&4. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

Đây là một trong những phương pháp cơ bản để chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của một biểu thức nhiều biến.

Để sử dụng phương pháp này người ta tiến hành như sau

- Với mỗi bất đẳng thức hãy chọn một hàm thích hợp
- Khảo sát chiều biến thiên của hàm số vừa tìm được trên miền xác định của nó (miền xác định này được tìm thấy dựa vào vào điều kiện của đề bài).
- Từ bước 2 sẽ cho ta lời giải của phép chứng minh bất đẳng thức, hoặc giá trị lớn nhất, nhỏ nhất biểu thức cần tìm.

I-PHƯƠNG PHÁP VÀ BÀI TẬP CƠ BẢN

1-MỘT BIẾN SỐ

Chứng minh bất đẳng thức P(x) > Q(x), $\forall x \in (a,b)$

- Xét hàm số f(x) = P(x) – Q(x) liên tục trên [a,b). ***(liên tục trên (a,b])***
- Tính $f'(x)$. Chứng tỏ $f'(x) \ge 0, \forall x \in [a,b)$ $\left(f'(x) \le 0, \forall x \in (a,b]\right)$

⇨ Hàm số đồng biến trên [a,b) ***(Hàm số nghịch biến trên (a,b])***

⇨ $\forall x \in (a,b): f(x) > f(a)$ =... $\left(\forall x \in (a,b): f(x) > f(b)\right)$

Suy ra đpcm

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ đúng với mọi $x > 0$

Giải:

Xét $f(x) = e^x - \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right)$ liên tục $\forall x \ge 0$.

Ta có $f'(x) = e^x - x - 1$, $f''(x) = e^x - 1 \ge 0$, $\forall x \ge 0$

Do đó $f'(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$ $\Rightarrow f'(x) \ge f'(0) = 0, \forall x \ge 0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty) \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$, $\forall x > 0$

$\Rightarrow e^x - \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right) > 0$, $\forall x > 0$ hay $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ với $\forall x > 0$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ với $x > 0$

Giải:

BĐT $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < x & (a) \\ x - \frac{x^3}{6} < \sin x & (b) \end{cases}$ với $x > 0$

a) Ta chứng minh $\sin x < x$ với $x > 0$

Xét hàm số $f(x) = x - \sin x$ liên tục trên $[0;+\infty)$

Ta có: $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, $\forall x \in [0;+\infty) \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

$\Rightarrow f(x) > f(0)$ với $x > 0 \Rightarrow x - \sin x > 0$ với $x > 0$

b) Ta chứng minh $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$ với $x > 0$

Xét hàm số $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ liên tục trên $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = g(x)$

$\Rightarrow g'(x) = -\sin x + x \geq 0$ với $\forall x \geq 0 \Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

$\Rightarrow g(x) \geq g(0) = 0$ với $x \geq 0$

hay $f'(x) \geq 0$ với $x \geq 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

$\Rightarrow f(x) > f(0) = 0$ với $x > 0$

$\Rightarrow \sin x - x + \frac{x^3}{6} > 0$ hay $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$ với $x > 0$

Từ a) và b) suy ra $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ với $x > 0$.

Ví dụ 3: Cho $0 < \alpha \le \frac{3}{4}$. Chứng minh rằng $2.\alpha + \frac{1}{\alpha^2} > 3$

Giải:

Xét hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ trên $\left(0;\frac{3}{4}\right]$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{59}{18}$

Ta có $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3-1)}{x^3} < 0$ với $\forall x \in \left(0;\frac{3}{4}\right]$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{3}{4}\right] \Rightarrow f(x) \ge f\left(\frac{3}{4}\right)$, $\forall x \in \left(0;\frac{3}{4}\right]$

$\Rightarrow f(\alpha) \ge f\left(\frac{3}{4}\right)$, $\forall \alpha \in \left(0;\frac{3}{4}\right] \Rightarrow 2\alpha + \frac{1}{\alpha^2} \ge \frac{59}{18} > 3$, $\forall \alpha \in \left(0;\frac{3}{4}\right]$

A. **Vớ dụ 4.** Chứng minh rằng $2^{\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{x+1}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Giải:

Áp dụng BĐT Cô–si: $2^{\sin x} + 2^{\tan x} \ge 2.\sqrt{2^{\sin x}.2^{\tan x}}$ = $2.2^{\frac{\sin x + \tan x}{2}} = 2^{\frac{\sin x + \tan x}{2}+1}$

$$\Leftrightarrow 2^{\sin x} + 2^{\tan x} \ge 2^{\frac{\sin x + \tan x}{2}+1}$$

Mà dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$, nên $2^{\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{\frac{\sin x + \tan x}{2}+1}$

Ta cần chứng minh

$2^{\frac{\sin x + \tan x}{2}+1} > 2^{x+1} \Leftrightarrow \frac{\sin x + \tan x}{2} + 1 > x + 1 \Leftrightarrow \sin x + \tan x > 2x$, với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Xét hàm số $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ liên tục trên $[0;\frac{\pi}{2})$

Ta có: $f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \ge \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \overset{Co-si}{\ge} 2.\sqrt{\cos^2 x.\frac{1}{\cos^2 x}} - 2 = 0$

(vì $\cos x \ge \cos^2 x$ với $0 \le x < \frac{\pi}{2}$)

$\Rightarrow f'(x) \ge 0, \forall x \in [0;\frac{\pi}{2}) \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;\frac{\pi}{2}) \Rightarrow f(x) > f(0)$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin x + \tan x - 2x > 0 \Rightarrow \sin x + \tan x > 2x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 5: Chứng minh $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$ với mọi $x > 0$

<u>*Giải:*</u>

Xét $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ liên tục $\forall x \ge 0$, $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \ge 0, \ \forall x \ge 0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến với mọi $x \ge 0$

$\Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0, \ \forall x > 0 \Rightarrow x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$ với mọi $x > 0$

2-HAI BIẾN SỐ

Loại 1: Sử dụng tính đơn điệu hàm số

Ta đưa bất đẳng thức về dạng: f(a)<f(b). Xét tính đơn điệu của hàm số f(x) trên đoạn [a;b] hoặc khoảng $(c;d) \supset [a;b]$

Ví dụ 6: Cho $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $a.\sin a - b.\sin b > 2.(\cos b - \cos a)$

<u>*Giải:*</u>

YCBT $\Leftrightarrow a.\sin a + 2\cos a > b.\sin b + 2.\cos b$

Xét hàm số $f(x) = x.\sin x + 2.\cos x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Ta có: $f'(x) = \sin x + x.\cos x - 2.\sin x$, $f'(0) = 0$

$f''(x) = \cos x + \cos x - x.\sin x - 2.\cos x = -x.\sin x < 0$ (vì $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì $\sin x > 0$).

Do đó $f'(x) < f'(0) = 0$ khi $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f(x)$ giảm trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(a) > f(b)$ với $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow a.\sin a + 2\cos a > b.\sin b + 2.\cos b \Leftrightarrow a.\sin a - b.\sin b > 2.(\cos b - \cos a)$

Ví dụ 7: Chứng minh với $0<a<\sqrt[3]{b}<a+1$ thì $\frac{a(a^3+2b)}{2a^3+b} < \sqrt[3]{b} < \frac{(a+1)\left[(a+1)^3+2b\right]}{2(a+1)^3+b}$

Giải:

Xét hàm số $f(x) = \frac{x(x^3+2.b)}{2x^3+b}$ liên tục trên $\left[0; a+1\right]$

Ta có $f'(x) = \frac{2(x^3-b)^2}{(2x^3+b)^2} \geq 0,\ \forall x \in \left[0; a+1\right]$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[0; a+1\right] \Rightarrow f(a) < f\left(\sqrt[3]{b}\right) < f(a+1)$ với $0 < a < x < a+1$

$$\Rightarrow \frac{a.(a^3+2.b)}{2.a^3+b} < \sqrt[3]{b} < \frac{(a+1)\left[(a+1)^3+2.b\right]}{2.(a+1)^3+b}$$ (đpcm).

***Loại 2: Sử dụng* ĐỊNH LÝ LAGRANGE**

Định lý lagrange

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và khả vi trên $(a; b)$ thì tồn tại một số $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Ví dụ 8: Chứng minh rằng $\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$ với $0 < a < b$

Giải:

Xét hàm số : $f(x) = \ln x$ liên tục trên $[a;b]$ và $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(c) = \frac{1}{c}$

Hàm số $f(x) = \ln x$ thoả mãn định lý Larange trên $[a;b]$

$\Rightarrow \exists c \in (a;b):\ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$

Do $0 < a < c < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$.

Ví dụ 9: Chứng minh rằng với mọi *x, y* $\in$ R ta có: $|\sin x - \sin y| \le |x-y|$

Giải:

Xét hàm số $f(t) = \sin t$, $f'(t) = \cos t \Rightarrow f'(c) = \cos c$

Hàm số $f(t) = \sin t$ thỏa định lý Lagrange trên [*x; y*]

Nên $\exists c \in (x;y)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \Leftrightarrow \cos c = \frac{\sin y - \sin x}{y-x}$

$\Rightarrow |\cos c| = \left|\frac{\sin x - \sin y}{x-y}\right| \le 1 \Leftrightarrow |\sin x - \sin y| \le |x-y|$, $\forall x; y \in R$

Ví dụ 10: Chứng minh rằng $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$ với $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

Giải:

Xét hàm số $f(x) = \tan x$ liên tục và khả vi trên $[a;b]$ và $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $f'(c) = \frac{1}{\cos^2 c}$

$\Rightarrow \exists c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\tan b - \tan a}{b-a}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 c} = \frac{\tan b - \tan a}{b-a} \Rightarrow \tan b - \tan a = \frac{b-a}{\cos^2 c}.$$

Do $a < c < b$ và $y = \cos x$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} < \frac{b-a}{\cos^2 c} < \frac{b-a}{\cos^2 b} \Leftrightarrow \frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$$ với $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\frac{\tan a}{\tan b} < \frac{a}{b}$, *với* $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

b) $a - \sin a < b - \sin b$, *với* $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

2. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, *với* $x > 0$

b) $x\sin x + \cos x > 1$, *với* $0 < x < \frac{\pi}{2}$

3. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $e^x > 1 + x$, *với* $x > 0$

b) $\ln(1+x) < x$, *với* $x > 0$

4. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\ln(1+x) - \ln x > \frac{1}{1+x}$, *với* $x > 0$

b) $1 + x\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \geq \sqrt{1+x^2}$

5. Cho $x > 1$ và $\alpha > 1$. Chứng minh rằng: $x^a - 1 > \alpha(x-1)$

6. Chứng minh rằng: $\ln(x+1) < x$ mọi $x > 0$.

7. Cho $x > 0$. Chứng minh rằng: $\left(1 + \frac{1}{1+x}\right)^{1+x} > \left(1 + \frac{1}{1+x}\right)^x$

II-ỨNG DỤNG

Trong phần này chúng ta vận dụng linh hoạt các kỹ thuật và phương pháp đã trình bày phần trước và lưu ý đến các mối liên hệ với $x,y,z \geq 0$, ta có

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy\,; \qquad \frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \geq xyz\,;$$

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} \geq xy+yz+zx$$

Phương pháp chung là đặt ẩn phụ (có thể nhiều hơn một lần) dựa vào thông tin từ đề bài.

<u>Lưu ý:</u>

- Hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} f(t) = f(a)$, $\max\limits_{[a;b]} f(t) = f(b)$
- Hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $[a;b)$ thì $\min\limits_{[a;b)} f(t) = f(a)$
- Hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $(a;b]$ thì $\max\limits_{(a;b]} f(t) = f(b)$

Nếu $f(t)$ liên tục và nghịch biến thì ta có điều ngược lại.

Ví dụ 1: (Đề thi khối B, 2009) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = 3\left(x^4+y^4+x^2y^2\right) - 2\left(x^2+y^2\right) + 1,$$

với x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $(x+y)^3 + 4xy \geq 2$.

<u>Giải:</u>

Nhận xét: **Thông tin từ đề bài gợi ý đổi biến** $t = \left(x^2+y^2\right)$; $t = x+y$ **hoặc** $t = xy$ **.**

Từ giả thiết và chú ý đến bất đẳng thức $(x+y)^2 \geq 4xy,\ \forall x,y \in R$, ta có

$$(x+y)^3 + 4xy \geq 2 \Rightarrow (x+y)^3 + (x+y)^2 \geq (x+y)^3 + 4xy \geq 2$$

$\Leftrightarrow (x+y-1)\left[(x+y)^2+(x+y)+2\right]\geq 0$ (vì $(x+y)^2+(x+y)+2>0, \forall x,y\in R$)

$\Rightarrow x+y\geq 1, \quad \forall x,y\in R$

Khi đó kết hợp với bất đẳng thức $x^4+y^4\geq \dfrac{(x^2+y^2)^2}{2}, \forall x,y\in R$, ta có

$$A=3(x^4+y^4+x^2y^2)-2(x^2+y^2)+1=\frac{3}{2}(x^2+y^2)^2+\frac{3}{2}(x^4+y^4)-2(x^2+y^2)+1$$

$$\Rightarrow A\geq \frac{3}{2}(x^2+y^2)^2+\frac{3}{4}(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)+1=\frac{9}{4}(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)+1$$

Mặt khác $x^2+y^2\geq \dfrac{(x+y)^2}{2}\geq \dfrac{1}{2}$. Đặt $t=x^2+y^2$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{9}{4}t^2-2t+1$ với $t\geq \dfrac{1}{2}$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{9}{2}t-2\geq \dfrac{9}{2}.\dfrac{1}{2}-2=\dfrac{1}{4}>0, \forall t\in[\dfrac{1}{2};+\infty) \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[\dfrac{1}{2};+\infty)$

Suy ra $f(t)\geq f\left(\dfrac{1}{2}\right), \forall t\in[\dfrac{1}{2};+\infty) \quad \Rightarrow \min\limits_{[\frac{1}{2};+\infty)} f(t)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{16}$

Từ đó suy ra $\min A=\dfrac{9}{16}$ khi $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{2} \\ x+y=1,\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 2 (Đề thi khối B, 2011) : Cho $a,b>0$ thỏa mãn $2(a^2+b^2)+ab=(a+b)(ab+2)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\right) \quad (1)$

Giải :

Nhận xét :** Thông tin từ* (1) ***có thể đặt $t=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$

Từ giả thiết, ta có

$$2\left(a^2+b^2\right)+ab=\left(a+b\right)\left(ab+2\right)\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(ab+2\right)\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=a+\frac{2}{b}+b+\frac{2}{a}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\left(a+\frac{2}{b}\right)+\left(b+\frac{2}{a}\right)\geq 2\sqrt{a.\frac{2}{b}}+2\sqrt{b.\frac{2}{a}}=2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=2\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab=2$

Suy ra $\quad 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1\geq 2\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2} \qquad (2)$

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, từ $(2)\Rightarrow 2t+1\geq 2\sqrt{2}\sqrt{t+2}\Rightarrow 4t^2-4t-15\geq 0\Rightarrow t\geq\frac{5}{2}$.

Khi đó $P=4\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)=4\left(t^3-3t\right)-9\left(t^2-2\right)=4t^3-9t^2-12t+18$

Xét hàm số $f\left(t\right)=4t^3-9t^2-12t+18$ liên tục trên $\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$, ta có

$$f\left(t\right)=12t^2-18t-12=\left(12t+6\right)\left(t-2\right)>0,\ \ \forall t\geq\frac{5}{2}$$

Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left[\frac{5}{2};+\infty\right)\Rightarrow f\left(t\right)\geq f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{23}{4},\forall t\in\left[\frac{5}{2};+\infty\right)\Rightarrow \min f\left(t\right)=-\frac{23}{4}\ khi\ t=\frac{5}{2}$

Vậy $\min P=-\frac{23}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}ab=2\\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}\vee\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$.

Ví dụ 3 (Đề thi khối D, 2009) Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thoả mãn $x+y=1$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy$.

Giải :

Cách 1 : Không đổi biến

Từ $x+y=1\Rightarrow y=1-x,\ \ 0\leq x\leq 1$, và

$$S=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy=16x^2y^2-2xy+12=16x^2\left(1-x\right)^2-2x\left(1-x\right)+12$$

$$=16x^4-32x^3+18x^2-2x+12=f\left(x\right)$$

Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$.

$f'\left(x\right)=64x^3-96x^2+36x-2$ và $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\vee x=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\vee x=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

$f\left(0\right)=12,\qquad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{2},\qquad f\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)=f\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{191}{16}$

Vậy $\min S=\min\limits_{x\in\left[0;1\right]}f\left(x\right)\ \ khi\ x=y=\frac{1}{2}$; $\max S=\max\limits_{x\in\left[0;1\right]}f\left(x\right)=\frac{191}{16}\ khi\begin{cases}x=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\\y=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\\y=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\end{cases}$

<u>Cách 2 : Đổi biến</u>

Do $x+y=1$, nên $S=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy=16x^2y^2-2xy+12$

Đặt $t=xy\Rightarrow t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$ (vì $0\le xy\le\frac{\left(x+y\right)^2}{4}=\frac{1}{4}$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=16t^2-2t+12$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{1}{4}\right]$

$f'\left(t\right)=32t-2,\ f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{16},\qquad f\left(0\right)=12,\qquad f\left(\frac{1}{16}\right)=\frac{191}{16},\ \ f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{25}{2}$

Suy ra: $\min S=\min\limits_{t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]}f\left(t\right)\ \ khi\ t=\frac{1}{4}\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\xy=\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$

$$\max S=\max\limits_{t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]}f\left(t\right)=\frac{191}{16}\ \ khi\ \ t=\frac{1}{16}\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\xy=\frac{1}{16}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\\y=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\\y=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\end{cases}$$

Ví dụ 4 : (Đề khối A, 2014) Cho x, y, z là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x^2}{x^2+yz+x+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9}$

__Giải:__

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$2x(y+z) \le x^2 + (y+z)^2 = 2 + 2yz \Rightarrow yz + 1 \ge x(y+z) \Rightarrow x^2+x+yz+1 \ge x^2+x+x(y+z)$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x^2+yz+x+1} \le \frac{x^2}{x^2+x+x(y+z)} = \frac{x}{x+y+z+1}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y+z$

Do đó $P \le \frac{x}{x+y+z+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9} = 1-\left(\frac{1}{x+y+z+1}+\frac{1+yz}{9}\right)$

Theo BĐT BCS ta có : $x+(y+z) \le \sqrt{2(x^2+(y+z)^2} = 2\sqrt{1+yz}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y+z$

$$\Rightarrow x+y+z+1 \le 1+2\sqrt{1+yz} \Rightarrow -\frac{1}{x+y+z+1} \le -\frac{1}{1+2\sqrt{1+yz}}$$

Do đó $P \le 1-\left(\frac{1}{x+y+z+1}+\frac{1+yz}{9}\right) \le 1-\left(\frac{1}{1+2\sqrt{1+yz}}+\frac{1+yz}{9}\right)$

Đặt $t=\sqrt{1+yz}, t\ge 1$. Xét hàm số $f(t)=1-\left(\frac{1}{2t+1}+\frac{t^2}{9}\right)$ liên tục trên $[1;+\infty)$

$f'(t)=\frac{1}{(2t+1)^2}-\frac{2t}{9} \le \frac{1}{9}-\frac{2}{9}=-\frac{1}{9}<0$ (vì $(2t+1)^2 \ge 9, \forall t \ge 1 \Rightarrow \frac{1}{(2t+1)^2} \le \frac{1}{9}; \frac{2t^2}{9} \ge \frac{2}{9}, \forall t \ge 1$)

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $[1;+\infty) \Rightarrow f(t) \le f(1) = \frac{5}{9}$ và $f(t)=\frac{5}{9}\ khi\ t=1$

Vậy $\max P = \frac{5}{9}\ khi \begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ x=y+z \\ \sqrt{1+yx}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$

Ví dụ 5: (Đề khối D, 2014) Cho hai số thực x, y thỏa điều kiện $1 \le x, y \le 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $$P = \frac{x+2y}{x^2+3y+5} + \frac{y+2x}{y^2+3x+5} + \frac{1}{4(x+y-1)}$$

Giải:

Do $1 \le x \le 2 \Rightarrow (x-1)(x-2) \le 0 \Rightarrow x^2 + 2 \le 3x$. Tương tự $y^2 + 2 \le 3y$

Suy ra $P \ge \frac{x+2y}{3x+3y+3} + \frac{y+2x}{3y+3x+3} + \frac{1}{4(x+y-1)} = \frac{x+y}{x+y+1} + \frac{1}{4(x+y-1)}$

Đặt $t = x + y$, $2 \le t \le 4$. Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{t+1} + \frac{1}{4(t-1)}$ liên tục trên đoạn $[2;4]$

$$f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{4(t-1)^2}; \qquad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

$f(2) = \frac{11}{12}$; $\quad f(3) = \frac{7}{8}$; $\quad f(4) = \frac{53}{60}$ $\quad$ Suy ra $\min f(t) = \frac{7}{8}$ khi $t = 3$.

Do đó $P \ge \frac{7}{8}$. Vậy $\min P = \frac{7}{8}$ $khi \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Ví dụ 6: (Đề thi khối B, 2012) Cho các số thực x, y, z thỏa các điều kiện $x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^5 + y^5 + z^5$.

Giải:

Từ $x + y + z = 0 \Rightarrow z = -(x+y)$ thế vào giả thiết thứ hai, ta có

$$1 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 2(x+y)^2 - 2xy \ge 2(x+y)^2 - \frac{1}{2}(x+y)^2 = \frac{3}{2}(x+y)^2$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 \le \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{\sqrt{6}}{3} \le (x+y) \le \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Và từ $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy + (x+y)^2 = 1 \Rightarrow xy = \frac{2(x+y)^2 - 1}{2}$

Mặt khác $P = x^5 + y^5 + z^5 = x^5 + y^5 - (x+y)^5 = (x^3 + y^3)(x^2 + y^2) - x^2y^2(x+y) - (x+y)^5$

$$=\left((x+y)^3-3xy(x+y)\right)\left((x+y)^2-2xy\right)-x^2y^2(x+y)-(x+y)^5=5x^2y^2(x+y)-5xy(x+y)^3$$

Đặt $t=x+y$, suy ra $-\frac{\sqrt{6}}{3}\le t\le\frac{\sqrt{6}}{3}$ và $xy=\frac{2t^2-1}{2}$

Khi đó $P=5\left(\frac{2t^2-1}{2}\right)^2t-5\left(\frac{2t^2-1}{2}\right)t^3=-\frac{5}{4}\left(2t^3-t\right)$

Xét hàm $f(t)=-\frac{5}{4}\left(2t^3-t\right)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{-\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$

$$f'(t)=-\frac{5}{4}\left(6t^2-1\right);\quad f'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=\frac{5\sqrt{6}}{36},\quad f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=-\frac{5\sqrt{6}}{36}\Rightarrow\min f(t)=-\frac{5\sqrt{6}}{36}\ khi\ t=-\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Suy ra $\min P=-\frac{5\sqrt{6}}{36}$ khi $x=y=\frac{\sqrt{6}}{6},z=-\frac{\sqrt{6}}{3}\vee x=y=-\frac{\sqrt{6}}{3},z=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ và các hoán vị.

Ví dụ 7: (Đề thi khối A, 2012) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x+y+z=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}-\sqrt{6\left(x^2+y^2+z^2\right)}$

__Giải:__

Ta chứng bất đẳng thức $3^t\ge 1+t,\ \forall t\ge 0\ (1)$ (xét hàm số $f(t)=3^t-t-1$)

Áp dụng (1), ta có

$$P=3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}-\sqrt{6\left(x^2+y^2+z^2\right)}\ge 3+|x-y|+|y-z|+|z-x|-\sqrt{6\left(x^2+y^2+z^2\right)}$$

Áp dụng bất đẳng thức $|a|+|b|\ge|a+b|$, ta có

$$\left(|x-y|+|y-z|+|z-x|\right)^2=|x-y|^2+|y-z|^2+|z-x|^2+|x-y|\left(|y-z|+|z-x|\right)$$
$$+|y-z|\left(|z-x|+|x-y|\right)+|z-x|\left(|x-y|+|y-z|\right)\ge 2\left(|x-y|^2+|y-z|^2+|z-x|^2\right)$$

Suy ra

$$|x-y|+|y-z|+|z-x| \ge \sqrt{2\left(|x-y|^2+|y-z|^2+|z-x|^2\right)} = \sqrt{6\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\left(x+y+z\right)^2} = \sqrt{6\left(x^2+y^2+z^2\right)}$$

Do đó $P = 3^{|x-y|}+3^{|y-z|}+3^{|z-x|}-\sqrt{6\left(x^2+y^2+z^2\right)} \ge 3$ và $P=3\ khi\ x-y=z=0$

Vậy $\min P = 3\ khi\ x=y=z$.

Ví dụ 8: Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z\le\frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2+y^2+z^2+\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{y^2z}+\frac{1}{z^2x}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$P = x^2+y^2+z^2+\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{y^2z}+\frac{1}{z^2x} \ge 3\sqrt[3]{\left(xyz\right)^2}+\frac{3}{xyz}$$

Và $0<\sqrt[3]{xyz}\le\frac{x+y+z}{3}\le\frac{1}{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{2}$

Đặt $t=\sqrt[3]{xyz},\ t\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$. Xét hàm số $f\left(t\right)=3t^2+\frac{3}{t^3}\Rightarrow$ (ĐPCM)

Ví dụ 9: Cho $x\ge y\ge z>0$. Chứng minh: $\frac{x^2.y}{z}+\frac{y^2.z}{x}+\frac{z^2.x}{y} \ge x^2+y^2+z^2$

Giải:

BĐT $\Leftrightarrow$ $\frac{x^3.y^2+z^2.y^3+x^2.z^3}{x.y.z} \ge x^2+y^2+z^2$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3.y^2+z^2.y^3+x^2.z^3}{y} \ge xz(x^2+y^2+z^2) \Leftrightarrow \frac{x^3}{y^3}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{z^3}{y^3}.\frac{x^2}{y^2} \ge \frac{x}{y}.\frac{z}{y}\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{z^2}{y^2}+1\right)$$

Đặt $u=\frac{x}{y}$, $v=\frac{z}{y}$. Ta có $u\ge1\ge v>0$.

Nên BĐT có dạng $u^3+v^2+u^2.v^3 \ge u.v(u^2+v^2+1)$

$$\Leftrightarrow u^3(1-v)+u^2.v^3-u.v(1+v^2)+v^2\geq 0 \qquad (1)$$

+ Nếu $v=1$ thì (1) có dạng $u^2-2.u+1\geq 0$, tức là (1) đúng

+ Nếu $0<v<1$.

Xét hàm số $f(u)=u^3(1-v)+u^2.v^3-u.v(1+v^2)+v^2$ với $u\geq 1$

Ta có $f'(u)=3.u^2(1-v)+2.u.v^3-v(1+v^2)$

$f''(u)=6.u(1-v)+2.v^3>0$ (do $0<v<1$ và $u\geq 1$)

$\Rightarrow f'(u)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$, nên $f'(u)\geq f'(1),\ \forall u\in[1;+\infty)$

Mà $f'(1)=v^3-4.v+3=(v-1)(v^2+v-3)>0$, nên $f'(u)\geq 0 \Rightarrow$ *f (u)* đồng biến trên $[1;+\infty)$

Tức là $\forall u\geq 1$ ta có $f(u)\geq f(1)=v^2-2v+1=(v-1)^2>0$

Vậy: $u^3(1-v)+u^2v^2-u^2v^3-uv(1+v^2)+v^2\geq 0$ với $\forall u\geq 1>v>0$

Hay $\frac{x^2.y}{z}+\frac{y^2.z}{x}+\frac{z^2.x}{y}\geq x^2+y^2+z^2$ với $x\geq y\geq z>0$.

Lưu ý: ***Các bạn có thể lập bảng biến thiên, từ đó rút ra kết luận bài toán.***

Bài tập tương tự

1. Cho $x,y\geq 0$ thỏa mãn $x+y=4$. Tìm GTNN và GTLN của $P=(x^3-1)(y^3-1)$.
   HD: Đặt $t=xy,\ 0\leq t\leq 4$
2. Cho $x,y\geq 0$ thỏa mãn $x^2+y^2=2$. Tìm GTNN và GTLN của $P=x+y-xy$.
   HD: Đặt $t=x+y,\ \sqrt{2}\leq t\leq 2$
3. Cho $x,y\geq 0$ thỏa mãn $x^2+y^2=8$. Tìm GTNN và GTLN của $P=\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}$.
   HD: Đặt $t=x+y,\ 2\sqrt{2}\leq t\leq 4$
4. Cho $x,y\geq 0$ thỏa mãn $x+y+xy=3$. Tìm GTNN và GTLN của $P=\frac{x^2}{y+1}+\frac{y^2}{x+1}-\frac{1}{x+y+3}$
   HD: Đặt $t=x+y,\ 2\leq t\leq 3$

5. (Đề thi khối A, 2013) Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{32a^3}{(b+3c)^3}+\frac{32b^3}{(a+3c)^3}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$.

   HD: Đặt $x=\frac{a}{c},\ y=\frac{b}{c}$. Sau đó đặt $t=x+y, t\geq 2$.

6. (Đề thi khối D, 2012) Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\leq 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+y^3+3(xy-1)(x+y-2)$

   HD: Đặt $t=x+y,\ 0\leq t\leq 8$.

7. (Đề thi khối B, 2013) Cho a, b, c là các số thực dương . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

   $P=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$

   HD: Đặt $t=\sqrt{a^2+b^2+c^2+4},\ t>2$.

8. (Đề thi khối B, 2010) Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+3(ab+bc+ca)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

   HD: Đặt $t=ab+bc+ca,\ 0\leq t\leq\frac{1}{3}$.

9. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z\leq\frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{y^2z}+\frac{y}{z^2x}+\frac{z}{x^2y}+\frac{x^5}{y}+\frac{y^5}{z}+\frac{z^5}{x}$$