Câu 17. Đáp án A

Giả sử n là số nguyên dương sao cho:

$max\{a_0,a_1,...a_n\}=a_{10}$

Theo công thức khai triển newton ta có:

$$P(x)=(x+2)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k 2^{n-k}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k.x^k 2^k.$$

$$\Rightarrow a_k=C_n^k.2^{n-k}\forall k\overline{0,n}$$

Ta có: $a_{10}=max\{a_0,a_1,...a_n\}\Leftrightarrow\begin{cases}a_9\le a_{10}\\a_{10}\ge a_{11}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_n^9.2^{n-9}\le C_n^{10}.2^{n-10}\\C_n^{10}.2^{n-10}\ge C_n^{11}.2^{n-11}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{n-9}\le\dfrac{1}{10}\\\dfrac{1}{11}\le\dfrac{2}{n-10}\end{cases}\Leftrightarrow 29\le n\le 32$$

Các phép biến đổi trên là đương tương nên ta không cần phải thử lại các giá trị trên.

Vậy $n\in\{29,30,31,32\}$ là tất cả các giá trị thỏa mãn bài toán (thử lại thấy thỏ mãn).

Câu 18. Đáp án D

Theo công thức khai triển Newton ta có:

$$(x^2+1)^n(x+2)^n=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{2k}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^i 2^{n-i}\right).$$

Số hạng chứa 3^{3n-3} tương ứng với cặp (k,i) thỏa mãn:

$$\begin{cases}2k+i=3n-3\\0\le k;i\le n\end{cases}\Rightarrow(k;i)\in\{(n,n-3);(n-1,n-1)\}$$

Do đó hệ số của 3^{3n-3} là: $a_{3n-3}=C_n^n.2^3.C_n^{n-3}+C_n^{n-1}.2^1.C_n^{n-1}=8C_n^3+2n^2=26n$

$$\Leftrightarrow 8\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+2n^2=26n\Rightarrow 2n^2-3n-35=0\Rightarrow n=5$$

Câu 19. Đáp án A.

Ta có: $G(x)=(ax+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k x^k$.

Từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases}C_n^1 ax=24\\C_n^2a^2x^2=252x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}na=24\\\dfrac{n(n-1)}{2}a^2=252\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n^2a^2=576\\\dfrac{n(n-1)}{2}a^2=252\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}na=24\\\dfrac{2n^2}{n(n-1)}=\dfrac{16}{7}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}na=24\\14n=16(n-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=8\\a=3\end{cases}$$

Vậy $a=3,n=8$ là các số cần tìm.

Câu 20. Đáp án C

Các số hạng của tổng vế trái có dạng:

$$(-1)^{k-1}\frac{kC_n^k}{2^k}=(-1)^{k-1}\frac{nC_{n-1}^{k-1}}{2^k}=\frac{n}{2}C_{n-1}^{k-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Do đó ta có:

$$\frac{C_n^1}{2}-\frac{2C_n^2}{2^2}+\frac{3C_n^3}{2^3}-...+(-1)^{n-2}\frac{(n-1)C_n^{n-1}}{2^{n-1}}+(-1)^{n-1}\frac{nC_n^n}{2^n}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{kC_n^k}{2^k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{2}C_{n-1}^{k-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{n}{2}\sum_{k=1}^{n-1}C_{n-1}^{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}=\frac{n}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)^{n-1}=\frac{n}{2^n}.$$

Như vậy ta cần dùng số nguyên dương n thỏa mãn: $\frac{n}{2^n}=\frac{1}{32}\Leftrightarrow 2^{n-5}=n\Leftrightarrow n=8$.

Câu 21. Đáp án A

Cách 1: Ta có

$$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$$

$$C_{n-1}^k=C_{n-2}^k+C_{n-2}^{k-1}$$

$$C_{n-2}^k=C_{n-3}^k+C_{n-3}^{k-1}$$

....

$$C_{k+1}^k=C_k^k+C_k^{k-1}$$

$$C_k^k=C_{k-1}^k+C_{k-1}^{k-1}$$

Cộng các đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$$C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-2}^{k-1}+...+C_k^{k-1}+C_{k-1}^{k-1}\quad(*)$$

Ta có: $1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+n(n+1)(n+2)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+2)!}{(k-1)!}=6\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+2)!}{3!(k-1)!}=6\sum_{k=1}^{n}C_{k+2}^3=6\left(C_3^3+C_4^3+...+C_{n+1}^3+C_{n+2}^3\right).$$

Áp dụng câu $(*)$ với $k=4$, thay n bởi $n+3$ ta được:

$$C_3^3+C_4^3+...+C_{n+1}^3+C_{n+2}^3=C_{n+3}^4$$

Vậy $1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+n(n+1)(n+2)=6C_{n+3}^4=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Cách 2: Với bài toán này ta có thể dùng máy tính để thử trường hợp riêng.

Câu 22. Đáp án D

Xét khai triển:

$$(a+b)^n=C_n^0b^n+C_n^1a^1b^{n-1}+...+C_n^{n-2}a^{n-2}b^2+C_n^{n-1}a^{n-1}b^1+C_n^na^n.$$

Chọn $a=b=1$ ta được $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n$

Câu 23. Đáp án C

Xét khai triển: $(a+b)^n = C_n^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + ... + C_n^{n-2} a^{n-2} b^2 + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + C_n^n a^n$.

Chọn $a=2, b=1$ ta được:

$3^n = (2+1)^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + ... + 2^n C_n^n = 243 \Rightarrow n = 5$

Câu 24. Đáp án A

Các số hạng của S có dạng:

$$\frac{1}{(2k)!(2019-2k)!} = \frac{1}{2019!}\frac{2019!}{(2k)!(2019-2k)!} = \frac{1}{2019!}C_{2019}^{2k}.$$

Do đó $\Rightarrow 2019!S = C_{2019}^2 + C_{2019}^4 + ... + C_{2019}^{2016} + C_{2019}^{2018}$.

Nhận thấy C_{2019}^{2k} là hệ số của x^{2k} trong khai triển $(x+1)^{2019}$.

Vì vậy xét $P(x) = (x+1)^{2019}$, theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$P(x) = (x+1)^{2019} = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 x + C_{2019}^2 x^2 + ... + C_{2019}^{2019} x^{2019}$

Từ đó ta có:

$P(1) = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 + C_{2019}^2 + ... + C_{2019}^{2019}$.

$P(-1) = C_{2019}^0 - C_{2019}^1 + C_{2019}^2 - ... + C_{2019}^{2018} - C_{2019}^{2019}$

Suy ra: $2019!S + 1 = C_{2019}^0 + C_{2019}^2 + C_{2019}^4 + ... + C_{2019}^{2018} = \dfrac{P(1)+P(-1)}{2} = 2^{2018}$

$\Leftrightarrow S = \dfrac{2^{2018}-1}{2019!}$

Câu 25. Đáp án D

Theo giả thiết ta có:

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{2n} x^{2n}$.

Khi đó $P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{2n}$ và $P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - ... + a_{2n}$.

Suy ra $T = a_0 + a_2 + ... + a_{2n} = \dfrac{P(1)+P(-1)}{2} = \dfrac{2^{2n-1}+2^{2n}}{2} = 3.2^{2n-2}$

$\Rightarrow 768 = 3.2^{2n-2} \Leftrightarrow n = 5$

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$P(x) = (x-1)^{2n} + x(x+1)^{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k x^k (-1)^{2n-k} + x\sum_{k=1}^{2n-1} C_{2n-k}^k x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k x^k (-1)^{2n-k} + \sum_{k=1}^{2n} C_{2n-k}^{k-1} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{2n}\left(C_{2n}^k(-1)^k + C_{2n-1}^{k-1}\right)x^k = 1 + \sum_{k=1}^{10}\left(C_{10}^k(-1)^k + C_9^{k-1}\right)x^k.$$

Vậy $a_5 = C_{10}^5(-1)^5 + C_9^4 = -126$.

Câu 26. Đáp án B.

Xét khai triển $(a+b)^{2n} = C_{2n}^0 b^{2n} + C_{2n}^1 a^1 b^{2n-1} + ... + C_{2n}^{2n-1} a^{2n-2} b^1 + C_{2n}^{2n} a^{2n}$

Chọn $a = b = 1$, ta được:

$2^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1+C_{2n}^2+...+C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}$

Chọn $a=1, b=-1$, ta được:

$0=C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2+...-C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}$

Trừ hai đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$2^{2n}=2\left(C_{2n}^1+C_{2n}^3+...+C_{2n}^{2n-1}\right)=2.2048=2^{12}\Leftrightarrow n=6$

Câu 27. Đáp án A.

Nhận thấy rằng:

$3S=3a_1+3^3a_3+...+3^{2011}a_{2011}+3^{2013}a_{2013}$

Lần lượt thay $x=3, x=-3$ vào khai triển đã cho ta được:

$P(3)=7^{2014}=a_0+3a_1+3^2a_2+...+3^{2013}a_{2013}+3^{2014}a_{2014}$

$P(-3)=5^{2014}=a_0-3a_1+3^2a_2-...-3^{2013}a_{2013}+3^{2014}a_{2014}$

Trừ hai đẳng thức này vế theo vế, ta được:

$2\left(3a_1+3^3a_3...+3^{2011}a_{2011}+3^{2013}a_{2013}\right)=7^{2014}-5^{2014}$

$$\Leftrightarrow 3S=\frac{7^{2014}-5^{2014}}{2}\Leftrightarrow S=\frac{7^{2014}-5^{2014}}{6}$$

Vậy $S=a_1+3^2a_3+...+3^{2010}a_{2011}+3^{2012}a_{2013}=\dfrac{7^{2014}-5^{2014}}{6}$

Câu 28. Đáp án B.

Nhận thấy $(-5)^kC_{100}^k$ là hệ số của x^k trong khai triển $(1-5x)^{100}$

Vì thế xét $P(x)=(1-5x)^{100}$, theo khai triển nhị thức NewTon, ta có:

$P(x)=(1-5x)^{100}=C_{100}^0-C_{100}^1 5x+C_{100}^2(5x)^2-...+C_{100}^{100}(5x)^{100}$

Thay $x=1$ vào ta được:

$P(x)=(4)^{100}=C_{100}^0-C_{100}^1 5+C_{100}^2 5^2-...+C_{100}^{100}5^{100}$

Chú ý: Ta cũng có thể xét khai triển $(1+5x)^{100}$ rồi sau đó thay $x=-1$ vào.

Câu 29. Đáp án C.

Ta có $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$

Cho $x=1$ thì A đúng.

Cho $x=-1$ thì B đúng.

Cho $x=2$ thì D đúng.

Cho $x=-2$ thì $(-1)^n=C_n^0-2C_n^1+C_n^2 2^2-...+C_n^n(-2)^n$.

Vậy C sai.

Câu 30. Đáp án B.

$(2x+y)^5=(2x)^5+5(2x)^4y+10(2x)^3y^2+10(2x)^2y^3+5(2x)y^4+y^5$

$=32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$.

XÁC SUẤT

A. LÝ THUYẾT

I. PHÉP THỬ NGẪU NHIÊN VÀ KHÔNG GIAN MẪU

1. Phép thử ngẫu nhiên

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

2. Không gian mẫu

Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử đó và ký hiệu là Ω.

Ví dụ: Khi ta tung một đồng xu có 2 mặt, ta hoàn toàn không biết trước được kết quả của nó, tuy nhiên ta lại biết chắc chắn rằng đồng xu rơi xuống sẽ ở một trong 2 trạng thái: sấp (S) hoặc ngửa (N).

Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \{S; N\}$

II. BIẾN CỐ

1. Một biến cố A (còn gọi là sự kiện A) liên quan tới phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của nó còn tùy thuộc vào kết quả của T.

Mỗi kết quả của phép thử T làm cho biến cố A xảy ra được gọi là một kết quả thuận lợi cho A.

2. Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được kí hiệu bởi Ω_A. Để đơn giản, ta có thể dùng chính chữ A để kí hiệu tập hợp các kết quả thuận lợi cho A.

Khi đó ta cũng nói biến cố A được mô tả bởi tập A.

3. Biến cố chắc chắn là biến cố luôn xảy ra khi thực hiện hiện phép thử T. Biến cố chắc chắn được mô tả bởi tập Ω và được ký hiệu là Ω.

4. Biến cố không thể là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử T. Biến cố không thể được mô tả bởi tập $\varnothing$.

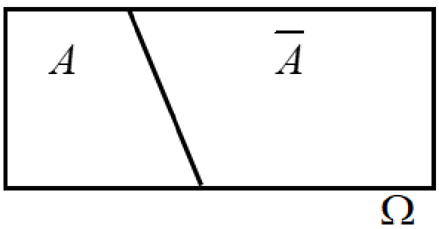
Các phép toán trên biến cố

* Tập $\Omega \setminus A$ được gọi là biến cố đối của biến cố A, kí hiệu là $\overline{A}$. Giả sử A và B là hai biến cố liên quan đến một phép thử. Ta có:

* Tập $A \cup B$ được gọi là hợp của các biến cố A và B.

* Tập $A \cap B$ được gọi là giao của các biến cố A và B.

* Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì ta nói A và B xung khắc.



Bảng đọc ngôn ngữ biến cố.

Kí hiệu	Ngôn ngữ biến cố
$A \in \Omega$	A là biến cố
$A = \varnothing$	A là biến cố không
$A = \Omega$	A là biến cố chắc chắn

$C = A \cup B$	C là biến cố "A hoặc B"
$C = A \cap B$	C là biến cố "A và B"
$A \cap B = \varnothing$	A và B xung khắc
$B = \overline{A}$	A và B đối nhau

III. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Định nghĩa cổ điển của xác suất:

Giả sử phép thử T có một số hữu hạn kết quả có thể đồng khả năng. Khi đó xác suất của một biến cố A liên quan tới T là tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho A và số kết quả có thể

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Trong cuộc sống khi nói về biến cố, ta thường nói biến cố này có nhiều khả năng xảy ra, biến có kia có ít khả năng xảy ra, biến cố này có nhiều khả năng xảy ra hơn biến cố kia. Toán học đã định lượng hóa các khả năng này bằng cách gán cho mỗi biến cố một số không âm, nhỏ hơn hoặc bằng 1 gọi là xác suất của biến cố.

Từ định nghĩa cổ điển về xác suất ta có các bước để tính xác suất của một biến cố như sau:

Bước 1: Xác định không gian mẫu Ω rồi tính số phần tử của Ω, tức là đếm số kết quả có thể của phép thử T.

Bước 2: Xác định tập con A mô tả biến cố A rồi tính số phần tử của A, tứ là đếm số kết quả thuận loại cho A.

Bước 3: Lấy kết quả của bước 2 chia cho bước 1.

Nhận xét: Việc tính số kết quả có thể (bước 1) thường dễ dàng hơn hiểu so với việc tính số kết quả thuận lợi cho A (bước 1). Để giải quyết tốt các bài toán xác suất ta cần nắm chắc phần tổ hợp trước.

STUDY TIP

Từ định nghĩa cổ điển về xác suất ta suy ra: $0 \le P(A) \le 1; P(\Omega) = 1; P(\varnothing) = 0$

Chú ý: Các kí hiệu $n(\Omega); n(A)$ được hiểu tương đương với $|\Omega|; |\Omega_A|$ là số phần tử của không gian mẫu và của tập hợp thuận lợi cho biến cố A.

4. Quy tắc cộng xác suất

a) Quy tắc cộng xác suất

* Nếu hai biến cố A, B xung khắc nhau thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

* Nếu các biến cố $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ xung khắc nhau thì

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k)$$

STUDY TIP

Vì $A \cup \overline{A} = \Omega$ và $A \cap \overline{A} = \varnothing$ nên theo công thức cộng xác suất thì

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$$

b) Công thức tính xác suất biến cố đối

Xác suất của biến cố $\overline{A}$ của biến cố A là

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)$$

Dưới đây là một ví dụ để ta hiểu rõ hơn về quy tắc cộng.

Ví dụ 1. Một hộp đựng 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên hai viên biên. Xác suất để chọn được hai viên bi cùng màu là

A. $\frac{5}{18}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{36}$. **D.** $\frac{1}{12}$.

Lời giải

Đáp án A.

Gọi A là biến cố : "Chọn được hai viên bi xanh".

B là biến cố : "Chọn được hai viên bi đỏ".

C là biến cố : "Chọn được hai viên bi vàng".

Khi đó biến cố: "Chọn được hai viên bi cùng màu" là biến cố $A\cup B\cup C$. Do A,B,C đôi một xung khắc với nhau nên theo quy tắc cộng ta có

$$P\left(A\cup B\cup C\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)+P\left(C\right)$$

Ta có $P\left(A\right)=\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{6}{36}$; $P\left(B\right)=\frac{C_3^2}{C_9^2}=\frac{3}{36}$; $P\left(C\right)=\frac{C_2^2}{C_9^2}=\frac{1}{36}$.

Vậy $P\left(A\cup B\cup C\right)=\frac{6}{36}+\frac{3}{36}+\frac{1}{36}=\frac{5}{18}$

5) Quy tắc nhân xác suất

Biến cố giao	**Biến cố độc lập**
Cho biến cố A và B. Biến cố " cả A và B đều xảy ra" kí hiệu là AB gọi là giao của hai biến cố A và B.	Hai biến cố gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra biến cố kia.
Một cách tổng quát, cho k biến cố $A_1,A_2,A_3,...,A_k$. Biến cố: "Tất cả k biến cố $A_1,A_2,A_3,...,A_k$ đều xảy ra", kí hiệu là $A_1A_2A_3...A_k$ được gọi là giao của k biến cố đó.	Một cách tổng quát, cho k biến cố $A_1,A_2,A_3,...,A_k$. Chúng được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của một nhóm bất kì trong các biến cố trên không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của các biến cố còn lại.

Quy tắc nhân xác suất

Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì

$$P\left(AB\right)=P\left(A\right).P\left(B\right)$$

Một cách tổng quát, nếu k biến cố $A_1,A_2,A_3,...,A_k$ là độc lập thì

$$P\left(A_1,A_2,A_3,...,A_k\right)=P\left(A_1\right).P\left(A_2\right)...P\left(A_k\right)$$

Chú ý:

* Nếu A và B độc lập thì A và $\overline{B}$ độc lập, B và $\overline{A}$ độc lập, $\overline{B}$ và $\overline{A}$ độc lập. Do đó Nếu A và B độc lập thì ta còn có các đẳng thức

$$P\left(A\overline{B}\right)=P\left(A\right).P\left(\overline{B}\right)$$
$$P\left(\overline{A}B\right)=P\left(\overline{A}\right).P\left(B\right)$$
$$P\left(\overline{A}\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right).P\left(\overline{B}\right)$$

* Nếu một trong các đẳng thức trên bị vi phạm thì hai biến cố A và B không độc lập với nhau

Ví dụ 2. Gieo hai con súc sắc I và II cân đối, đồng chất một cách độc lập. Ta có biến cố A: "Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm". Lúc này giá trị của $P(A)$ là

A. $\frac{25}{36}$. **B.** $\frac{11}{36}$. **C.** $\frac{1}{36}$. **D.** $\frac{15}{36}$.

Lời giải

Đáp án B.

Gọi $A_i\left(i=1;2\right)$ là biến cố : "Con súc sắc thứ i ra mặt 6 chấm"

$\Rightarrow A_1$ và A_2 là hai biến cố độc lập và ta có $\begin{cases} P\left(A_1\right)=\frac{1}{6} \\ P\left(A_2\right)=\frac{1}{6} \end{cases}$

Thay vì tính $P\left(A\right)$ta đi tính $P\left(\overline{A}\right)$. Ta có $\overline{A}=\overline{A_1}.\overline{A_2}$.

$$P\left(\overline{A}\right)=P\left(\overline{A_1}\right).P\left(\overline{A_2}\right)=\left(1-P\left(A_1\right)\right).\left(1-P\left(A_2\right)\right)=\frac{5}{6}.\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$$

Vậy $P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ XÁC SUẤT

DẠNG 1. SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN VỀ XÁC XUẤT - QUY VỀ BÀI TOÁN ĐẾM.

Bài toán 1. Bài toán tính xác suất sử dụng định nghĩa cổ điển bằng cách tính trực tiếp số phần tử thuận lợi cho biến cố.

Phương pháp chung:

Trong bài toán này, việc xác định số phần tử thuận lợi cho biến cố cần tìm dễ dàng xác định (có thể liệt kê các phương án, có thể tính được các cách chọn ngắn gọn).

Bước 1: Tìm số phần tử của không gian mẫu.

Bước 2: Đếm số phần tử thuận lợi của không gian mẫu.

Bước 3: Tính xác suất $P\left(A\right)=\frac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}$.

STUDY TIP

Phần lớn các bài toán xác suất đều có thể quy về 2 bài toán đếm:

* Đếm số phần tử của tập thuận lợi với biến cố.
* Đếm số phần tử của không gian mẫu Ω.

Các bước làm bài đã được trình bày rõ ở lý thuyết trước.

Ví dụ 1. Gieo ngẫu nhiên hai con xúc sắc cân đối và đồng chất. Xác suất của biến cố " Có ít nhất một con xúc sắc xuất hiện mặt một chấm" là

A. $\frac{11}{36}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{25}{36}$. **D.** $\frac{15}{36}$.

Lời giải

Đáp án A.

Gọi A là biến cố: "Có ít nhất một con xúc sắc xuất hiện mặt một chấm".

Bước 1: Tìm số phần tử không gian mẫu.

Do mỗi xúc sắc có thể xảy ra 6 trường hợp nên số kết quả có thể xảy ra là $|\Omega| = 6.6 = 36$.

Bước 2: Tìm số kết quả thuận lợi cho A.

Ta có các trường hợp sau:

$$\{(1;1);(1;2);(1;3);(1;4);(1;5);(1;6);(2;1);(3;1);(4;1);(5;1);(6;1)\} \Rightarrow |\Omega_A| = 11$$

Bước 3: Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{11}{36}$.

Ví dụ 2. Một tổ gồm 9 em, trong đó có 3 nữ được chia thành 3 nhóm đều nhau. Tính xác xuất để mỗi nhóm có một nữ.

A. $\frac{3}{56}$. **B.** $\frac{27}{84}$. **C.** $\frac{53}{56}$. **D.** $\frac{19}{28}$.

Lời giải

Đáp án B.

Bước 1: Tìm số phần tử không gian mẫu.

Chọn ngẫu nhiên 3 em trong 9 em đưa vào nhóm thứ nhất có số khả năng xảy ra là C_9^3

Chọn ngẫu nhiên 3 em trong 6 em đưa vào nhóm thứ hai có số khả năng xảy ra là C_6^3.

Còn 3 em đưa vào nhóm còn lại thì số khả năng xảy ra là 1 cách.

Vậy $|\Omega| = C_9^3 C_6^3 .1 = 1680$

Bước 2: Tìm số kết quả thuận lợi cho A.

Phân 3 nữ vào 3 nhóm trên có $3!$ cách.

Phân 6 nam vào 3 nhóm theo cách như trên có $C_6^2 C_4^2 .1$ cách khác nhau.

$\Rightarrow |\Omega_A| = 3!.C_6^2 C_4^2 .1 = 540.$

Bước 3: Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{540}{1680} = \frac{27}{84}$.

STUDY TIP

Bài toán ở ví dụ 2 liên quan chặt chẽ với phép đếm. Ta cần nắm chắc phần quy tắc cộng, quy tắc nhân để giải quyết các bài toán tính xác suất theo phương pháp cổ điển.

Ví dụ 3. Một hộp chứa 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Chọn 6 viên bi một cách ngẫu nhiên rồi cộng các số trên 6 viên bi được rút ra với nhau. Xác suất để kết quả thu được là số lẻ là

A. $\frac{226}{462}$. **B.** $\frac{118}{231}$. **C.** $\frac{115}{231}$. **D.** $\frac{103}{231}$.

Lời giải

Đáp án B.

Bước 1: Tìm số phần tử không gian mẫu.

Chọn ngẫu nhiên 6 viên bi trong 11 viên bi thì số cách chọn là $n(\Omega)=C_{11}^{6}=462$

Bước 2: Tìm số phần tử thuận lợi cho biến cố.

Gọi A là biến cố : "Chọn 6 viên bi cộng các số trên 6 viên bi đó thu được là số lẻ".

Trong 11 viên bi có 6 viên bi mang số lẻ đó là $\{1;3;5;7;9;11\}$ và 5 viên bi mang số chẵn $\{2;4;6;8;10\}$.

*** Trường hợp 1:** 1 viên bi mang số lẻ và 5 viên bi mang số chẵn.

Số cách chọn trong trường hợp 1 là $C_6^1.C_5^5$ cách.

*** Trường hợp 2:** 3 viên bi mang số lẻ và 3 viên bi mang số chẵn.

Số cách chọn trong trường hợp 2 là $C_6^3.C_5^3$ cách.

*** Trường hợp 3:** 5 viên bi mang số lẻ và 1 viên bi mang số chẵn.

Số cách chọn trong trường hợp 3 là $C_6^5.C_5^1$ cách.

Suy ra $n(A)=C_6^1.C_5^5+C_6^3.C_5^3+C_6^5.C_5^1=6+200+30=236.$

$\Rightarrow |\Omega_A|=3!.C_6^2C_4^2.1=540.$

Bước 3: Tính xác suất $P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{236}{462}=\frac{118}{231}$.

STUDY TIP

Giải thích thực tế: Ta có thể đưa ra các trường hợp như vậy là vì ta có:

Để có được tổng là số lẻ thì ta phải có: lẻ + chẵn = lẻ.

TH1: 5 số chẵn cộng lại với nhau sẽ ra số chẵn. Do đó cộng với 1 lẻ thì ra số lẻ.

TH2: 3 lẻ = (1 lẻ + 1 lẻ) + 1 lẻ = 1 chẵn + 1 lẻ = 1 lẻ.

3 số chẵn cộng lại với nhau ra chẵn. Do đó cộng với 1 lẻ thì ra số lẻ.

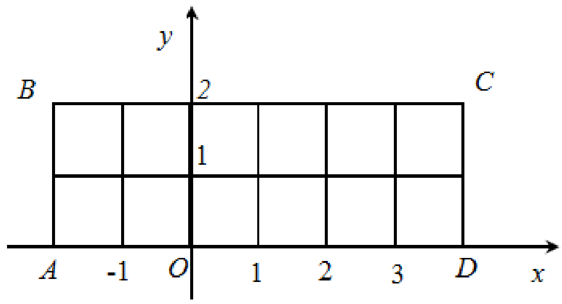
…

$\Rightarrow$ số viên bi mang số lẻ phải là số lẻ.

Ví dụ 4. Trong hệ trục tọa độ Oxy cho $A(-2;0), B(-2;2), C(4;2), D(4;0)$. Chọn ngẫu nhiên một điểm có tọa độ $(x;y)$; (với x, y là các số nguyên) nằm trong hình chữ nhật $ABCD$ (kể cả các điểm nằm trên cạnh).
Gọi A là biến cố : "x, y đều chia hết cho 2". Xác suất của biến cố A là

A. $\frac{7}{21}$. **B.** $\frac{13}{21}$. **C.** 1. **D.** $\frac{8}{21}$.

Lời giải



Ta có $\Omega = \{(x;y), -2 \le x \le 4, 0 \le y \le 2\}$, với $x, y \in \mathbb{Z}$.

Vậy $x \in \{-2;-1;;1;2;3;4\}$ và $y \in \{0;1;2\}$.

Suy ra $n(\Omega) = 7.3 = 21$ (mỗi điểm là một giao điểm trên hình).

Ta có A: "x, y đều chia hết cho 2". Nên ta có $A = \{(x;y) : x \in \{-2;0;2;4\}; y \in \{0;2\}\}$

Theo quy tắc nhân ta có $n(A) = 4.2 = 8 \Rightarrow n(A) = 8 \Rightarrow P(A) = \frac{8}{21}$

STUDY TIP

Với các bài toán có miền giới hạn nhỏ, ta nên liệt kê các phần tử ra tránh sử dụng miền sẽ nhầm lẫn số phần tử.

Ví dụ 5. Một người bỏ ngẫu nhiên 4 lá thư và 4 chiếc phong bì thư đã để sẵn địa chỉ. Xác suất để có ít nhất một lá thư bỏ đúng địa chỉ là.

A. $\frac{5}{8}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Gọi 4 lá thư lần lượt là A, B, C, D và 4 phong bì thư có địa chỉ đúng với các lá thư trên lần lượt là $1; 2; 3; 4$

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = 4! = 24$.

Gọi X là biến cố " có ít nhất một lá thư bỏ đúng địa chỉ".

Ta có các trường hợp sau:

***TH1:** Cả 4 lá thư đều bỏ đúng địa chỉ: Chỉ có một trường hợp duy nhất

***TH2:** Có đúng 2 lá thư bỏ đúng địa chỉ. Có 6 trường hợp xảy ra là: $A1-B2-C4-D3$; $A1-B4-C3-D2$; $A4-B2-C3-D1$; $A1-B3-C2-D4$; $A3-B2-C1-D4$; A3 hoặc $A2-B1-C3-D4$.

***TH3:** Có đúng 1 lá thư bỏ đúng địa chỉ: Chỉ có lá thư A bỏ đúng địa chỉ thì có 2 trường hợp $A1-B3-C4-D2$; $A1-B4-C2-D3$

Tương tự với lá thư B có 2 trường hợp.

Lá thư C chỉ có đúng 2 trường hợp.

Lá thư D chỉ có đúng 2 trường hợp.

Suy ra có 8 trường hợp chỉ có đúng 1 lá thư bỏ đúng địa chỉ.

Vậy số phần tử của biến cố X là $n(X)=1+6+8=15$

Nên $P(X)=\dfrac{15}{24}=\dfrac{5}{8}$.

STUDY TIP

Giải thích thực tế: có nhiều độc giả sẽ thêm trường hợp có 3 lá thư bỏ đúng địa chỉ, tuy nhiên như vậy là lặp lại trường hợp 4 lá thư bỏ đúng địa chỉ. Do đó nếu 3 lá thư đúng địa chỉ rồi thì lá thư cuối cùng cũng nghiễm nhiên đúng địa chỉ và trùng với TH1.

Ví dụ 1. Một hộp đựng 15 viên bi, trong đó có 7 biên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi (không kể thứ tự) ra khỏi hộp. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất 1 viên màu đỏ.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{418}{455}$. **C.** $\dfrac{1}{13}$. **D.** $\dfrac{12}{13}$.

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ 15 viên bi thì số cách chọn là $C_{15}^{3}=445$.

Gọi A là biến cố "trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất một viên màu đỏ". Số trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

***Trường hợp 1:** Lấy được 1 viên màu đỏ, số cách lấy là: $C_8^1.C_7^2$.

***Trường hợp 2:** Lấy được 2 viên màu đỏ, số cách lấy là: $C_8^2.C_7^1$.

***Trường hợp 3:** Lấy được 3 viên màu đỏ, số cách lấy là: C_8^3.

Số trường hợp thuận lợi cho biến cố A là $n(A)=C_8^1.C_7^2+C_8^2.C_7^1+C_8^3=420$

Vậy $P(A)=\dfrac{C_8^1.C_7^2+C_8^2.C_7^1+C_8^3}{C_{15}^3}=\dfrac{12}{13}$.

Bài toán 2: Tính xác suất sử dụng định nghĩa cổ điển bằng phương pháp gián tiếp.

Trong nhiều bài toán tính xác suất, việc tính số phần tử thuận lợi cho biến cố A trở nên khó khăn do có quá nhiều trường hợp, thì ta đi tìm số phần tử thuận lợi cho biến cố đối của biến cố A. Sau đó lấy số phần tử không gian mẫu trừ đi kết quả vừa tìm được thì ta có số phần tử thuận lợi cho biến cố A.

Ta sẽ sử dụng bài toán ở ví dụ 6 như sau:

Ví dụ 2. Một hộp đựng 15 viên bi, trong đó có 7 biên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi (không kể thứ tự) ra khỏi hộp. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất 1 viên màu đỏ.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{418}{455}$. **C.** $\frac{1}{13}$. **D.** $\frac{12}{13}$.

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ 15 viên bi thì số cách chọn là $C_{15}^3 = 445$.

Gọi A là biến cố "trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất một viên màu đỏ" thì là biến cố $\overline{A}$ " cả ba viên bi lấy ra đều không có màu đỏ" (tức là lấy ra cả ba viên bi đều màu xanh"

Số cách chọn ra 3 viên bi mà 3 viên bi đó đều màu xanh là $C_7^3 = 35 \Rightarrow n\left(\overline{A}\right) = 35$

$\Rightarrow$ Số cách chọn ra 3 viên bi mà trong đó có ít nhất một viên bi màu đỏ là $455 - 35 = 420$ cách $\Rightarrow n(A) = 420$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{420}{455} = \frac{12}{13}$$

STUDY TIP

Giải thích thực tế: Dấu hiệu nhận biết các bài toán thực tế chọn đồ vật mà sử dụng cách tính gián tiếp đó là câu hỏi xuất hiện từ "có ít nhất …" thì thường ta sẽ giải quyết theo cách gián tiếp đó là tìm số cách chọn sao cho "không xuất hiện…" Ta sẽ tìm hiểu kĩ hơn ở ví dụ 8.

Ví dụ 3. Một hộp quà đựng 16 dây buộc tóc cùng chất liệu, cùng kiểu dáng nhưng khác nhau về màu sắc. Cụ thể trong hộp có 8 dây xanh, 5 dây đỏ, và 3 dây vàng. Bạn An được chọn ngẫu nhiên 6 dây từ hộp quà để làm phần thưởng cho mình. Tính xác suất để trong 6 dây bạn An chọn có ít nhất 1 dây vàng và không quá 4 dây đỏ.

A. $\frac{8005}{8008}$. **B.** $\frac{11}{14}$. **C.** $\frac{6289}{8008}$. **D.** $\frac{1719}{8008}$.

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên 6 dây từ 16 dây thì số cách chọn là $n(\Omega) = C_{16}^6 = 8008$

Gọi A là biến cố " 6 dây bạn An chọn có ít nhất 1 dây vàng và không quá 4 dây đỏ".

Do đó nếu tính trực tiếp sẽ có quá nhiều trường hợp, và từ STUDY TIP ở ví dụ 7, ta sẽ sử dụng biến cố đối để giải quyết bài toán:

Trường hợp 1: Không có dây nào vàng, số cách lấy là: C_{13}^6.

Trường hợp 2: Có 1 dây vàng và 5 dây đỏ, số cách lấy là: $C_3^1.C_5^5$.

Suy ra $n(A)=C_{16}^6-C_{13}^6-C_3^1.C_5^5=6289$

Nên $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{C_{16}^6-C_{13}^6-C_3^1.C_5^5}{C_{16}^6}=\dfrac{6289}{8008}$.

Ví dụ 4. Một trường THPT có 18 học sinh giỏi toàn diện, trong đó có 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Chọn ngẫu nhiên 8 học sinh từ 18 học sinh trên để đi dự trại hè. Tính xác suất để mỗi khối có ít nhất 1 học sinh được chọn.

A. $\dfrac{212}{221}$. **B.** $\dfrac{9}{221}$. **C.** $\dfrac{59}{1326}$. **D.** $\dfrac{1267}{1326}$.

Lời giải

Chọn 8 học sinh bất kì trong 18 học sinh thì số cách chọn là $n(\Omega)=C_{18}^8$ cách.

Tương tự với dấu hiệu mà STUDY TIP đưa ra thì ta tìm số trường hợp thuận lợi cho biến cố đối của biến cố cần tìm.

Chọn 8 học sinh mà không có khối 10, có C_{13}^8 cách.

Chọn 8 học sinh mà không có khối 11, có C_{12}^8 cách.

Chọn 8 học sinh mà không có khối 12, có C_{11}^8 cách.

Gọi A là biến cố " 8 học sinh được chọn, mỗi khối có ít nhất 1 học sinh". Số trường hợp thuận lợi cho A là $n(A)=C_{18}^8-\left(C_{13}^8+C_{12}^8+C_{11}^8\right)=41811$

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{41811}{C_{18}^8}=\dfrac{1267}{1326}$.

Ví dụ 5. Xét các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ các số 1, 3, 5, 7, 9. Tính xác suất để tìm được một số không bắt đầu bởi 135.

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{60}$. **C.** $\dfrac{59}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải

Số phần tử không gian mẫu là: $n(\Omega)=5!$.

Gọi A là biến cố "số tìm được không bắt đầu bởi 135".

Thì biến cố $\overline{A}$ là biến cố "số tìm được bắt đầu bởi 135"

Buộc các số 135 lại thì ta còn 3 phần tử. Số các số tạo thành thỏa mãn số 135 đứng đầu là $1.2.1=2$ cách $\Rightarrow n(A)=120-2=118$ cách

Nên $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{118}{120}=\frac{59}{60}$

STUDY TIP

Phương pháp "buộc" các phần tử được giới thiệu kĩ ở phần quy tắc đếm, được áp dụng khi các phần tử có điều kiện đứng liền kề nhau.

DẠNG 2. SỬ DỤNG QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

Bước 1: Xác định biến cố của các xác suất, có thể gọi tên các biến cố $A;B;C;D$ để biểu diễn.

Bước 2: Tìm mối quan hệ giữa các biến cố vừa đặt tên, biểu diễn biến cố trung gian và quan trọng nhất là biến cố đề bài đang yêu cầu tính xác suất thông qua các biến cố ở bước 1.

Bước 3: Sử dụng các mối quan hệ vừa xác định ở bước 2 để chọn công thức cộng hay công thức nhân phù hợp.

Ví dụ 1. Một chiếc ôtô với hai động cơ độc lập đang gặp trục trặc kĩ thuật. Xác suất để động cơ 1 gặp trục trặc là 0,5. Xác suất để động cơ 2 gặp trục trặc là 0,4. Biết rằng xe chỉ không thể chạy được khi cả hai động cơ bị hỏng. Tính xác suất để xe đi được.

A. $0,2$. **B.** $0,8$. **C.** $0,9$. **D.** $0,1$.

Lời giải

Gọi A là biến cố "động cơ 1 bị hỏng", gọi B là biến cố "động cơ 2 bị hỏng".

Suy ra AB là biến cố "cả hai động cơ bị hỏng" $\Leftrightarrow$ " xe không chạy được nữa".

Lại thấy hai động cơ hoạt động độc lập nên A và B là hai biến cố độc lập.

$\Rightarrow$ Áp dụng quy tắc nhân xác suất ta được xác suất để xe phải dừng lại giữa đường là $P(AB)=0,5.0,4=0,2$.

Vậy xác suất để xe đi được là $1-0,2=0,8$.

STUDY TIP

Các bài toán không nói bất kì đối tượng nào mà chỉ cho các giá trị xác suất thì ta bắt buộc phải sử dụng công thức cộng hoặc công thức nhân xác suất. Ở đây hai động cơ độc lập nên A và B là hai biến cố độc lập, do vậy ta áp dụng công thức nhân xác suất.

Ví dụ 2. Túi I chứa 3 bi trắng, 7 bi đỏ, 15 bi xanh. Túi II chứa 10 bi trắng, 6 bi đỏ, 9 bi xanh. Từ mỗi túi lấy ngẫu nhiên 1 viên bi. Tính xác suất để lấy được hai viên cùng màu.

A. $\frac{207}{625}$. **B.** $\frac{72}{625}$. **C.** $\frac{418}{625}$. **D.** $\frac{553}{625}$.

Lời giải

Gọi A_t, A_d, A_x lần lượt là biến cố bi rút được từ túi I là trắng, đỏ, xanh.

Gọi B_t, B_d, B_x lần lượt là biến cố bi rút được từ túi II là trắng, đỏ, xanh.

Các biến cố A_t, A_d, A_x độc lập với B_t, B_d, B_x.