và C là các giới hạn vô cực, B và D là dạng vô định $\infty-\infty$. Ta xét giới hạn ở ý **B.**

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\dfrac{2x}{-x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}-1}=-1.$ Vậy đáp án là **B.**

Bổ sung:

$+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=+\infty$ $+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)=+\infty$

$+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}=1.$

Câu 25: Đáp án D

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giới hạn khi $a=1$ và $a=0$, ta được

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+5}+x\right)=\dfrac{3}{2};\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x+5}=+\infty.$ Từ đó suy ra đáp án đúng là **D**

Cách 2: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+5}+ax\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(a-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}\right).$

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}=-\infty$ nên để $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+5}+ax\right)=+\infty$ thì $a-1<0\Leftrightarrow a<1.$

Câu 26: Đáp án D

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(a-\sqrt{1+\dfrac{b}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\right).$

Do đó nếu $a\neq1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=\infty.$ Vậy $a=1.$ Khi đó

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-bx-2}{x+\sqrt{x^2+bx+2}}=-\dfrac{b}{2}.$

Vậy: $-\dfrac{b}{2}=3\Leftrightarrow b=-6.$ Do đó $a+b=-5.$

Câu 27: Đáp án C

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax+b-\sqrt{x^2-6x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(a-\sqrt{1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\right)+b.$

Do đó nếu $a\neq1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax+b-\sqrt{x^2-6x+2}\right)=\infty.$ Vậy $a=1.$ Khi đó ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+b-\sqrt{x^2-6x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x-2}{x+\sqrt{x^2-6x+2}}+b=\dfrac{6}{2}+b=b+3.$

Vậy: $-b+3=5\Leftrightarrow b=2.$ DO đó số lớn hơn trong hai số a và b là số 2. Chọn đáp án **C.**

Câu 28: Đáp án C

Cả bốn giới hạn đều có dạng $\infty-\infty$, tuy nhiên chỉ có giới hạn ở ý C, hệ số trong hai số hạng là khác nhau.Theo kết quả đã biết thì giới hạn ở ý C chắc chắn là $-\infty$. Do đó đáp án đúng là C, Thật vậy:

$$+\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+3}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2+3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3}{-x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2+\frac{3}{x}}\right)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

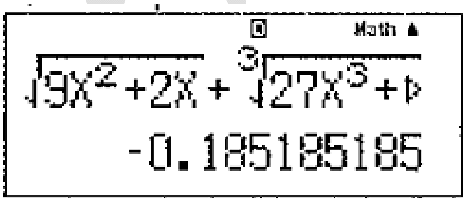
$$+\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+1}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)}=-\frac{1}{4}.$$

$$+\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x+1}+5x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{9+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+5\right)=-\infty.$$

$$+\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+5x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-5x}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3x^2+5x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-5x}{-x\left(\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3+\frac{5}{x}}\right)}=\frac{5}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

Câu 29: Đáp án A

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả



Áp dụng kĩ thuật tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn ta có

$0,(185)=\frac{5}{27}$. Vậy $\frac{m}{n}=\frac{5}{27}$.

Từ đó chọn đáp án đúng là **A.**

Cách 2: $\sqrt{9x^2+2x}+\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5}=\left(\sqrt{9x^2+2x}+3x\right)+\left(\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5}-3x\right)$

$$=\frac{2x}{\sqrt{9x^2+2x}-3x}-\frac{4x^2+5}{\sqrt[3]{\left(27x^3+4x^2+5\right)^2}+3x\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5}+9x^2}.$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+2x}+\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5}\right)=\frac{2}{-6}+\frac{4}{9+9+9}=-\frac{5}{27}.$

Từ đó chọn đáp án đúng là **A.**

Câu 30: Đáp án B

Làm tương tự như câu 49, ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}\right)=\dfrac{-a}{6}+\dfrac{b}{27}=\dfrac{2b-9a}{54}$.

Do đó $2b-9a=14$. Suy ra a là số chẵn. Vậy $a+2b$ là số chẵn. Từ đó loại được đáp án A và C.

Giải hệ $\begin{cases}a+2b=34\\2b-9a=14\end{cases}$ được $a=2;b=16$.

Giải hệ $\begin{cases}a+2b=36\\2b-9a=14\end{cases}$ được $a=\dfrac{11}{5}$ (loại).

Vậy B là đáp án đúng.

HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng (a,b) và $x_0\in(a;b)$. Hàm số $y=f(x)$ được gọi là *liên tục* tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

STUDY TIP

Khi xét tính liên tục của hàm số tại một điểm, đặc biệt lưu ý đến điều kiện hàm số xác định trên một khoảng (dù nhỏ) chứa điểm đó.

Định nghĩa 2

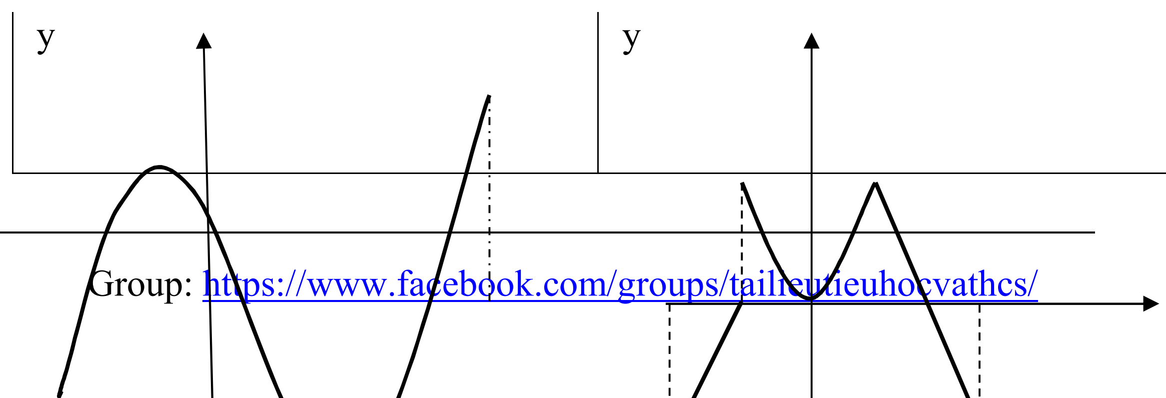
Hàm số $y=f(x)$ được gọi là ***liên tục trên một khoảng*** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

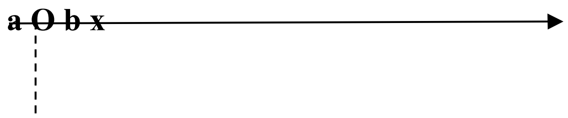
Hàm số $y=f(x)$ được gọi là ***liên tục trên một đoạn*** $[a,b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$; $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$

Khái niệm liên tục của hàm số trên nửa khoảng như $[a;b),(a;b],[a;+\infty),(-\infty;b]$ được định nghĩa một cách tương tự.

STUDY TIP

Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó



	a O b x
Đồ thị của hàm số liên tục trên khoảng $(a;b)$.	Đồ thị của hàm số không liên tục trên khoảng $(a;b)$.

Định lý 2

Giả sử $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_o. Khi đó:

a) Các hàm số $y=f(x)+g(x), y=f(x)-g(x), y=f(x).g(x)$ liên tục tại điểm x_o.

b) Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm x_o nếu $g(x)\neq 0$.

STUDY TIP

Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó (trong trường hợp thương, giá trị của mẫu tại điểm đó phải khác 0).

2. **Một số định lí cơ bản**

Định lí 1

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

b) Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức), các hàm số lượng giác, hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

(Các hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit sẽ được học trong chương trình lớp 12)

STUDY TIP

Các hàm số sơ cấp liên tục trên từng khoảng xác định của chúng

Định lí 3

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

Nói cách khác:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a;b)$.

STUDY TIP

Một phương pháp chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(a;b)$:

- Chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

- Chứng minh $f(a).f(b) < 0$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM SỐ LIÊN TỤC

DẠNG 1. XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

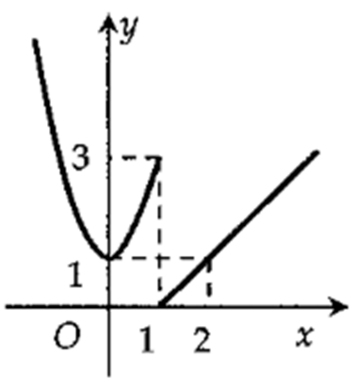
Phương pháp chung:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 ta làm như sau:

- Tính $f(x_0)$;
- Tính $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ thì kết luận hàm số liên tục tại x_0.
- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại hoặc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì kết luận hàm số không liên tục tại x_0.

Khi xét tính liên tục của hàm số trên một tập, ta sử dụng Định lí 1, Định lí 2 đã nêu trong phần Lí thuyết.

Câu 48: Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị dưới đây gián đoạn tại điểm có hoành độ bằng bao nhiêu?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Đáp án B.

Lời giải

Quan sát đồ thị ta thấy $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3; \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$. Vậy $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ nên $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ không tồn tại. Do đó hàm số gián đoạn tại điểm $x = 1$.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-3;2)$. **D.** $(-3;+\infty)$.

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số có dạng phân thức hữu tỉ xác định trên tập hợp $D=(-\infty;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;+\infty)$ nên theo Định lí 1, hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;-3);(-3;-2);(-2;+\infty)$. Vì $(2;3)\subset(-2;+\infty)$ nên đáp án đúng là **B.**

STUDY TIP

Các hàm số sơ cấp liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

D. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(1;2)$ và $(2;+\infty)$.

Đáp án D.

Lời giải

$f(x)$ là hàm phân thức hữu tỉ, có tập xác định là $(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$ nên theo Định lí 1, $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(1;2)$ và $(2;+\infty)$.

STUDY TIP

Thật ra rút gọn ta được $f(x)=\dfrac{x-2}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{x-1}$ nhưng không vì thế mà kết luận $f(x)$ trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Chú ý: Không được rút gọn biểu thức của hàm số trước khi tìm tập xác định!

Câu 51: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-5} & \text{khi } x>5\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau?

A. $f(x)$ liên tục tại $x=7$. **B.** $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

C. $f(x)$ liên tục trên $[5;+\infty)$. **D.** $f(x)$ liên tục trên $(5;+\infty)$.

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ xác định trên $D=[5;+\infty)\cup\{0\}$. Theo định lí 1, $f(x)$ liên tục trên $[5;+\infty)$. Do đó $f(x)$ liên tục trên $(5;+\infty)$ và tại $x=7$. Vậy A, C, D đúng suy ra B sai .

Thật vậy, vì không tồn tại khoảng $(a;b)$ nào chứa điểm $x=0$ mà $f(x)$ xác định trên $(a;b)$ nên không thể xét tính liên tục của $f(x)$ tại $x=0$. Do đó không thể khẳng định $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Câu 52: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x+2 \text{ khi } x<-1\\ x^2-1 \text{ khi } x\ge -1\end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;-1]$.

C. $f(x)$ liên tục trên $[-1;+\infty)$.

D. $f(x)$ liên tục tại $x=-1$.

Đáp án C.

Lời giải

Trên $[-1;+\infty)$, $f(x)=x^2-1$ nên theo định lí 1, $f(x)$ liên tục trên $[-1;+\infty)$. Vậy chọn đáp án đúng là C.

Giải thích thêm:

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(3x+2)=-1$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(x^2-1\right)=0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\ne\lim\limits_{x\to(-1)^+}$ nên $\lim\limits_{x\to(-1)}$ không tồn tại.

Do đó $f(x)$ không liên tục tại $x=-1$ nên A,D sai.

Mặt khác $f(-1)=(-1)^2-1=0$. Vậy $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\ne f(-1)$ nên $f(x)$ không liên tục trên $(-\infty;-1]$. Do đó B sai.

Câu 53: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} \text{ khi } x\ne 2\\ mx+1 \text{ khi x=2}\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=2$.

A. $m=\dfrac{17}{2}$.

B. $m=\dfrac{15}{2}$.

C. $m=\dfrac{13}{2}$.

D. $m=\dfrac{11}{2}$.

Đáp án D.

Lời giải

$f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(2)=2m+1$ và $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+2x+4\right)=12$.

(có thể dùng MTCT để tính giới hạn của hàm số)

Để $f(x)$ liên tục tại $x=2$ thì $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow 2m+1=12\Leftrightarrow m=\dfrac{11}{2}$.

Câu 54: Chon hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} & \text{khi } x\neq 3\\ m & \text{khi } x=3\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=3$.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Đáp án A.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

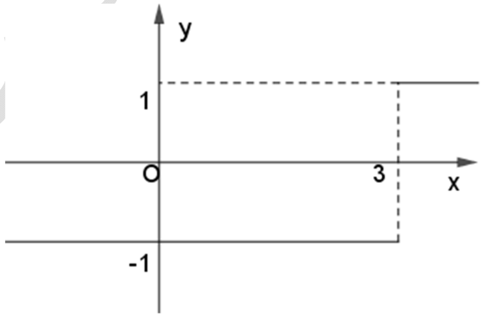
Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}(-1)=-1$.

Tương tự ta có $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=1$.(có thể dùng MTCT để tính giới hạn của hàm số)

Vậy $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ không tồn tại. Vậy với mọi m, hàm số đã cho không liên tục tại $x=3$.

Do đó đáp án đúng là **A.**

Ta có thể tam khảo thêm đồ thị của hàm số khi $x\neq 3$ để hiểu rõ hơn.



Câu 55: Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 4x^2+5b & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

A. $a=5b$. **B.** $a=10b$. **C.** $a=b$. **D.** $a=2b$.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Theo kết quả đã biết thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+1}-1}{x} = \frac{a}{2}$. Mặt khác $f(0)=5b$. Để hàm số đã cho liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \frac{a}{2} = 5b \Leftrightarrow a = 10b$. Vậy đáp án đúng là **B**.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Chọn các giá trị cụ thể của a và b thỏa mãn từng hệ thức rồi tính toán cho đến khi được kết quả $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Chẳng hạn với hệ thức ở đáp án A, chọn $a=5;b=1$ ta tìm được $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5x+1}-1}{x} = \frac{5}{2}; f(0)=5$ nên không thỏa mãn.

Với hệ thức ở đáp án B, chọn $a=10;b=1$ ta được $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{10x+1}-1}{x} = 5; f(0)=5$ nên thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Do đó đáp án là B.

STUDY TIP

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{ax+1}-1}{x} = \frac{a}{n}$.

Câu 56: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x\ge 2\\ \dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=3$. **B.** $m=4$. **C.** $m=5$. **D.** $m=6$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$.

Ta có $f(2)=3; \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{2x-4}+3\right)=3$.

Nếu $m=6$ thì $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+1}{x^2-12x+20} = -\infty$ nên hàm số không liên tục tại $x=2$.

Nếu $m\ne 6$ thì ta có $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} = \frac{3}{6-m}$.

Để hàm số liên tục tại $x=2$ thì $\frac{3}{6-m} = 3 \Leftrightarrow 6-m=1 \Leftrightarrow m=5$.

Với $m=5$ thì khi $x<2$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2-10x+17}$ liên tục trên $(-\infty;2)$.

Tóm lại với $m=5$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Cách 2: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$.

Ta có $f(2)=3; \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{2x-4}+3\right)=3$.

Thử lần lượt các giá trị từ A dến C thấy $m=5$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3$. Do đó chọn đáp án C.

DẠNG 2. CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

Phương pháp chung:

Một phương pháp chứng minh phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên khoảng $(a;b)$:

- Chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.
- Chứng minh $f(a).f(b)<0$.
- Từ đó kết luận phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm ta cần tìm được hai số a và b sao cho hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a;b]$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn$[a;b]$ và $f(a).f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong khoảng$(a;b)$.

B. Nếu $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

C. Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ phải liên tục trên khoảng $(a;b)$.

D. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục, tăng trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

Đáp án D.

Lời giải

A sai. Chẳng hạn xét hàm số $f(x)=x^2-5$. Hàm số này xác định trên đoạn $[-3;3]$ và liên tục trên đó, đồng thời $f(-3).f(3)=4.4=16>0$ nhưng lại có hai nghiệm $x_1=-\sqrt{5};x_2=\sqrt{5}$ thuộc vào khoảng $(-3;3)$.

B sai . vì thiếu điều kiện $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

C sai. Chẳng hạn xét hàm số $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ khi x} <0 \\ x+2 \text{ khi } x\geq 0\end{cases}$. Hàm số này xác định trên đoạn $[-3;3]$, có nghiệm $x=-1$ thuộc vào khoảng $(-3;3)$ nhưng gián đoạn tại điểm $x=0\in(-3;3)$, tức là không liên tục trên $(-3;3)$.

Vậy D đúng. Thật vậy:

- Vì hàm số $y=f(x)$ liên tục, tăng trên đoạn $[a;b]$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là $f(a)$, giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là $f(b)$.
- Nếu $f(a)>0$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là một số dương nên không có giá trị nào của x trên khoảng $(a;b)$ làm cho $f(x)=0$. Do

đó phương trình $f(x)=0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

+ Nếu $f(a)<0$, do $f(a).f(b)>0$ nên suy ra $f(b)<0$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là một số âm nên không có giá trị nào của x trên khoảng $(a;b)$ làm cho $f(x)=0$. Do đó phương trình $f(x)=0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

Câu 57: Cho phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$ (1) trong đó a,b,c là các tham số thực. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. Phương trình (1) vô nghiệm với mọi a,b,c.

B. Phương trình (1) có ít nhất một nghiệm với mọi a,b,c.

C. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm với mọi a,b,c.

D. Phương trình (1) có ít nhất ba nghiệm với mọi a,b,c.

Lời giải

Đáp án B.

Dễ thấy $a=b=c=0$ thì phương trình (1) trở thành $x^3=0 \Leftrightarrow x=0$. Vậy A, C, D sai. Do đó B đúng.

Giải thích thêm: Xét bài toán "Chứng minh rằng phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$ (1) luôn có ít nhất một nghiệm với mọi a,b,c". Ta có lời giải cụ thể như sau:

Đặt $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Ta có:

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+ax^2+bx+c\right)=-\infty$ với mọi a,b,c nên tồn tại một giá trị $x=x_1$ sao cho $f(x_1)<0$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+ax^2+bx+c\right)=+\infty$ với mọi a,b,c nên tồn tại một giá trị $x=x_2$ sao cho $f(x_2)>0$.

Vậy $f(x_1).f(x_2)<0$ mà $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên suy ra $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(x_1;x_2)$. Từ đó suy ra ĐPCM.

STUDY TIP

Phương trình đa thức bậc lẻ $a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+...+a_1x+a_0=0$ trong đó $a_{2n+1}\neq 0$ luôn có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của $a_i, i=\overline{2n+1,0}$.

Câu 58: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình: $\left(m^2-3m+2\right)x^3-3x+1=0$ có nghiệm.

A. $m\in\{1;2\}$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **D.** $m\in\varnothing$.

Lời giải

Đáp án B.

Nếu $m^2-3m+2=0$: Phương trình đã cho trở thành $-3x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

Nếu $m^2-3m+2\neq 0$: theo **STUDY TIP** vừa nêu thì phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Tóm lại với mọi $m\in\mathbb{R}$ thì phương trình đã cho luôn có nghiệm. Do đó B đúng.

Câu 59: Cho phương trình $x^4-3x^3+x-\frac{1}{8}=0$ (1). Chọn khẳng định đúng:

A. Phương trình (1) có đúng một nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

B. Phương trình (1) có đúng hai nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

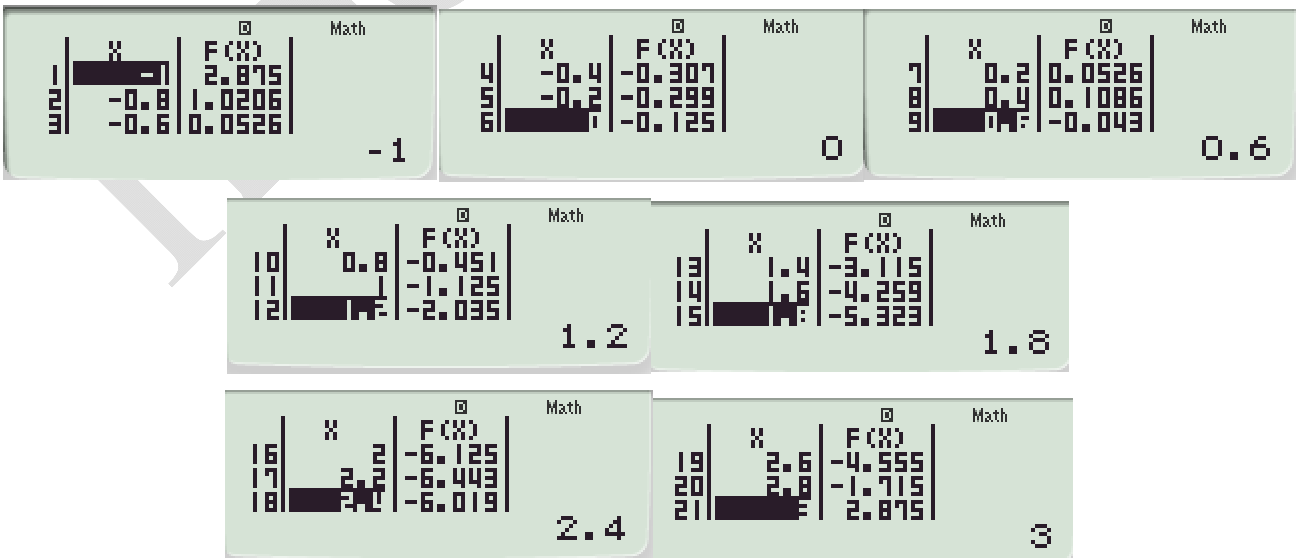
C. Phương trình (1) có đúng ba nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

D. Phương trình (1) có đúng bốn nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

Lời giải

Đáp án D.

Cách 1: Sử dụng chức năng Table trên MTCT: $f(X)=X^4-3X^3+X-\frac{1}{8}$, Start: -1, End: 3, Step: 0.2 ta được kết quả như sau:



Quan sát kết quả ta thấy giá trị của $f(x)$ tại các điểm trong khoảng $(-1;3)$ đổi dấu 4 lần. Mà phương trình bậc 4 thì có tối đa 4 nghiệm thực. Vậy phương trình (1) có đúng bốn nghiệm trên khoảng $(-1;3)$. Do đó D là đáp án đúng.

Cách 2: Sử dụng chức năng Shift Calc (Solve) của MTCT để tìm nghiệm xáp xỉ của phương trình trong khoảng $(-1;3)$. Tuy nhiên cách này tiềm ẩn nhiều may rủi hơn cách sử dụng chức năng Table như trên.

STUDY TIP

Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(x)$ đổi dấu khi x từ a qua b thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

Câu 60: Cho phương trình $2x^4-5x^2+x-+1=0$ (1). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

B. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

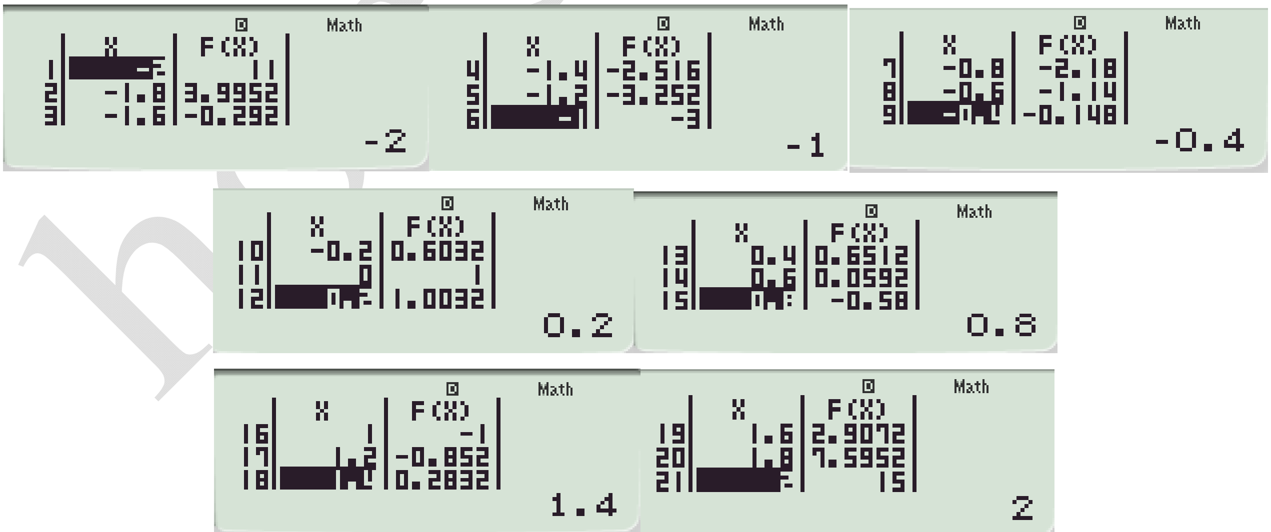
C. Phương trình (1) chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2;1)$.

D. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0;2)$.

Lời giải

Đáp án D.

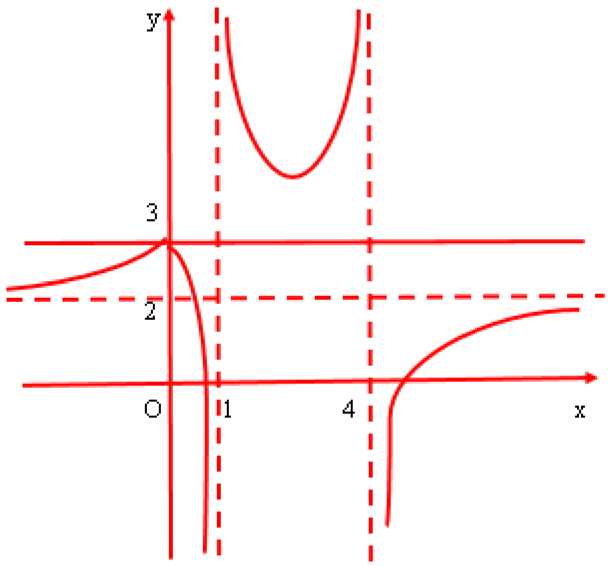
Cách 1: Sử dụng chức năng Table trên MTCT: $f(X)=2X^4-5X^2+X+1$, Start: -2, End: 2, Step: 0.2 ta được kết quả như sau:



Quan sát kết quả ta thấy trên khoảng $(-1;1)$ phương trình có ít nhất hai nghiệm, trên khoảng $(-2;0)$ phương trình có ít nhất hai nghiệm, trên khoảng $(-2;1)$ phương trình có ít nhất ba nghiệm, trên khoảng $(0;2)$ phương trình có ít nhất hai nghiệm. Vậy D là đáp án đúng.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Chọn khẳng định đúng:

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số liên tục trên $(-\infty;4)$.

C. Hàm số liên tục trên $(1;+\infty)$.

D. Hàm số liên tục trên $(1;4)$.

Câu 2. Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}, & x>1 \\ \dfrac{1}{4}, & x=1 \\ \dfrac{x^2-1}{x^2-7x+6}, & x<1. \end{cases}$$

Chọn khẳng định đúng:

A. $f(x)$ liên tục tại $x=6$ và không liên tục tại $x=1$.

B. $f(x)$ liên tục tại $x=6$ và tại $x=1$.

C. $f(x)$ không liên tục tại $x=6$ và liên tục tại $x=1$.

D. $f(x)$ liên tục tại $x=6$ và tại $x=1$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^4+4x^2}}{x} & khi\ x\neq 0\\ m-3 & khi\ x=0\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=0$.

A. Không có giá trị nào của m thỏa mãn. **B.** $m=5$.

C. $m=1$. **D.** $m\in\{1;5\}$.

Câu 4. Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để hàm số sau liên tục tại $x=0$.

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax+1}\sqrt[3]{bx+1}-1}{x} & khi\ x\neq 0\\ a+b & khi\ x=0\end{cases}$.

A. $a+b=0$. **B.** $2a+b=0$. **C.** $3a+4b=0$. **D.** $3a+2b=0$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right) & khi\ x<1\\ m^3x+3-3m & khi\ x\geq 1\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m\in\{1;2\}$. **B.** $m\in\{1;-2\}$. **C.** $m\in\{-1;2\}$. **D.** $m\in\{-1;-2\}$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+6}-a}{\sqrt{x+1}-2} & khi\ x\neq 3\\ x^3-(2b+1)x & khi\ x=3\end{cases}$. Trong đó a và b là các tham số thực. Biết hàm số liên tục tại $x=3$. Số nhỏ hơn trong hai số a và b là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{2}{x} & khi\ x>0\\ a\cos x-5 & khi\ x\leq 0\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a=5$. **B.** $a=7$.

C. $a=\dfrac{11}{2}$. **D.** Không có giá trị nào của a thỏa mãn.

Câu 8. Cho phương trình $4x^4+2x^2-x-3=0$ (1). Chọn khẳng định đúng:

A. Phương trình (1) vô nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

B. Phương trình (1) có đúng một nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

C. Phương trình (1) có đúng hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

D. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $\left(m^2-5m+4\right)x^5+2x^2+1=0$ có nghiệm.

A. $m\in\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$.
B. $m\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.
C. $m\in\{1;4\}$.
D. $m\in\mathbb{R}$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình sau có nghiệm $\left(2m^2-5m+2\right)(x-1)^{2017}\left(x^{2018}-2\right)+2x+3=0$.

A. $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2};2\right\}$.
B. $m\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.
C. $m\in\left\{\dfrac{1}{2};2\right\}$.
D. $m\in\mathbb{R}$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 42. Đáp án D.

Rõ ràng hàm số không liên tục tại $x=1$ và $x=4$. Do đó đáp án đúng là D.

Câu 43. Đáp án A.

Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. Do đó hàm số liên tục tại $x=6$. Ta có

$+\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\dfrac{1}{4}$;

$+\ \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x^2-7x+6}=-\dfrac{2}{5}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ không tồn tại nên hàm số không liên tục tại $x=1$. Do đó đáp án đúng là A.

Câu 44. Đáp án A.

Ta có $\dfrac{\sqrt{x^4+4x^2}}{x}=\dfrac{|x|\sqrt{x^2+4}}{x}=\begin{cases}\sqrt{x^2+4} & khi\, x>0\\ -\sqrt{x^2+4} & khi\, x<0\end{cases}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=2;\ \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-2$. (có thể dùng MTCT để tìm giới hạn một bên).

Vậy hàm số không có giới hạn tại $x=0$ nên không liên tục tại $x=0$. Vậy không có giá trị nào của m để hàm số liên tục tại $x=0$. Đáp án đúng là A.

Câu 45. Đáp án C.

Theo kết quả đã biết thì $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{ax+1}.\sqrt[3]{bx+1}-1}{x}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}$.

Để hàm số liên tục tại $x=0$ thì $\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}=a+b\Leftrightarrow3a+4b=0$.

Vậy C là đáp án đúng.

Nếu sử dụng MTCT, với mỗi hệ thức ta chọn các giá trị của a và b thỏa mãn hệ thức, thay vào hàm số tính $f(0)$ và $\lim\limits_{x\to0}f(x)$. Nếu $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$ thì đó là hệ thức đúng.

Câu 46. Đáp án B.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Theo kết quả đã biết thì $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{3-1}{2}=1$. (Có thể dùng MTCT để tìm giới hạn trên).

Mặt khác $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(m^3x+3-3m\right)=m^3-3m+3=f(1)$

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x=1\Leftrightarrow m^3-3m+3=1\Leftrightarrow m^3-3m+2=0\Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=-2$. (Sử dụng chức năng giải phương trình bậc 3 của MTCT). Vậy đáp án đúng là B.

Câu 47. Đáp án B.

$f(3)=27-3(2b+1)$. Đặt $g(x)=\sqrt{x+6}-a$. Ta có $g(3)=3-a$.

Ta thấy nếu $g(3)\neq 0\Leftrightarrow a\neq 3$ thì $\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{g(x)}{\sqrt{x+1}-2}=\infty$ nên hàm số không thể liên tục tại $x=3$.

Nếu $a=3$ thì $\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}=\dfrac{2}{3}$.

Hàm số liên tục tại $x=3\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to3} f(x)=f(3)\Leftrightarrow 27-3(2b+1)=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow b=\dfrac{35}{9}$.

Vậy $a=3$ và $b=\dfrac{35}{9}$. Số nhỏ hơn là $a=3$.

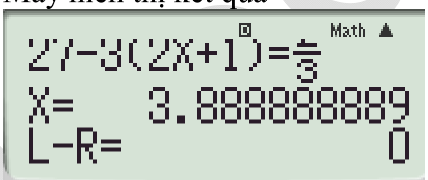
Do đó đáp án đúng là B.

Lưu ý: Để giải phương trình $27-3(2b+1)=\dfrac{2}{3}$ ta có thể làm như sau:

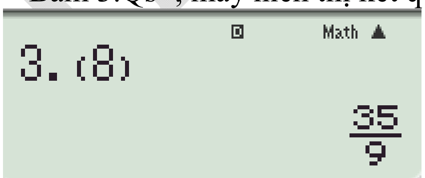
+ Nhập vào màn hình $27-3(2X+1)=\dfrac{2}{3}$.

+ Bấm SHIFT CALC (SOLVE), máy báo SOLVE FOR X nhập 1=

Máy hiển thị kết quả



+ Bấm 3.Qs=, máy hiển thị kết quả



Vậy phương trình có nghiệm $b=\dfrac{35}{9}$.

Câu 48. Đáp án A.

Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (a\cos x - 5) = a - 5 = f(0)$.

Ta có với mọi $x: \left|x\sin\dfrac{2}{x}\right| \le |x|$. Suy ra $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x\sin\dfrac{2}{x}\right) = 0$.

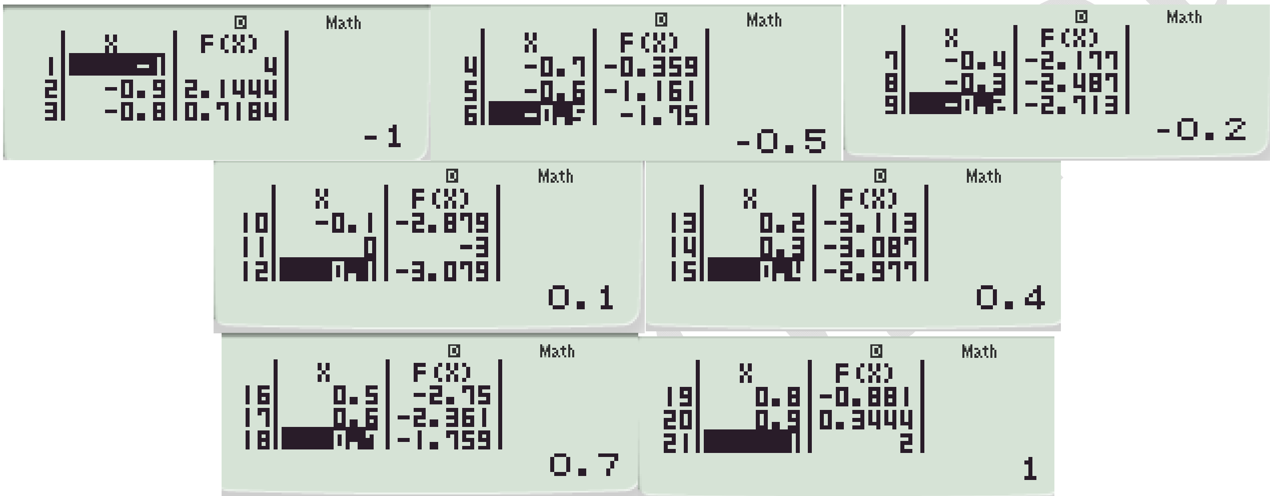
Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow a - 5 = 0 \Leftrightarrow a = 5$.
Vậy đáp án đúng là A.

Câu 49. Đáp án D.

Sử dụng chức năng TABLE của MTCT với

$+\ f(X) = 4X^4 + 2X^2 - X - 3$.

$+$ Start: -1; End: 1; Step: $0,1$.



Ta thấy giá trị $f(x)$ tại các điểm đổi dấu hai lần. Suy ra $f(x)$ xót ít nhất hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$. Vậy đáp án đúng là D.

Câu 50. Đáp án A.

$+$ Nếu $m^2 - 5m - 4 = 0 \Leftrightarrow m \in \{1;4\}$ thì phương trình đã cho trở thành $2x^2 + 1 = 0$. Đây là một phương trình vô nghiệm.

$+$ Nếu $m^2 - 5m - 4 \ne 0$ thì theo kết quả đã biết, phương trình luôn có ít nhất một nghiệm.
Vậy để phương trình đã cho có nghiệm thì $m \in \mathbb{R} \setminus \{1;4\}$.

Câu 51. Đáp án D.

$+$ Nếu $2m^2 - 5m + 2 = 0$ thì phương trình đã cho trở thành $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$.

$+$ Nếu $2m^2 - 5m + 2 \ne 0$, phương trình đã cho là một đa thưc bậc lẻ (bậc 4035) nên theo kết quả đã biết, phương trình có ít nhất một nghiệm.
Vậy với mọi $m \in \mathbb{R}$, phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm.