Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{z+i}{z-i}$ là số thuần ảo. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là:

A.Đường tròn tâm O, bán kính $R=1$.

B.Hình tròn tâm O, bán kính $R=1$ (kể cả biên).

C.Hình tròn tâm O, bán kính $R=1$ (không kể biên).

D.Đường tròn tâm O, bán kính $R=1$ bỏ đi một điểm $(0,1)$

Hướng dẫn giải

Gọi $M(a,b)$ là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$

Ta có: $\frac{z+i}{z-i}=\frac{a+(b+1)i}{a+(b-1)i}=\frac{a^2+b^2-1}{a^2+(b-1)^2}+\frac{2a}{a^2+(b-1)^2}i$

Để $\frac{z+i}{z-i}$ là số thuần ảo thì $\frac{a^2+b^2-1}{a^2+(b-1)^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ a^2+(b-1)^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ a\neq 0, b\neq 1 \end{cases}$

$\frac{a^2+b^2-1}{a^2+(b-1)^2}=0 \Rightarrow a^2+b^2-1=0 \Rightarrow a^2+b^2=1 \Rightarrow$ Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O, bán kính $R=1$ $\Rightarrow$ **Đáp án D.**

Cách 2: Sử dụng Casio:

Mode 2 (CMPLX), nhập $\frac{A+Bi+i}{A+Bi-i}.|A+Bi-i|^2$. CALC A = 1000 , B =100.

Ra kết quả: 1009999 +2000i = $(1000^2+100^2-1)+(2.1000)i=(a^2+b^2-1)+2ai$

Chú ý đối với cách 2 câu này chỉ loại được 2 đáp án và học sinh có thể chọn ngay đáp án D

Nên nhớ Casio chỉ dùng khi các em đã hiểu và làm thành thạo ở cách 1

Câu 36. Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z+2|=|i-z|$ là đường thẳng d. Khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng d bằng bao nhiêu ?

A. $d(O,d)=\frac{3\sqrt{5}}{10}$. **B.** $d(O,d)=\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **C.** $d(O,d)=\frac{3\sqrt{5}}{20}$. **D.** $d(O,d)=\frac{\sqrt{5}}{10}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$ trên mặt phẳng phức $(x,y\in R)$.

Ta có : $|z+2|=|i-z| \Leftrightarrow |x+2+yi|=|-x+i(1-y)|$.

$\Leftrightarrow (x+2)^2+y^2=x^2+(1-y)^2 \Leftrightarrow 4x+2y+3=0$

$\Rightarrow d(O,d)=\frac{3\sqrt{5}}{10}$

Cách 2: Sử dụng Casio:

Mode 2, nhập $|A+Bi+2|^2-|i-(A+Bi)|^2$. CALC A = 1000, B = 100

Ra kết quả 4203 = 4.1000 + 2.100 +3 = 4x + 2y +3. Suy ra d: 4x +2y +3 = 0

$\Rightarrow d\left(O,d\right)=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

Ta chọn đáp án A

Muốn giải được câu này học sinh dù sử dụng cách 1 hay cách 2 cần phải nhớ công thức tính $d(M_0,\Delta)=\dfrac{|a.x_0+b.y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ *Với* $M_0\left(x_0;y_0\right),\Delta: ax+by+c=0$

Câu 37. Trong mặt phẳng phức Oxy, cho số phức z thỏa lần lượt một trong bốn điều kiện $\left(I\right):\left|z+\overline{z}\right|=2$; $\left(II\right): z.\overline{z}=5$; $\left(III\right):\left|z-2i\right|=4$, $\left(IV\right):\left|i\left(z-4i\right)\right|=3$. Hỏi điều kiện nào để số phức Z có tập hợp biểu diễn là đường thẳng.

A. $\left(II\right),\left(III\right),\left(IV\right)$. **B.** $\left(I\right),\left(II\right)$. **C.** $\left(I\right),\left(IV\right)$. **D.** $\left(I\right)$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M\left(x,y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi\left(x,y\in R\right)$

$\left(I\right):\left|z+\overline{z}\right|=2\Leftrightarrow\left|2x\right|=2\Leftrightarrow x=\pm1$; *(Đường thẳng)*

$\left(II\right): z.\overline{z}=5\Rightarrow x^2+y^2=5$ *(Đường tròn)*

$\left(III\right):\left|z-2i\right|=4\Leftrightarrow x^2+\left(y-2\right)^2=16$; *(Đường tròn)*

$\left(IV\right):\left|i\left(z-4i\right)\right|=3\Leftrightarrow\left|4+iz\right|=3\Leftrightarrow x^2+\left(y-4\right)^2=9$ *(Đường tròn)*

Vậy đáp án **D.**

Ở câu này học sinh cần nắm vững các dạng phương trình của các đường đã học và cách xác định mô đun số phức để tránh nhầm lẫn và chọn sai đáp án

Câu 38. Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z sao cho z^2 là số thuần ảo là hai đường thẳng d_1,d_2. Góc α giữa 2 đường thẳng d_1,d_2 là bao nhiêu ?

A. $\alpha=45^0$. **B.** $\alpha=60^0$. **C.** $\alpha=90^0$. **D.** $\alpha=30^0$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M\left(x,y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi\left(x,y\in R\right)$

Ta có : $z^2=\left(x^2-y^2\right)+2xyi$ là số thuần ảo $\Rightarrow x^2-y^2=0\wedge xy\neq0\Rightarrow y=\pm x\Rightarrow\alpha=90^0$

Ta chọn đáp án **C.**

Lưu ý điều kiện để một số phức là số thuần ảo thì phần thực phải bằng 0, nhưng học sinh hay nhầm khi thấy $x^2-y^2=0$ *đã kết luận luôn là* $\left[\begin{array}{l}x=y=0\\x=y\end{array}\right.$ *dẫn đến kết quả không đúng*

Câu 39. Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức Z thoả mãn $2|z-i| = |z-\overline{z}+2i|$ là parabol (P). Đỉnh của (P) có tọa độ là ?

A. $(0,0)$. **B.** $(-1,3)$. **C.** $(0,1)$. **D.** $(-1,0)$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi\,(x, y \in R)$

Ta có : $2|z-i| = |z-\overline{z}+2i| \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(2y+2)^2} \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2}{4}$.

Vậy đỉnh parabol là $O(0,0)$ nên đáp án A

Lưu ý công thức xác đinh tọa độ đỉnh của parabol $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

Câu 40. Trong mặt phẳng phức Oxy . tập hợp biểu diễn số phức Z thỏa mãn $\left||z|^2 - z(\overline{z}+i) - i\right| = 3$ là đường tròn (C). Khoảng cách từ tâm I của đường tròn (C) đến trục tung bằng bao nhiêu ?

A. $d(I,Oy) = 1$. **B.** $d(I,Oy) = 2$. **C.** $d(I,Oy) = 0$. **D.** $d(I,Oy) = \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi\,(x, y \in R)$.

Ta có : $\left||z|^2 - z(\overline{z}+i) - i\right| = 3 \Leftrightarrow |-iz-i| = 3 \Leftrightarrow |y + i(-x-1)| = 3 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 9$

$\Rightarrow I(-1,0)$ là tâm đường tròn (C) $\Rightarrow d(I,Oy) = |x_I| = 1$ **.** Ta chọn đáp án A

Chú ý biến đổi xác định tọa độ tâm của đường tròn để không nhầm dấu.

VẬN DỤNG CAO

Câu 41. Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn $\left|z^2 + (\overline{z})^2 + 2|z|^2\right| = 16$ là hai đường thẳng d_1, d_2. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng d_1, d_2 là bao nhiêu ?

A. $d(d_1,d_2) = 2$. **B.** $d(d_1,d_2) = 4$. **C.** $d(d_1,d_2) = 1$. **D.** $d(d_1,d_2) = 6$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi\,(x, y \in R)$

Ta có : $\left|z^2 + (\overline{z})^2 + 2|z|^2\right| = 16 \Leftrightarrow |x^2 + 2xyi - y^2 + x^2 - 2xyi - y^2 + 2x^2 + 2y^2| = 16$

$\Leftrightarrow |4x^2| = 16 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow \; d(d_1,d_2) = 4$

Ta chọn đáp án B.

Ở đây lưu ý hai đường thẳng x = 2 và x = -2 song song với nhau.

Câu 42. Xét 3 điểm A, B, C của mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn 3 số phức phân biệt z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3|$.Nếu $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ thì tam giác ABC có đặc điểm gì ?

A. ΔABC cân. **B.** ΔABC vuông. **C.** ΔABC có góc 120^0. **D.** ΔABC đều.

Hướng dẫn giải

Ta có : $|z_1| = |z_2| = |z_3| \Rightarrow |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$ nên 3 điểm A, B, C thuộc đường tròn tâm O

Mà : $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG} = 0 \Leftrightarrow G \equiv O \Rightarrow \Delta ABC$ đều vì tâm đường tròn ngoại tiếp trùng với trọng tâm G

=> Đáp án D.

Chú ý tính chất của tam giác đều trọng tâm cũng chính là tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác.

Câu 43. Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp biểu diễn số phức Z thỏa mãn $|z|^2 + z + \bar{z} = 0$ là đường tròn (C). Diện tích S của đường tròn (C) bằng bao nhiêu ?

A. $S = 4\pi$. **B.** $S = 2\pi$. **C.** $S = 3\pi$. **D.** $S = \pi$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi\,(x, y \in R)$

Ta có : $|z|^2 + z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x + yi + x - yi = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x = 0$

$\Rightarrow$ bán kính $R = 1 \Rightarrow S = \pi R^2 = \pi$

Sử dụng Casio: làm tương tự trên, ra đáp số : $1012000 = 1000^2 + 100^2 + 2.1000 = x^2 + y^2 + 2x$

=> Đáp án D.

Lưu ý công thức tính diện tích hình tròn, cách xác định tâm và bán kính đường tròn.

Câu 44. Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp biểu diễn số phức Z thỏa $1 \le |z + 1 - i| \le 2$ là hình vành khăn. Chu vi P của hình vành khăn là bao nhiêu ?

A. $P = 4\pi$. **B.** $P = \pi$. **B.** $P = 2\pi$. **D.** $P = 3\pi$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi\,(x, y \in R)$

Gọi $A(-1, 1)$ là điểm biểu diễn số phức $-1 + i$

$1 \le |z + 1 - i| \le 2 \Leftrightarrow 1 \le MA \le 2$. Tập hợp điểm biểu diễn là hình vành khăn giới hạn bởi 2 đường tròn đồng tâm có bán kính lần lượt là $R_1 = 2, R_2 = 1 \Rightarrow P = P_1 - P_2 = 2\pi(R_1 - R_2) = 2\pi$

=> Đáp án C.

Lưu ý cần nắm vững lý thuyết và hình vẽ của dạng bài này khi học trên lớp tránh nhầm lẫn sang tính diện tích hình tròn.

Câu 45. Trong mặt phẳng phức Oxy, giả sử M là điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn $|z+2|+|z-2|=8$. Tập hợp những điểm M là ?

A. $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

B. $(E):\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$.

C. $(T):(x+2)^2+(y-2)^2=64$.

D. $(T):(x+2)^2+(y-2)^2=8$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi(x,y\in R)$

Gọi A là điểm biểu diễn số phức -2

Gọi B là điểm biểu diễn số phức 2

Ta có : $|z+2|+|z-2|=8 \Leftrightarrow MA+MB=8$ và $AB=4 \Rightarrow$ Tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là elip với 2 tiêu điểm là A,B và độ dài trục lớn là 8 => Đáp án A.

Ôn lại dạng phương trình (Elip) đã học ở lớp 10 tránh nhầm với đường tròn hoặc Parabol.

Câu 46. Xác định tập hợp các điểm **M** trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện: $\left|z^2-(\bar{z})^2\right|=4$.

A. Là hai đường hyperbol (H$_1$): $y=\frac{1}{x}$ và (H$_2$) $y=-\frac{1}{x}$.

B. Là đường hyperbol (H$_1$): $y=\frac{1}{x}$.

C. Là đường hyperbol (H$_2$): $y=-\frac{1}{x}$.

D. Là đường tròn tâm O(0;0) bán kính R = 4.

Hướng dẫn giải

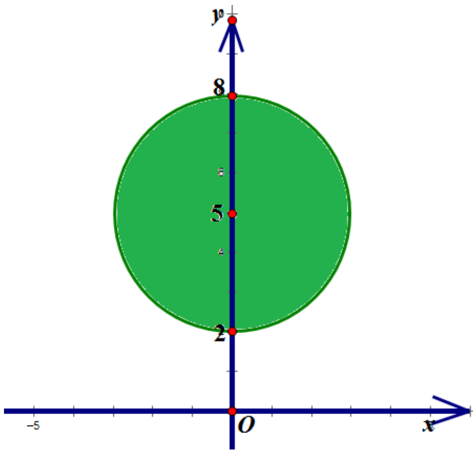
Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi(x,y\in R)$

Ta có : $\left|z^2-(\bar{z})^2\right|=4 \Leftrightarrow |4xyi|=4 \Leftrightarrow x^2y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{x}$ => Đáp án A.

Câu 47. Trong mặt phẳng phức Oxy, các số phức z thỏa $|z-5i|\le 3$. Nếu số phức z có môđun nhỏ nhất thì phần ảo bằng bao nhiêu ?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải



Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$. Gọi $E(0;5)$ là điểm biểu diễn số phức $5i$

Ta có: $|z-5i|\le 3 \Rightarrow MA\le 3$. Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức Z là hình tròn tâm $A(0,5), R=3$ như hình vẽ

Số phức z có môđun nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhất .Dựa vào hình vẽ, ta thấy $z=2i$. Suy ra phần ảo bằng 2

=> Đáp án A.

Lưu ý vẽ hình để nhận dạng đây chỉ là dạng bài toán GTLN-GTNN thông thường .

Câu 48. Trong mặt phẳng phức Oxy , các số phức z thỏa $|z+2i-1|=|z+i|$. Tìm số phức z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1,3)$.

A. $3+i$. **B.** $1+3i$. **C.** $2-3i$. **D.** $-2+3i$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi\,(x,y\in R)$

Gọi $E(1,-2)$ là điểm biểu diễn số phức $1-2i$

Gọi $F(0,-1)$ là điểm biểu diễn số phức $-i$

Ta có : $|z+2i-1|=|z+i| \Leftrightarrow ME=MF \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực $EF: x-y-2=0$.

Để MA ngắn nhất khi $MA\perp EF$ tại M $\Leftrightarrow M(3,1) \Rightarrow z=3+i$ => **Đáp án A.**

Câu 49. Trong mặt phẳng phức Oxy , trong các số phức z thỏa $|z+1-i|\le 1$. Nếu số phức z có môđun lớn nhất thì số phức z có phần thực bằng bao nhiêu ?

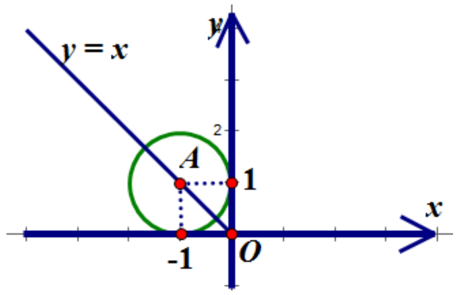
A. $\dfrac{-\sqrt{2}-2}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$. **C.** $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi\,(x,y\in R)$

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $-1+i$

Ta có : $|z+1-i|\le 1 \Leftrightarrow MA\le 1$. Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức là hình tròn tâm $A(-1,1), R=1$ như hình vẽ



Để $\max|z| \Leftrightarrow \max(OM)$

$\Rightarrow M$ thỏa hệ : $\begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2 \leq 1 \\ y=-x\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}, x=-\dfrac{\sqrt{2}+2}{2}$

=> Đáp án A.

Câu 50. Tìm nghiệm phức z thỏa mãn hệ phương trình phức : $\begin{cases}|z-1|=|z-i| \\ \left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right|=1\end{cases}$

A. $z=2+i$. **B.** $z=1-i$. **C.** $z=2-i$. **D.** $z=1+i$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi(x,y\in R)$

Gọi A,B lần lượt là điểm biểu diễn số phức 1 và i

Gọi C,D lần lượt là điểm biểu diễn số phức $-i$ và $3i$

Ta có : $|z-1|=|z-i| \Leftrightarrow MA=MB$ với $A(1,0);B(0,1)$ $\Rightarrow$ M thuộc đường trung trực Δ_1 của AB

$\left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right|=1 \Leftrightarrow |z+i|=|z-3i| \Leftrightarrow MC=MD$ với $C(0,-1);D(0,3)$ $\Rightarrow M$ thuộc đường trung trực Δ_2 của CD

M là giao điểm của $\Delta_1;\Delta_2$ $\Rightarrow M$ thỏa hệ : $\begin{cases}y=x \\ y=1\end{cases} \Leftrightarrow M(1,1) \Rightarrow z=1+i$

=> Đáp án D.