**Câu 2.** Cho cấp số nhân $(a_n)$ có $a_1 = 3$ và $a_2 = -6$. Tìm số hạng thứ năm của cấp số nhân đã cho.

**A.** $a_5 = -24$ . **B.** $a_5 = 48$ . **C.** $a_5 = -48$ . **D.** $a_5 = 24$.

**Lời giải**

**Đáp án B**

Ta có công bội của cấp số nhân là $q = \dfrac{a_2}{a_1} = -2.$

Suy ra $a_5 = a_1.q^4 = 3.(-2)^4 = 48$.

Vậy phương án đúng là **B**.

**Nhận xét:** *Với dữ kiện của ví dụ này, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi sau đây:*

**Câu 1.** Cho cấp số nhân $(a_n)$ có $a_1 = 3$ và $a_2 = -6$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân đã cho.

**A.** $u_n = 3.(-2)^n$. **B.** $u_n = 3.(-2)^{n-1}$. **C.** $u_n = 3.(2)^{n-1}$. **D.** $u_n = 3.(2)^n$.

**Câu 2.** Cho cấp số nhân $(a_n)$ có $a_1 = 3$ và $a_2 = -6$. Tìm tổng $S$ của 50 số hạng đầu tiên cấp số nhân đã cho.

**A.** $S = 2^{50} - 1$. **B.** $S = 2^{51} - 1$. **C.** $S = 1 - 2^{50}$. **D.** $S = 1 - 2^{51}$.

**Câu 3.** Cho cấp số nhân $(a_n)$ có $a_1 = 3$ và $a_2 = -6$. Biết rằng $S_k = -16383$, tính $a_k$.

**A.** $a_k = -24576$. **B.** $a_k = 24576$. **C.** $a_k = -49152$. **D.** $a_k = 49152$.

**Câu 3.** Cho cấp số nhân $(x_n)$ có $\begin{cases} x_2 - x_4 + x_5 = 10 \\ x_3 - x_5 + x_6 = 20 \end{cases}$. Tìm $x_1$ và công bội $q$.

**A.** $x_1 = 1, q = 2$. **B.** $x_1 = -1, q = 2$. **C.** $x_1 = -1, q = -2$. **D.** $x_1 = 1, q = -2$.

***Lời giải***

Ta có $\begin{cases} x_2 - x_4 + x_5 = 10 \\ x_3 - x_5 + x_6 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2\left(1 - q^2 + q^3\right) = 10 \\ x_2 q\left(1 - q^2 + q^3\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ q = 2 \end{cases}$.

Suy ra $x_1 = \dfrac{x_2}{q} = 1$. Vậy phương án đúng là A.

**Câu 4.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có tổng $n$ số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1$. Tìm số hạng đầu $u_1$ và công bội $q$ của cấp số nhân đó.

**A.** $u_1 = 6, q = 5$. **B.** $u_1 = 5, q = 4$. **C.** $u_1 = 4, q = 5$. **D.** $u_1 = 5, q = 6$.

***Lời giải***

Ta có $u_1 = S_1 = 5 - 1 = 4$ và $u_2 = S_2 - S_1 = \left(5^2 - 1\right) - \left(5 - 1\right) = 20$.

**STUDY TIP**

1) Định lý Vi-ét đối với phương trình bậc ba:

Nếu phương trình bậc ba $ax^3+bx^2+cx+d=0$ có ba nghiệm $x_1,x_2,x_3$ thì:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a}. \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

2) Trong thực hành giải toán, chúng ta sử dụng kết quả này kết hợp với giả thiết của bài toán để tìm ra nghiệm của phương trình hoặc xác định được mối liên hệ giữa các hệ số của phương trình.

Trường hợp nếu $-\dfrac{d}{a}$ là hằng số thì điều kiện cần để phương trình bậc ba nói trên có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân là $x=\sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$ là nghiệm của phương trình bậc ba đó.

**Câu 5.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $u_1=3$ và $15u_1-4u_2+u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ $13$ của cấp số nhân đã cho.

**A.** $u_{13}=24567$. **B.** $u_{13}=12288$. **C.** $u_{13}=49152$. **D.** $u_{13}=3072$.

***Lời giải***

Gọi $q$ là công bội của cấp số nhân $(u_n)$.

Ta có $15u_1-4u_2+u_3=45-12q+3q^2=3(q-2)^2+33\geq 33\,\forall q$.

Suy ra $u_{13}=u_1q^{12}=12288$. Phương án đúng là B.

**Nhận xét:** *Từ kết quả của ví dụ này, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi sau:*

**Câu 15.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $u_1=3$ và $15u_1-4u_2+u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số hạng tổng quát của cấp số nhân đó là

**A.** $u_n=3.2^{n-1}$. **B.** $u_n=3.2^n-1$.

**C.** $u_n=3.(-2)^{n-1}$. **D.** $u_n=3.4^{n-1}$.

**Câu 16.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $u_1=3$ và $15u_1-4u_2+u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số $12288$ là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân đó?

**A.** $13$. **B.** $12$. **C.** $14$. **D.** $15$.

**Câu 17.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $u_1=3$ và $15u_1-4u_2+u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S_{15}$ của $15$ số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

**A.** $S_{15}=737235$. **B.** $S_{15}=-2949075$. **C.** $S_{15}=1474515$. **D.** $S_{15}=2949075$.

**Câu 18.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $u_1=3$ và $15u_1-4u_2+u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết $S_k=-5898195$, tìm $k$.

**A.** $k=16$. **B.** $k=18$. **C.** $k=19$. **D.** $k=17$.

**Câu 6.** Số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân. Biết thể tích của khối hộp là $125cm^3$ và diện tích toàn phần là $175cm^2$. Tính tổng số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó.

**A.** $30cm$. **B.** $28cm$. **C.** $31cm$. **D.** $17,5cm$.

***Lời giải***

Vì ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân nên ta có thể gọi ba kích thước đó là $\frac{a}{q}, q, aq$.

Thể tích của khối hình hộp chữ nhật là $V = \frac{a}{q}.a.qa = a^3 = 125 \Rightarrow a = 5$.

Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là

$$S_{tp} = 2\left(\frac{a}{q}.a + a.aq + aq.\frac{a}{q}\right) = 2a^2\left(1 + q + \frac{1}{q}\right) = 50\left(1 + q + \frac{1}{q}\right).$$

Theo giả thiết, ta có $50\left(1 + q + \frac{1}{q}\right) = 175 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Với $q = 2$ hoặc $q = \frac{1}{2}$ thì kích thước của hình hộp chữ nhật là $2,5cm; 5cm; 10cm$.

Suy ra tổng của ba kích thước này là $2,5 + 5 + 10 = 17,5$ cm.

Vậy phương án đúng là D.

**Câu 7.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3 - 7x^2 + 2\left(m^2 + 6m\right)x - 8 = 0$.

**A.** $m = -7$. **B.** $m = 1$.

**C.** $m = -1$ hoặc $m = 7$. **D.** $m = 1$ hoặc $m = -7$.

***Lời giải***

+ *Điều kiện cần:* Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3$ lập thành một cấp số nhân.

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1x_2x_3 = 8$.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $x_1x_3 = x_2^2$. Suy ra ta có $x_2^3 = 8 \Leftrightarrow x_2 = 2$.

+ *Điều kiện đủ:* Với $m = 1$ và $m = 7$ thì $m^2 + 6m = 7$ nên ta có phương trình

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0.$$

Giải phương trình này, ta được các nghiệm là $1, 2, 4$. Hiển nhiên ba nghiệm này lập thành một cấp số nhân với công bội $q = 2$.

Vậy, $m = 1$ và $m = -7$ là các giá trị cần tìm. Do đó phương án $D$.

**STUDY TIP**

Ta có thể chỉ ra nghiệm $x_2$ bằng cách khác:

Theo định lý Vi-ét thì $x_1 + x_2 + x_3 = 7; x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2\left(m^2 + 6m\right); x_1x_2x_3 = 8$.

Theo tính chất của cấp số nhân thì $x_1x_3 = x_2^2$. Suy ra
$2\left(m^2+6m\right) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = x_2\left(x_1+x_2+x_3\right)$.

Thay $x_1+x_2+x_3 = 7$; được $x_2 = \dfrac{2\left(m^2+6m\right)}{7}$. Thay vào $x_1x_2x_3 = 8$ ta được $\dfrac{8\left(m^2+6m\right)^3}{7^3} = 8$
$\Leftrightarrow m^2+6m-7=0$.

Nhận xét: Từ kết quả của ví dụ này, ta có thể đề xuất các câu hỏi sau đây:

**Câu 1.** Biết rằng tồn tại đúng hai giá trị của tham số $m$ để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3-7x^2+2\left(m^2+6m\right)x-8=0$. Tính tổng bình phương của hai giá trị đó.

**A.** $48$. **B.** $64$. **C.** $36$. **D.** $50$.

**Câu 2.** Biết rằng tồn tại đúng hai giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3-7x^2+2\left(m^2+6m\right)x-8=0$. Tính tổng bình phương của ba số hạng của cấp số nhân đó.

**A.** $49$. **B.** $21$. **C.** $14$. **D.** $13$.

**Câu 8.** Một khu rừng có trữ lượng gỗ là $4.10^5$ mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là $4\%$ mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ

**A.** $4.10^5.(0,05)^5$. **B.** $4.10^5.(1,4)^5$. **C.** $4.10^5.(1,04)^5$. **D.** $4.(10,4)^5$.

***Lời giải***

Đặt $u_0 = 4.10^5$ và $r = 4\% = 0,04$.

Gọi $u_n$ là trữ lượng gỗ của khu rừng sau năm thứ $n$.

Khi đó ta có $u_{n+1} = u_n + u_n(1+r), n \in \mathbb{N}$.

Suy ra $(u_n)$ là cấp số nhân với số hạng đầu $u_0$ và công bội $q = 1+r$.

Do đó số hạng tổng quát của cấp số nhân $(u_n)$ là $u_n = u_0(1+r)^n$.

Sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có:
$u_n = u_1.q^4 = 4.10^5.(1+0,04)^5 = 4.(10,4)^5$ mét khối gỗ.

Vậy phương án đúng là D.

**Câu 9.** Bài toán ***"Lãi kép"***
Một người gửi số tiền $100$ triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $7\%$/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Giả sử trong khoảng thời gian gửi người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi, hỏi sau $10$ năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được gần với số tiền nào trong các số tiền dưới đây?

**A.** 196715000 đồng. **B.** 196716000 đồng. **C.** 183845000 đồng. **D.** 183846000 đồng.

***Lời giải***

Đặt $M_0 = 10^8$ (đồng) và $r = 7\% = 0,07$.

Gọi $M_n$ là số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được sau $n$ năm.

Theo giả thiết, ta có $M_{n+1} = M_n + M_n.r = M_n(1+r), \forall n \geq 1$.

Do đó dãy số $(M_n)$ là cấp số nhân với số hạng đầu $M_0$ và công bội $q = 1+r$. Suy ra $M_n = M_0(1+r)^n$.

Vì vậy, sau $10$ năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được là

$$M_{10} = M_0(1+r)^{10} = 10^8.(1,07)^{10} \approx 196715000.$$

Vậy phương án đúng là A.

**Câu 10.** Một người gửi ngân hàng $150$ triệu đồng theo thể thức lãi kép, lãi suất $0,58\%$ một tháng (kể từ tháng thứ $2$, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền lãi tháng trước đó và tiền gốc của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có $180$ triệu đồng?

**A.** $34$ tháng. **B.** $32$ tháng. **C.** $31$ tháng. **D.** $30$ tháng.

***Lời giải***

Theo ví dụ $9$, thì sau $n$ tháng gửi tiết kiệm, ta có

$M_n = M_0(1+r)^n$, trong đó $M_0 = 15.10^7, r = 0,0058$.

Do đó $M_n = 15.10^7.(1,0058)^n$.

***Cách 1:*** Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

+ *Phương án A:* $M_{34} = 15.10^7.(1,0058)^{34} \approx 182594000$ (đồng).

+ *Phương án B:* $M_{32} = 15.10^7.(1,0058)^{32} \approx 180494000$ (đồng).

+ *Phương án C:* $M_{31} = 15.10^7.(1,0058)^{31} \approx 179453000$ (đồng).

Vậy, phương án đúng là B. (Không cần kiểm tra phương án D vì ở phương án D, số tháng ít hơn ở phương án C nên số tiền sẽ ít hơn nữa).

***Cách 2:*** Theo giả thiết, ta có $M_n = 18.10^7$ (đồng).

Do đó, ta có $18.10^7 = 15.10^7.(1,0058)^n \Leftrightarrow (1,0058)^n = \frac{6}{5}$.

Sử dụng máy tính cầm tay, ta tính được $n \approx \log\left(\frac{6}{5}\right) : \log(1,0058)$ hay $n \approx 31,526$.

Do đó $n = 32$. Vậy phương án đúng là B.

**C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG**

**Dạng 1: Bài tập về nhận dạng cấp số nhân.**

**Câu 1.** Dãy số nào dưới đây không là cấp số nhân?

**A.** $-1, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, -\frac{1}{125}$. **B.** $-\frac{1}{8}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; 1$.

**C.** $\sqrt[4]{2}; 2\sqrt[4]{2}; 4\sqrt[4]{2}; 8\sqrt[4]{2}$. **D.** $1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}$.

**Câu 2.** Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

**A.** Dãy số $(u_n)$, với $u_n = 7 - 3n$. **B.** Dãy số $(v_n)$, với $v_n = 7 - 3^n$.

**C.** Dãy số $(w_n)$, với $w_n = 7.3^n$. **D.** Dãy số $(t_n)$, với $t_n = \frac{7}{3n}$.

**Câu 3.** Trong các dãy số cho bởi công thức truy hồi sau, hãy chọn dãy số là cấp số nhân.

**A.** $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2^n.u_n \end{cases}$.

**Dạng 2: Bài tập về xác định số hạng và công bội của cấp số nhân.**

**Câu 4.** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = \frac{u_n}{4}, \forall n \geq 1$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

**A.** $u_n = 3.4^{-n}$. **B.** $u_n = 3.4^{1-n}$. **C.** $u_n = 3.4^{n-1}$. **D.** $u_n = 3.4^{-n-1}$.

**Câu 5.** Cho cấp số nhân $(x_n)$ có $x_2 = -3$ và $x_4 = -27$. Tính số hạng đầu $x_1$ và công bội $q$ của cấp số nhân.

**A.** $x_1 = -1, q = -3$ hoặc $x_1 = 1, q = 3$. **B.** $x_1 = -1, q = 3$ hoặc $x_1 = 1, q = -3$.

**C.** $x_1 = 3, q = -1$ hoặc $x_1 = -3, q = 1$. **D.** $x_1 = 3, q = 1$ hoặc $x_1 = -3, q = -1$.

**Câu 6.** Cho cấp số nhân $(a_n)$ có $a_3 = 8$ và $a_5 = 32$. Tìm số hạng thứ mười của cấp số nhân đó.

**A.** $a_{10} = \pm 1024$. **B.** $a_{10} = \pm 512$. **C.** $a_{10} = 1024$. **D.** $a_{10} = -1024$.

**Câu 7.** Cho cấp số nhân $x, 12, y, 192$. Tìm $x$ và $y$.

**A.** $x = 3, y = 48$ hoặc $x = 4, y = 36$. **B.** $x = -3, y = -48$ hoặc $x = 2, y = 72$.

**C.** $x = 3, y = 48$ hoặc $x = -3, y = -48$. **D.** $x = 3, y = -48$ hoặc $x = -3, y = 48$.

**Câu 8.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $u_1 = 5, q = 3$ và $S_n = 200$, tìm $n$ và $u_n$.

**A.** $n = 5$ và $u_n = 405$. **B.** $n = 6$ và $u_n = 1215$.

**C.** $n = 7$ và $u_n = 3645$. **D.** $n = 4$ và $u_n = 135$.

**Câu 9.** Cho cấp số nhân $(a_n)$ có $a_1 = 2$ và biểu thức $20a_1 - 10a_2 + a_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ bảy của cấp số nhân đó.

**A.** $a_7 = 156250$. **B.** $a_7 = 31250$. **C.** $a_7 = 2000000$. **D.** $a_7 = 39062$.

**Câu 10.** Một tứ giác lồi có số đo các góc lập thành một cấp số nhân. Biết rằng số đo của góc nhỏ nhất bằng $\frac{1}{9}$ số đo của góc nhỏ thứ ba. Hãy tính số đo của các góc trong tứ giác đó.

**A.** $5^0, 15^0, 45^0, 225^0$. **B.** $9^0, 27^0, 81^0, 243^0$. **C.** $7^0, 21^0, 63^0, 269^0$. **D.** $8^0, 32^0, 72^0, 248^0$.

**Câu 11.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$. Tìm số hạng đầu $u_1$ và công bội $q$ của cấp số nhân.

**A.** $u_1 = 2, q = -3$. **B.** $u_1 = 2, q = 3$. **C.** $u_1 = -2, q = 3$. **D.** $u_1 = -2, q = -3$.

**Câu 12.** Cho cấp số nhân $(a_n)$ có $a_1 = 7,\ a_6 = 224$ và $S_k = 3577$. Tính giá trị của biểu thức $T = (k+1)a_k$.

**A.** $T = 17920$. **B.** $T = 8064$. **C.** $T = 39424$. **D.** $T = 86016$.

**Dạng 3: Bài tập về tổng $n$ số hạng đầu tiên của cấp số nhân.**

**Câu 13.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $S_2 = 4$ và $S_3 = 13$. Tìm $S_5$.

**A.** $S_5 = 121$ hoặc $S_5 = \frac{181}{16}$. **B.** $S_5 = 121$ hoặc $S_5 = \frac{35}{16}$.

**C.** $S_5 = 114$ hoặc $S_5 = \frac{185}{16}$. **D.** $S_5 = 141$ hoặc $S_5 = \frac{183}{16}$.

**Câu 14.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $u_1 = 8$ và biểu thức $4u_3 + 2u_2 - 15u_1$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S_{10}$.

**A.** $S_{10} = \frac{2(4^{11}+1)}{5.4^9}$ **B.** $S_{10} = \frac{2(4^{10}+1)}{5.4^8}$ **C.** $S_{10} = \frac{2^{10}-1}{3.2^6}$ **D.** $S_{10} = \frac{2^{11}-1}{3.2^7}$

**Câu 15.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $u_1 = 2$, công bội dương và biểu thức $u_4 + \frac{1024}{u_7}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S = u_{11} + u_{12} + ... + u_{20}$.

**A.** $S = 2046$. **B.** $S = 2097150$. **C.** $S = 2095104$. **D.** $S = 1047552$.

**Câu 16.** Cho cấp số nhân $(u_n)$ có $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$. Tính $S_{21}$.

**A.** $S_{21} = \frac{1}{2}(3^{21}+1)$ **B.** $S_{21} = 3^{21} - 1$. **C.** $S_{21} = 1 - 3^{21}$. **D.** $S_{21} = -\frac{1}{2}(3^{21}+1)$.

**Dạng 4: Bài tập liên quan đến cấp số nhân.**

**Câu 17.** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3 - (3x+1)x^2 + (5m+4)x - 8 = 0$.

**A.** $m = -2$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = -4$.

**Câu 18.** Biết rằng tồn tại hai giá trị $m_1$ và $m_2$ để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $2x^3 + 2(m^2 + 2m - 1)x^2 - 7(m^2 + 2m - 2)x - 54 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = m_1^3 + m_2^3$.

**A.** $P = -56$ **B.** $P = 8$. **C.** $P = 56$ **D.** $P = -8$.

**Câu 19.** Một của hàng kinh doanh, ban đầu bán mặt hàng A với giá 100 (đơn vị nghìn đồng). Sau đó, cửa hàng tăng giá mặt hàng A lên $10\%$. Nhưng sau một thời gian, cửa hàng lại tiếp tục tăng giá mặt hàng đó lên $10\%$. Hỏi giá của mặt hàng A của cửa hàng sau hai lần tăng giá là bao nhiêu?

**A.** 120. **B.** 121. **C.** 122. **D.** 200.

**Câu 20.** Một người đem 100 triệu đồng đi gửi tiết kiệm với kỳ han 6 tháng, mỗi tháng lãi suất là $0,7\%$ số tiền mà người đó có. Hỏi sau khi hết kỳ hạn, người đó được lĩnh về bao nhiêu tiền?

**A.** $10^8.(0,007)^5$ (đồng) **B.** $10^8.(1,007)^5$ (đồng)

**C.** $10^8.(0,007)^6$ (đồng) **D.** $10^8.(1,007)^6$ (đồng)

**Câu 21.** Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh M là $1,2\%$. Biết rằng số dân của tỉnh M hiện nay là 2 triệu người. Nếu lấy kết quả chính xác đến hàng nghìn thì sau 9 năm nữa số dân của tỉnh M sẽ là bao nhiêu?

**A.** $10320$ nghìn người. **B.** $3000$ nghìn người.

**C.** $2227$ nghìn người. **D.** $2300$ nghìn người.

**Câu 22.** Tế bào E. Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại nhân đôi một lần. Nếu lúc đầu có $10^{12}$ tế bào thì sau 3 giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

**A.** $1024.10^{12}$ tế bào. **B.** $256.10^{12}$ tế bào. **C.** $512.10^{12}$ tế bào. **D.** $512.10^{13}$ tế bào.

**Câu 23.** Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng theo cách: Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích đế tháp. Biết diện tích đế tháp là $12288m^2$, tính diện tích mặt trên cùng.

**A.** $6m^2$. **B.** $12m^2$. **C.** $24m^2$. **D.** $3m^2$.

**Dạng 5: Bài tập liên quan đến cả cấp số nhân và cấp số cộng.**

**Câu 24.** Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào là sai?

**A.** Dãy số $(a_n)$, với $a_1 = 3$ và $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, $\forall n \ge 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

**B.** Dãy số $(b_n)$, với $b_1 = 1$ và $b_{n+1}\left(2b_n^2 + 1\right) = 3$, $\forall n \ge 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

**C.** Dãy số $(c_n)$, với $c_1 = 2$ và $c_{n+1} = 3c_n^2 - 10$ $\forall n \ge 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

**D.** Dãy số $(d_n)$, với $d_1 = -3$ và $d_{n+1} = 2d_n^2 - 15$, $\forall n \ge 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

**Câu 25.** Các số $x + 6y$, $5x + 2y$, $8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng, đồng thời, các số $x + \frac{5}{3}$, $y - 1$, $2x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm $x$ và $y$.

**A.** $x = -3, y = -1$ hoặc $x = \frac{3}{8}, y = \frac{1}{8}$. **B.** $x = 3, y = 1$ hoặc $x = -\frac{3}{8}, y = -\frac{1}{8}$.

**C.** $x = 24, y = 8$ hoặc $x = -3, y = -1$ **D.** $x = -24, y = -8$ hoặc $x = 3, y = 1$

**Câu 26.** Ba số $x, y, z$ lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 21. Nếu lần lượt thêm các số $2;3;9$ vào ba số đó (theo thứ tự của cấp số cộng) thì được ba số lập thành một cấp số nhân. Tính $F = x^2 + y^2 + z^2$.

**A.** $F = 389.$ hoặc $F = 395.$ **B.** $F = 395.$ hoặc $F = 179.$

**C.** $F = 389.$ hoặc $F = 179.$ **D.** $F = 441$ hoặc $F = 357.$

**D. HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Dạng 1: Bài tập về nhận dạng cấp số nhân.**

**Câu 1.** **Đáp án** $B$

Các dãy số trong các phương án $A, C$ và $D$ đảm bảo về dấu còn dãy số trong phương án $B$ thì 3 số hạng đầu âm còn số hạng thứ tư là dương nên dãy số trong phương án $B$ không phải là cấp số nhân.

**Câu 2.** **Đáp án** $C$.

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

+ Phương án $A$: Ba số hạng đầu của dãy số là $4,1,-2$ không lập thành cấp số nhân nên dãy số $(u_n)$ không phải là cấp số nhân.

+ Phương án $B$: Ba số hạng đầu của dãy số là $4;-2;-20$ không lập thành cấp số nhân nên dãy số $(v_n)$ không phải là cấp số nhân.

+ Phương án $C$: Ta có $w_{n+1} = 7.3^{n+1} = 3w_n, \forall n \ge 1$ nên dãy số $(w_n)$ là một cấp số nhân.

+ Phương án $D$: Ba số hạng đầu của dãy số là $\frac{7}{3}, \frac{7}{6}, \frac{7}{9}$ không lập thành cấp số nhân nên dãy số $(t_n)$ không phải là cấp số nhân.

**Câu 3.** **Đáp án** $B$.

Các kiểm tra như câu 2.

**Dạng 2: Bài tập về xác định số hạng và công bội của cấp số nhân.**

**Câu 4.** **Đáp án** $B$.

Ta có: $u_{n+1} = \frac{u_n}{4} = \frac{1}{4}.u_n$ nên $(u_n)$ là cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{4}$. Suy ra số hạng tổng quát là

$$u_n = u_1.q^{n-1} = 3.\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 3.4^{1-n}.$$

Vậy phương án đúng là $B$.

**Câu 5.** **Đáp án** $B$.

Ta có $\begin{cases} x_2 = -3 \\ x_4 = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 q = -3 \\ x_1 q^3 = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ q = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_1 = 1 \\ q = -3 \end{cases}$.

Do đó $B$ là phương án đúng.

**Câu 6.** **Đáp án** $A$.

Ta có: $\begin{cases} a_3 = 8 \\ a_5 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 q^2 = 8 \\ a_1 q^4 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = -2 \end{cases}$.

Với $a_1 = 2, q = 2$ thì $a_{10} = a_1 q^9 = 1024$.

Với $a_1 = 2, q = -2$ thì $a_{10} = a_1 q^9 = -1024$.

Vậy $a_{10} = \pm 1024$. Suy ra $A$ là phương án đúng.

**Câu 7.** **Đáp án** $C$.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có:

$y^2 = 12.192 = 2304 \Rightarrow y = \pm 48$.

Cũng theo tính chất của cấp số nhân, ta có:

$xy = 12^2 = 144$.

Với $y = 48$ thì $x = 3$; với $y = -48$ thì $x = -3$.

Vậy phương án đúng là $C$.

**Câu 8. Đáp án** $D$.

Ta có: $S_n = u_1.\frac{1-q^n}{1-q}$ nên theo giả thiế, ta có:

$5.\frac{1-3^n}{1-3} = 200 \Leftrightarrow 3^n = 81 \Leftrightarrow n = 4$.

Suy ra $u_4 = u_1.q^3 = 135$. Vậy đáp án là $D$.

**Câu 9. Đáp án** $B$.

Gọi $q$ là công bội của cấp số nhân $(a_n)$.

Ta có $20a_1 - 10a_2 + a_3 = 2(q^2 - 10q + 20) = 2(q-5)^2 - 10 \geq -10, \forall q$.

Dấu bằng xảy ra khi $q = 5$.

Suy ra $a_7 = a_1.q^6 = 2.5^6 = 31250$.

Vậy phương án đúng là $B$.

**Câu 10. Đáp án** $B$.

**Cách 1:** Kiểm tra các dãy số trong mỗi phương án có thỏa mãn yêu cầu của bài toán không.

+ Phương án $A$: Các góc $5^0, 15^0, 45^0, 225^0$ không lập thành cấp số nhân vì $15^0 = 3.5^0$; $45^0 = 3.15^0$; $225^0 \neq 3.45^0$.

+ Phương án $B$: Các góc $9^0, 27^0, 81^0, 243^0$ lập thành cấp số nhân và $9^0 + 27^0 + 81^0 + 243^0 = 360^0$.

Hơn nữa, $9^0 = \frac{1}{9}81^0$ nên $B$ là phương án đúng.

+ Phương án $C$ và $D$: Kiểm tra như phương án $A$.

**Cách 2:** Gọi các góc của tứ giác là $a, aq, aq^2, aq^3$, trong đó $q > 1$.

Theo giả thiết, ta có $a = \frac{1}{9}aq^2$ nên $q = 3$.

Suy ra các góc của tứ giác là $a, 3a, 9a, 27a$.

Vì tổng các góc trong tứ giác bằng $360^0$ nên ta có:

$a + 3a + 9a + 27a = 360^0 \Leftrightarrow a = 9^0$.

Do đó, phương án đúng là $B$ (vì trong ba phương án còn lại không có phương án nào có góc $9^0$).

**Câu 11. Đáp án** $A$.

Ta có $u_4 + u_6 = -540 \Leftrightarrow (u_3 + u_5)q = -540$.

Kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ, ta tìm được $q = -3$.

Lại có $u_3 + u_5 = 180 \Leftrightarrow u_1(q^2 + q^4) = 180$.

Vì $q = -3$ nên $u_1 = 2$.

Vậy phương án đúng là $A$.

**Câu 12. Đáp án** $A$.

Ta có $a_6 = 224 \Leftrightarrow a_1q^5 = 224 \Rightarrow q = 2$ (do $a_1 = 7$).

Do $S_k = \dfrac{a_1\left(1-q^k\right)}{1-q} = 7\left(2^k-1\right)$ nên $S_k = 3577 \Leftrightarrow 7\left(2^k-1\right) = 3577 \Leftrightarrow 2^k = 2^9 \Leftrightarrow k = 9.$

Suy ra $T = 10a_9 = 10a_1q^8 = 17920.$

Vậy phương án đúng là $A.$

**Dạng 3: Bài tập về tổng $n$ số hạng đầu tiên của cấp số nhân.**

**Câu 13. Đáp án** $A.$

Ta có $u_3 = S_3 - S_2 = 9 \Rightarrow u_1q^2 = 9 \Rightarrow u_1 = \dfrac{9}{q^2}$

Vì $S_2 = 4$ nên $u_1 + u_1q = 4.$ Do đó $\dfrac{9}{q^2} + \dfrac{9}{q} = 4$

$\Leftrightarrow 4q^2 - 9q - 9 = 0 \Leftrightarrow q = 3$ hoặc $q = -\dfrac{3}{4}.$

+ Với $q = 3$ thì $u_1 = 1,\ u_6 = u_1q^5 = 243.$

Suy ra $S_5 = \dfrac{u_1 - u_6}{1-q} = \dfrac{1-243}{1-3} = 121.$

+ Với $q = -\dfrac{3}{4}$ thì $u_1 = 16,\ u_6 = -\dfrac{243}{64}.$

Suy ra $S_5 = \dfrac{u_1 - u_6}{1-q} = \dfrac{181}{16}.$

Vậy phương án đúng là $A.$

**Câu 14. Đáp án** $B.$

Gọi $q$ là công bội của cấp số nhân. Khi đó

$4u_3 + 2u_2 - 15u_1 = 2\left(4q+1\right)^2 - 122 \geq -122, \forall q.$

Dấu bằng xảy ra khi $4q + 1 = 0 \Leftrightarrow q = -\dfrac{1}{4}.$

Suy ra: $S_{10} = u_1.\dfrac{1-q^{10}}{1-q} = 8.\dfrac{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{10}}{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)} = \dfrac{2\left(4^{10}-1\right)}{5.4^8}$

Vậy phương án đúng là $B.$

**Câu 15. Đáp án** $C.$

Gọi $q$ là công bội của cấp số nhân, $q > 0.$

Ta có $u_4 + \dfrac{1024}{u_7} = 2q^3 + \dfrac{512}{q^6}.$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$2q^3 + \dfrac{512}{q^6} = q^3 + q^3 + \dfrac{512}{q^6} \geq 3\sqrt[3]{q^3.q^3.\dfrac{512}{q^6}} = 24.$

Suy ra $u_4+\dfrac{1024}{u_7}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $24$ khi $q^3=\dfrac{512}{q^6}\Leftrightarrow q=2.$

Ta có $S_{10}=\dfrac{u_1\left(1-q^{10}\right)}{1-q}=2^{11}-2;\ S_{10}=\dfrac{u_1\left(1-q^{20}\right)}{1-q}=2^{21}-2.$

Do đó $S=S_{20}-S_{10}=2095104.$ Vậy phương án đúng là $C.$

**Câu 16. Đáp án** $A.$

Ta có $u_4+u_6=-540\Leftrightarrow\left(u_3+u_5\right)q=-540.$

Kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ, ta tìm được $q=-3.$ Lại có $u_3+u_5=180$ $\Leftrightarrow u_1\left(q^2+q^4\right)=180.$

Vì $q=-3$ nên $u_1=2.$ Suy ra $S_{21}=\dfrac{u_1\left(1-q^{21}\right)}{1-q}=\dfrac{1}{2}\left(3^{21}+1\right).$

Vậy phương án đúng là $A.$

**Dạng 4: Bài tập liên quan đến cấp số nhân**

**Câu 17. Đáp án** $B.$

**Cách 1:** Ta có $-\dfrac{d}{a}=-\dfrac{-8}{1}=8.$

Điều kiện cần để phương trình đã choc ó ba nghiệm lập thành một cấp số nhân là $x=\sqrt[3]{8}=2$ là nghiệm của phương trình.

Thay $x=2$ vào phương trình đã cho, ta được

$4-2m=0\Leftrightarrow m=2.$

Với $m=2,$ ta có phương trình $x^3-7x^2+14x-8=0\Leftrightarrow x=1;x=2;x=4$

Ba nghiệm này lập thành một cấp số nhân nên $m=2$ là giá trị cần tìm. Vậy, $B$ là phương án đúng.

**Cách 2:** Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

**Câu 18. Đáp án** $A.$

Ta có $-\dfrac{d}{a}=-\dfrac{-54}{2}=27.$

Điều kiện cần để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân là $x=\sqrt[3]{27}=3$ phải là nghiệm của phương trình đã cho.

$\Leftrightarrow m^2+2m-8=0\Leftrightarrow m=2;m=-4.$

Vì giả thiết cho biết tồn tại đúng hai giá trị của tham số $m$ nên $m=2$ và $m=-4$ là các giá trị thỏa mãn

Suy ra $P=2^3+\left(-4\right)^3=-56.$

Vậy phương án đúng là $A.$

**Câu 19. Đáp án** $B.$

Sau lần tăng giá thứ nhất thì giá của mặt hàng $A$ là:

$M_1=100+100.10\%=110.$

Sau lần tăng giá thứ hai thì giá của mặt hàng $A$ là:
$M_2 = 110 + 110.10\% = 121$.

Suy ra phương án đúng là $B$.

**Suy ra phương án đúng là B.**

**Câu 15.** **Đáp án D.**

Số tiền ban đầu là $M_0 = 10^8$ (đồng).

Đặt $r = 0,7\% = 0,007$.

Số tiền sau tháng thứ nhất là $M_1 = M_0 + M_0 r = M_0(1+r)$.

Số tiền sau tháng thứ hai là $M_2 = M_1 + M_1 r = M_0(1+r)^2$.

Lập luận tương tự, ta có số tiền sau tháng thứ sáu là $M_6 = M_0(1+r)^6$.

Do đó $M_6 = 10^8(1,007)^6$.

**Câu 16.** **Đáp án C.**

Đặt $P_0 = 2000000 = 2.10^6$ và $r = 1,2\% = 0,012$.

Gọi $P_n$ là số dân của tỉnh $M$ sau $n$ năm nữa.

Ta có: $P_{n+1} = P_n + P_n r = P_n(1+r)$.

Suy ra $(P_n)$ là một cấp số nhân với số hạng đầu $P_0$ và công bội $q = 1+r$.

Do đó số dân của tỉnh $M$ sau $10$ năm nữa là: $P_9 = M_0(1+r)^9 = 2.10^6(1,012)^{10} \approx 2227000$.

**Câu 17.** **Đáp án C.**

Lúc đầu có $10^{22}$ tế bào và mỗi lần phân chia thì một tế bào tách thành hai tế bào nên ta có cấp số nhân với $u_1 = 10^{22}$ và công bội $q = 2$.

Do cứ $20$ phút phân đôi một lần nên sau $3$ giờ sẽ có $9$ lần phân chia tế bào. Ta có $u_{10}$ là số tế bào nhận được sau $3$ giờ. Vậy, số tế bào nhận được sau $3$ giờ là $u_{10} = u_1 q^9 = 512.10^{12}$.

**Câu 18.** **Đáp án A.**

Gọi $u_0$ là diện tích đế tháp và $u_n$ là diện tích bề mặt trên của tầng thứ $n$, với $1 \le n \le 11$. Theo giả thiết, ta có $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n\, 0 \le n \le 10$.

Dãy số $(u_n)$ lập thành cấp số nhân với số hạng đầu $u_0 = 12288$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Diện tích mặt trên cùng của tháp là $u_{11} = u_0.q^{11} = 12288.\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 6\,\text{m}^2$.

## *Dạng 5: Bài tập liên quan đến cả cấp số nhân và cấp số cộng.*

**Câu 19.** **Đáp án D.**

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án sai.

+ *Phương án A*:Ta có $a_2 = 3; a_2 = 3;...$ Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ra chứng minh được rằng $a_n = 3, \forall n \geq 1$. Do đó $(a_n)$ là dãy số không đổi. Suy ra nó vừa là cấp số cộng (công sai bằng $0$) vừa là cấp số nhân (công bội bằng $1$).

+ Phương án B: Tương tự như phương án A, chúng ta chỉ ra được $b_n = 1, \forall n \geq 1$. Do đó $(b_n)$ là dãy số không đổi. Suy ra nó vừa là cấp số cộng (công sai bằng $0$) vừa là cấp số nhân (công bội bằng $1$).

+ Phương án C: Tương tự như phương án A, chúng ta chỉ ra được $c_n = 2, \forall n \geq 1$. Do đó $(c_n)$ là dãy số không đổi. Suy ra nó vừa là cấp số cộng (công sai bằng $0$) vừa là cấp số nhân (công bội bằng $1$).

+ Phương án D: Ta có: $d_1 = -3, d_2 = 3, d_3 = 3$. Ba số hạng này không lập thành cấp số cộng cũng không lập thành cấp số nhân nên dãy số $(d_n)$ không phải là cấp số cộng và cũng không là cấp số nhân .

**Câu 20.** **Đáp án A.**

+ Ba số $x+6y, 5x+2y, 8x+y$ lập thành cấp số cộng nên

$(x+6y)+(8x+y) = 2(5x+2y) \Leftrightarrow x = 3y$.

+ Ba số $x+\frac{5}{3}, y-1, 2x-3y$ lập thành cấp số nhân nên $\left(x+\frac{5}{3}\right)(2x-3y) = (y-1)^2$.

Thay $x = 3y$ vào ta được $8y^2 + 7y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$ hoặc $y = \frac{1}{8}$.

Với $y = -1$ thì $x = -3$; với $y = \frac{1}{8}$ thì $x = \frac{3}{8}$.

**Câu 21.** **Đáp án C.**

Theo tính chất của cấp số cộng , ta có $x + z = 2y$ .

Kết hợp với giả thiết $x + y + z = 21$, ta suy ra $3y = 21 \Leftrightarrow y = 7$.

Gọi $d$ là công sai của cấp số cộng thì $x = y - d = 7 - d$ và $z = y + d = 7 + d$.

Sau khi thêm các số $2;3;9$ vào ba số $x, y, z$ ta được ba số là $x+2, y+3, z+9$ hay $9-d, 10, 16+d$.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $(9-d)(16+d) = 10^2 \Leftrightarrow d^2 + 7d - 44 = 0$.

Giải phương trình ta được $d = -11$ hoặc $d = 4$.

Với $d = -11$, cấp số cộng $18, 7, -4$. Lúc này $F = 389$.

Với $d = 4$, cấp số cộng $3, 7, 11$. Lúc này $F = 179$.