Khi đến C thấy $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^4+5}{x-x^3+1}=3\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ nên dừng lại và chọn đáp án C

Ví dụ 4 : Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ bằng :

**A.** 2 **B.** -2 **C.** 1 **D.** -1

Đáp án B

Lời giải :

Cách 1 : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=-2$

Vậy chọn đáp án B

Cách 2 : Sử dụng MTCT

**Ví dụ 5** : Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$ bằng :

**A.** $-\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $-\infty$ **D.** $+\infty$

**Đáp án B**

Lời giải :

Cách 1 : Theo ví dụ đã trình bày ở dạng 1 thì $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1})=-\infty$

Ta đưa $x^2$ ra ngoài căn rồi chia cả tử và mẫu cho x. Cụ thể như sau :

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}-|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2x+3}$$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2x+3}==\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{1}{2}$$

Vậy đáp án đúng là B

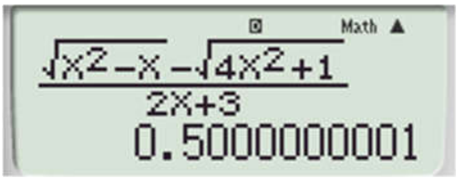
Cách 2 : Sử dụng máy tính tính giá trị hàm số tại $x=10^{-10}$ ta được kết quả như hình bên. Vậy chọn đáp án B

Cách 3 : Ta có thể giải bài này bằng phương pháp loại trừ như sau :

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1})=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}(2x+3)=-\infty$ nên giới hạn cần tìm phải mang dấu dương. Mặt khác bậc tử và bậc mẫu bằng nhau nên giới hạn cần tìm là hữu hạn.

Đáp án cần tìm là đáp án B

STUDY TIP




**Ví dụ 6 :** Biết $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}} = \dfrac{\sqrt{a}}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Giá trị nhỏ nhất của tích ab bằng :

**A.** 6 **B.** 12 **C.** 18 **D.** 24

Đáp án C

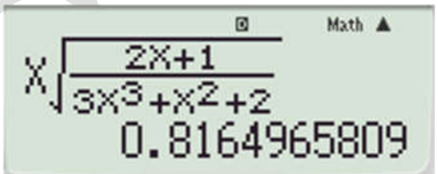
Lời giải :

Ta có : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2x^3+x^2}{3x^3+x^2+2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Vậy $\dfrac{\sqrt{a}}{b} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ Dễ dàng suy ra được tích của ab là 18.

Chú ý : Nếu sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x = 10^{10}$ thì ta thu được kết quả như hình bên. Do đó, nếu không có kiến thưc về giới hạn hàm số, rất khó tìm ra được đáp án đúng nếu chỉ dùng MTCT. Ngược lại nếu có kiến thức vững vàng, bạn đọc sẽ nhanh chóng tìm ra đáp án, thậm chí là trong chớp mắt ! Vì vậy, tôi xin nhắc lại, tôi khuyến nghị các bạn đọc nên giải bài tập theo kiểu tự luận một cách căn cơ để có thể đối mặt với các bài toán ‘’chống MTCT’’

STUDY TIP




**Dạng 4 : Dạng vô định** $0.\infty$

Bài toán : Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)v(x)]$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)] = 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}[\mathrm{v}(x)] = \pm\infty$

Phương pháp : Ta có thể biến đổi $\lim\limits_{x\to x_0}[\mathrm{u(x)v}(x)] = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{\dfrac{1}{v(x)}}$ để đưa về dạng $\dfrac{0}{0}$ hoặc

$\lim\limits_{x\to x_0}[\mathrm{u(x)v}(x)] = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{\dfrac{1}{v(x)}}$ để đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Tuy nhiên, trong nhiều bài tập, ta chỉ cần biến đổi đơn giản như đưa biểu thức vào trong/ ra ngoài dâu căn, quy đồng mẫu thức …. Là đưa được về dạng quen thuộc.

**Ví dụ 1 :** Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}(\dfrac{1}{x+1}-1)$ bằng :

**A.** 0 **B.** -1 **C.** 1 **D.** $-\infty$

Đáp án B

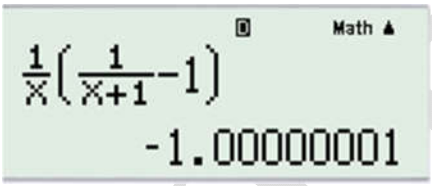
Phân tích : Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty;\lim\limits_{x\to 0^-}(\frac{1}{x+1}-1)=0$ nên chưa có thể áp dụng các định lí, qui tắc để tính giới hạn.

Lời giải :

Cách 1 : Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}(\frac{1}{x+1}-1)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-(x+1)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-1}{x+1}=-1$

Cách 2 : Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $-0,00000001$ ta được kết quả như hình bên. Do đó chọn đáp án B, tức $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}(\frac{1}{x+1}-1)=-1$

STUDY TIP




**Ví dụ 2 :** Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$ bằng :

**A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

**Đáp án C**

Phân tích : Vì $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0;\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}=+\infty$ nên chưa có thể áp dụng các định lý và qui tắc để tính giới hạn.

Lời giải :

Cách 1 : Với mọi $x>2$ ta có : $(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}=\sqrt{\frac{(x-2)^2x}{x^2-4}}=\sqrt{\frac{(x-2)x}{x+2}}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\frac{(x-2)x}{x+2}}=0$. Vậy chọn đáp án C

Cách 2: Sử dụng MTCT

**Ví dụ 3:** Giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+1)\sqrt{\frac{2x+1}{5x^3+x+2}}$ bằng:

**A.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ **C.** $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ **D.** $-\sqrt{2}$

**Đáp án B**

Phân tích: Ví dụ tương tự đã được nghiên cứu trong phần dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Tuy nhiên vì $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{2x+1}{5x^3+x+2}}=0$ nên giới hạn này cũng có thể coi như dạng $0.\infty$

Lời giải

Cách 1: Với $x<-1$ ta có $x+1<0$ nên $x+1=-\sqrt{(x+1)^2}$. Do đó

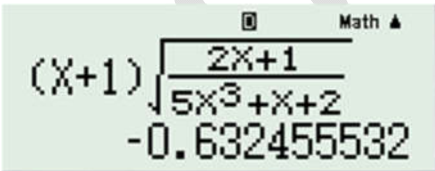
$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)\sqrt{\frac{2x+1}{5x^3+x+2}}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{(x+1)^2(2x+1)}{5x^3+x+2}}=-\frac{\sqrt{10}}{5}$$

Vậy chọn đáp án B

Cách 2: Sử dụng MTCT. Tính giá trị hàm số tại $x=10^{-10}$ ta được kết quả như hình bên. So sánh các đáp số A, B, C, D ta chọn đáp án đúng là **B.**

STUDY TIP

Ta chỉ quan tâm đến lũy thừa bậc cao nhất là $x^3$. Hệ số của $x^2$ trong $(x+1)^2$ là $1^2$ do $(x+1)^2=x^2+2x+1$. Hệ số của x trong 2x + 1 là 2 nên hệ số của $x^3$ trên tử là $1^2.2$. Ở đây không nhất thiết phải khai triển tích thành đa thức để tìm hệ số của $x^3$.




**Ví dụ 4:** Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sin\dfrac{1}{x})$ bằng

**A.** 0 **B.** 1 **C.** $+\infty$ **D.** Không tồn tại

**Đáp án B**

Phân tích: Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$. Ta có dạng $0.\infty$. Lời giải như sau :

Lời giải :

Cách 1 : Ta có : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sin\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}$

Đặt $t=\dfrac{1}{x}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}t=0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sin\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{sint}}{t}=1$

Cách 2: Sử dụng MTCT ( Lưu ý chuyển máy về chế độ Radian)

**STUDY TIP**

Ở ví dụ 4 ta đã chuyển dạng $0.\infty$ thành $\frac{0}{0}$ do ta liên tưởng đến giới hạn đặc biệt $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

**Ví dụ 5:** Giới hạn $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\frac{\pi}{2}-x)\tan x$ bằng

**A.** 1 **B.** 0 **C.** $-\infty$ **D.** Không tồn tại

**Đáp án A**

Phân tích: vì $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\frac{\pi}{2}-x)=0$; $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan x=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{\sin x}{\cos x}=+\infty$ nên ta có dạng $0.\infty$

Lời giải :

Cách 1 : Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x$ thì $x=\frac{\pi}{2}-t$, $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}t=0$ và

$(\frac{\pi}{2}-x)\tan x=t\tan(\frac{\pi}{2}-t)=t\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{\cos(\frac{\pi}{2}-t)}=\frac{t}{\sin t}\cos t$ . Do đó $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(\frac{\pi}{2}-x)\tan x=\lim_{t\to o^+}\frac{t}{\sin t}\cos t=1$

Cách 2 : Sử dụng MTCT

**STUDY TIP**

$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan x=+\infty$; $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\tan x=+\infty$ . Lưu ý để tránh nhầm lẫn giữa hai giới hạn này

**Dạng 5 : Dạng** $\infty-\infty$

Bài toán : Tính $\lim_{x\to x_0}[u(x)-v(x)]$ khi $\lim_{x\to x_0}u(x)=+\infty$ và $\lim_{x\to x_0}v(x)=+\infty$ Hoặc tính $\lim_{x\to x_0}[u(x)+v(x)]$ khi $\lim_{x\to x_0}u(x)=+\infty$ và $\lim_{x\to x_0}v(x)=-\infty$

Phương pháp : Nhân hoặc chia với biểu thức liên hợp (nếu có căn thức) hoặc qui đồng để đưa về cùng một phân thức ( nếu chứa nhiều phân thức).

**Ví dụ 1 :** Giới hạn $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)$ bằng

**A.** $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $+\infty$ **D.** $-\infty$

**Đáp án A**

Lời giải :

Cách 1:

Phân tích: Ta thấy $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ nên bài này thuộc dạng $\infty-\infty$. Tương tự như giới hạn dãy số, ta nhân chia với biểu thưc liên hợp. Lời giải cụ thể như sau:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{2}$

Cách 2: Sử dụng MTCT

**Ví dụ 2:** Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+1}+3x\right)$ bằng

**A.** $\dfrac{2}{3}$ **B.** $-\dfrac{2}{3}$ **C.** $\dfrac{1}{6}$ **D.** $-\dfrac{1}{6}$

**Đáp án D**

Lời giải:

Phân tích: Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2+x+1}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}(3x)=-\infty$ nên bài này thuộc dạng vô

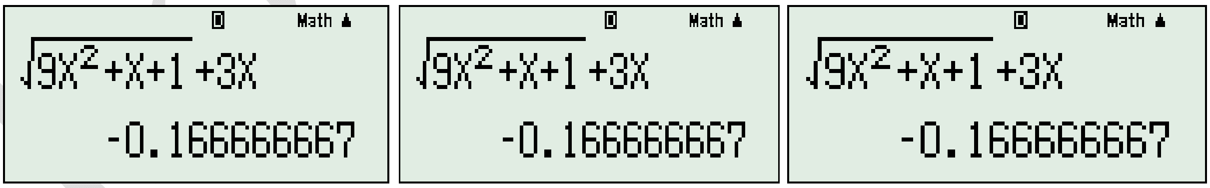
định $\infty-\infty$ (mặc dù biểu thức của hàm số lấy giới hạn có hạng tổng). Ta tiến hành nhân chia với biểu thức liên hợp. Lời giải cụ thể như sau:

Ta có: $\lim\left(\sqrt{9x^2+x+1}+3x\right)=\lim\dfrac{x+1}{\sqrt{9x^2+x+1}-3x}=\lim\dfrac{x+1}{-x\sqrt{9+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{9+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3}=\dfrac{1}{-3-3}=\dfrac{-1}{6}$. Vậy chọn đáp án **D.**

***Cách 2:*** Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả như hình bên. Sử dụng ki thuật tìm dạng phân số của một số thập phân vô hạn tuần hoàn ta được $-0,1(6)=\dfrac{-1}{6}$ (xem lại phần giới hạn dãy số). Vậy chọn đáp án **D.**

□ ***Studytip:***




**Ví dụ 3.** Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}\right)$ bằng:

**A.** $\dfrac{13}{24}$ **B.** $\dfrac{7}{12}$ **C.** $-\dfrac{13}{24}$ **D.** $-\dfrac{7}{12}$

***Lời giải***

***Cách 1: Phân tích:***

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+3x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}=+\infty$ nên đây cũng là dạng vô định $\infty-\infty$. Tuy nhiên vì là hiệu của hai căn thức không cùng bậc nên ta chưa thể nhâ chia với biểu thức liên hợp luôn được. Nhận thấy $x>0$ thì $\sqrt{4x^2}=\sqrt[3]{8x^3}=2x$ nên ta thêm bớt $2x$ rồi nhân chia liên hợp.

Với $x>0$: $\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}=\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)+\left(2x-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}\right)$

$$=\frac{3x}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}-\frac{2+\frac{1}{x^2}}{4+2\sqrt[3]{8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{\left(8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}}$$

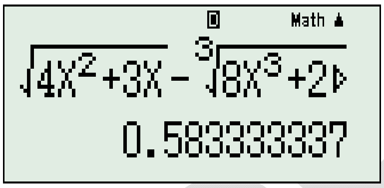
Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}\right)$

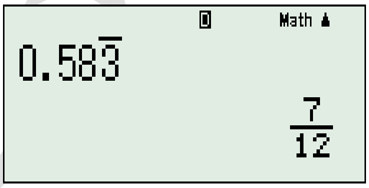
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{x}}+2}-\frac{2+\frac{1}{x^2}}{4+2\sqrt[3]{8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{\left(8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}}\right)=\frac{3}{2+2}-\frac{2}{4+4+4}=\frac{7}{12}.$$

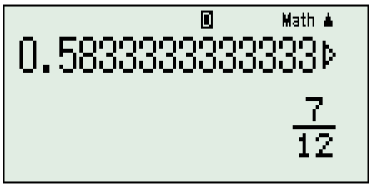
Do đó chọn **B.**

**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả như hình bên. Sử dụng ki thuật tìm dạng phân số của một số thập phân vô hạn tuần hoàn ta được $-0,58(3)=\frac{7}{12}$. (xem lại phần giới hạn dãy số). Vậy chọn đáp án **D.**

□ ***Studytip:***




***Lưu ý*:** Ta xem lại một Ví dụ đã trình bày ở dạng 1 như sau:

**Ví dụ 4.** Giới hạn của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}$ khi $x\to+\infty$ bằng:

**A.** $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** $-1$ **D.** $3$

***Phân tích***: Ví dụ này cũng thuộc dạng $\infty-\infty$ nhưng lại không phải là dạng vô định. Bằng các định lí và quy tắc, ta tính được giới hạn hàm số mà không cần phải nhân chia với biểu thức liên hợp. Ta xem cách giải cho tiết dưới đây.

**Lời giải**

$$\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}-|x|\sqrt{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=|x|\left(\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}\right).$$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}|x|=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}=1-2=-1<0.$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[|x|\left(\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}\right)\right]=-\infty.$

□ ***Studytip:***

Cũng là $\infty-\infty$ nhưng khi nào là xác định, khi nào là vô định? Khi nào phải nhân chia liên hợp, khi nào thì đưa $x^n$ ra ngoài căn rồi đặt nhân tử chung như Ví dụ 4? Để có câu trả lời mời quý độc giả hãy đọc lại phần giới hạn dãy số có chứa căn.

**Ví dụ 5.** Trong các giới hạn sau giới hạn nào là hữu hạn:

**A.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right).$

**B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-3x\right).$

**C.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{1+x+2x^2}\right).$

**D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3x+2}\right).$

**Lời giải**

***Cách 1:*** Với các kết quả đã biết phần giới hạn dãy số có chứa căn, ta thấy ngay đáp án là **D.** Thật vậy:

□ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+4x+3}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)=+\infty.$

□ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2+x+1}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-3x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-3x\right)=+\infty.$

□ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{1+x+2x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+2}\right)=-\infty$

do $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+2}\right)=1-\sqrt{2}<0.$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3x+2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+2}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-1}=\frac{-3}{2}.$$

***Cách 2:*** Sử dụng MTCT để tìm lần lượt các giới hạn.

**Ví dụ 6.** Giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$ bằng:

**A.** $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-3$ **D.** $-2$

**Lời giải**

***Cách 1:*** Vì $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{x^2-4}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$ nên ta có dạng $\infty-\infty.$

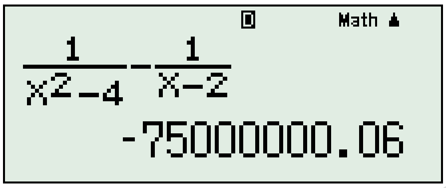
Theo phương pháp đã nêu từ đầu, ta đi quy đồng mẫu số các phân thức.

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to2^+}\left[\frac{1}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{(x-2)}\right]=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{-x-1}{(x-2)(x+2)}.$

Vì $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x-1}{(x+2)}=\dfrac{-3}{4}<0, \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0$ và $x-2>0$ với mọi $x>2$ nên theo quy tắc 2,

$\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x-1}{(x-2)(x+2)}=-\infty.$ Do đó chọn B

***Cách 2***: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=2,00000001$ ta được kết quả như hình bên. Do đó chọn đáp án B, tức là $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)=-\infty.$




**Ví dụ 7.** Cho $a$ và $b$ là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa $a$ và $b$ để giới hạn: $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{a}{x^2-6x+8}-\dfrac{b}{x^2-5x+6}\right)$ là hữu hạn:

**A.** $a-4b=0.$ **B.** $a-3b=0.$ **C.** $a-2b=0.$ **D.** $a-b=0.$

**Lời giải**

***Cách 1:*** Ta có $\dfrac{a}{x^2-6x+8}-\dfrac{b}{x^2-5x+6}=\dfrac{a}{(x-2)(x-4)}-\dfrac{b}{(x-2)(x-3)}$

$=\dfrac{a(x-3)-b(x-4)}{(x-2)(x-3)(x-4)}=\dfrac{g(x)}{(x-2)(x-3)(x-4)}.$

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0; \lim\limits_{x\to 2^-}(x-3)=-1; \lim\limits_{x\to 2^-}(x-4)=-2; \lim\limits_{x\to 2^-}g(x)=2b-a.$

Do đó nếu $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)\neq 0 \Leftrightarrow 2b-a\neq 0$ thì giới hạn cần tìm là vô cực theo quy tắc 2.

Từ đó chọn được đáp án đúng là C.

(Thật vậy, nếu $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)=2b-a=0$ thì

$$\frac{a}{x^2-6x+8}-\frac{b}{x^2-5x+6}=\frac{bx-2b}{(x-2)(x-3)(x-4)}=\frac{b}{(x-3)(x-4)}$$

Và do đó $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{a}{x^2-6x+8}-\dfrac{b}{x^2-5x+6}\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{b}{(x-3)(x-4)}=\dfrac{b}{2}.$

***Cách 2***: Sử dụng MTCT. Với mỗi đáp án, lấy các giá trị cụ thể của $a$ và $b$, thay vào hàm số rồi tính giới hạn.

Từ đó chọn được đáp án là **C.**

## C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

***DẠNG 1. BÀI TẬP TÍNH GIỚI HẠN BẰNG CÁCH SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA, ĐỊNH LÍ, QUY TẮC.***

**Câu 1:** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực $m$ để $B>7$ với $B=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3+3x+m^2-2m\right).$

**A.** $m<1$ hoặc $m>3$ **B.** $m<-1$ hoặc $m>3$ **C.** $-1<m<3$ **D.** $1<m<3$.

**Câu 2:** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & khi\ x<1\\ \sqrt{2x-2} & khi\ x\ge 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ bằng:

**A.** $0$ **B.** $2$ **C.** $-\infty$ **D.** $+\infty$

**Câu 3:** Trong các hàm số sau, hàm số nào có giới hạn tại điểm $x=1$?

**A.** $f(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$ **B.** $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ **C.** $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ **D.** $t(x)=\dfrac{1}{x-1}$

**Câu 4:** Chọn khẳng định đúng.

**A.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=0$ **B.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=-1$ **C.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=1$ **D.** $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ không tồn tại.

**Câu 5:** Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

**A.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x^3-x^2+x+1\right)$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^4+3x+1\right)$.

**C.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^2-7x^3+2\right)$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-x^5+2\right)$.

**Câu 6:** Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

**A.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-2x\right)$.

**C.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-x\right)$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+4x+3}\right)$.

**Câu 7:** Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $+\infty$?

**A.** $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{6-x^2}{9+3x}$. **B.** $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{1-2x}}{5+5x}$. **C.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5-3x^3}{(x-2)^4}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3-4}{(x+1)^2}$

**Câu 8:** Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là vô cực?

**A.** $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2x}}$. **B.** $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x^3+2x^2}{\left(x^2-x+6\right)^2}$.

**C.** $\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{\dfrac{9x^2-x}{(2x-1)\left(x^4-3\right)}}$. **D.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2(2x-1)}{x^4+x+1}$.

**Câu 9:** Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là vô cực?

**A.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{\sqrt{5x^2+x+2}+4x}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)^3+8}{x}$.

**C.** $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{3-x}}{x^4+x}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{4x^3-x^3+2}$.

**Câu 10:** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực $m$ sao cho hàm số $f(x)=mx+\sqrt{9x^2-3x+1}$ có giới hạn hữu hạn khi $x\to+\infty$.

**A.** $m=-3$ **B.** $m\neq-3$ **C.** $m\geq 0$ **D.** $m<0$

***DẠNG 2. GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG*** $\dfrac{0}{0}$.

**Câu 11:** Giới hạn $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{|3x+6|}{x+2}$

**A.** Bằng $3$ **B.** Bằng $-3$ **C.** Bằng $0$ **D.** không tồn tại

**Câu 12:** Cho $a$ là một số thực khác 0. Kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x-a}$ bằng:

**A.** $3a^3$ **B.** $2a^3$ **C.** $a^3$ **D.** $4a^3$

**Câu 13:** Cho $C=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-mx+m-1}{x^2-1}, m$ là tham số thực. Tìm $m$ để $C=2$.

**A.** $m=2$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=1$ **D.** $m=-1$

**Câu 14:** Cho $a$ và $b$ là các số thực khác $0$. Nếu $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=6$ thì $a+b$ bằng:

**A.** $2$ **B.** $-4$ **C.** $-6$ **D.** $8$

**Câu 15:** Cho $a$ và $b$ là các số thực khác $0$. Giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{ax+1}}{\sin bx}$ bằng:

**A.** $\dfrac{a}{2b}$ **B.** $-\dfrac{a}{2b}$ **C.** $\dfrac{2a}{b}$ **D.** $-\dfrac{2a}{b}$

**Câu 16:** Cho $a,b,c$ là các số thực khác $0, 3b-2c\neq0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa $a,b,c$ để:

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}=\frac{1}{2}.$$

**A.** $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{10}$ **B.** $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{6}$ **C.** $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{12}$

**Câu 17:** Cho $m$ và $n$ là các số nguyên dương phân biệt. Giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^m-x^n}$ bằng:

**A.** $m-n$ **B.** $n-m$ **C.** $\dfrac{1}{m-n}$ **D.** $\dfrac{1}{n-m}$

**Câu 18:** Để tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}$, bạn Bính đã trình bày bài giải như sau:

Bước 1: Ta có:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}$.

Bước 2: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{5x-4}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5}{\sqrt{5x-4}+1}=\dfrac{5}{2}$.

Bước 3: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}=1$.

Bước 4: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\dfrac{5}{2}-1=\dfrac{3}{2}$.

Hỏi lời giải của bạn Bính đã mắc lỗi sai ở bước nào?

**A.** Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

**Câu 19:** Biết $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}=\dfrac{m}{n}$ trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản, $m$ và $n$ là các số nguyên dương. Tổng $2m+n$ bằng:

**A.** 68 **B.** 69 **C.** 70 **D.** 71

**Câu 20:** Biết $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)\left(x^2+3x-18\right)}=\dfrac{m}{n}$, trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản, $m$ và $n$ là các số nguyên dương. Khi đó $3m+n$ bằng:

**A.** 55 **B.** 56 **C.** 57 **D.** 58

**Câu 21:** Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{5x-4}}{(x-1)^2}$ bằng:

**A.** $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** 0 **D.** 1

**Câu 22:** Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng $0$?

**A.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^3-1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$. **C.** $\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|$. **D.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\left(x^2-x-6\right)^2}{x^3+2x^2}$.

**Câu 23:** Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào khác $0$?

**A.** $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{\left(x^2+1\right)(3-x)}}$.

**C.** $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x^2+2x+1}}$. **D.** $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

**Câu 24:** Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào không tồn tại?

**A.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2+11x+18}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)^3-27}{x}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$. **D.** $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x|x+2|}{x^2+3x+2}$.

**Câu 25:** Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào không hữu hạn?

**A.** $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x^2+x-10}{x^3-8}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$. **D.** $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}$.

***DẠNG 3: GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG $\dfrac{\infty}{\infty}$.***

**Câu 26:** Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng $-1$?

**A.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-1}{x+1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3-x^2+3}{5x^2-x^3}$. **C.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x+3}{x^2-5x}$. **D.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{3x+x^2}$.

**Câu 27:** Trong các giới hạn hữu hạn sau đây, giới hạn nào là lớn nhất?

**A.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x+1)(3-2x-5x^3)}{x(x^3-1)}$. **B.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(2x^2+1)(2x^2+x)}{(2x^4+x)(x+1)}$.

**C.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(x^2+1)(2x^2-x+4)}{x^3(3x+1)}$. **D.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(3x^2+1)(2-x^3)}{(2x^4+x)(x+1)}$.

**Câu 28:** Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào là $-\infty$ ?

**A.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-2x^2+x-1}{3+x}$. **B.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2+x+5}{1+2x}$. **C.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1-3x^3+x^2}{5+x-2x^2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-x^4+1}{2-x-x^2}$.

**Câu 20.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$.

**A.** $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

**Câu 21.** Cho $a,b,c$ là các số thực khác $0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa $a,b,c$ để $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{ax-b\sqrt{9x^2+2}}{cx+1}=5$.

**A.** $\dfrac{a-3b}{c}=5$. **B.** $\dfrac{a-3b}{c}=-5$. **C.** $\dfrac{a+3b}{c}=5$. **D.** $\dfrac{a+3b}{c}=-5$.

**Câu 22.** Cho $a$ và $b$ là các tham số thực . Biết rằng $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{4x^2+3x+1}{cx+1}-(ax+b)\right]=0$, $a$ và $b$ thỏa mãn hệ thức nào trong các hệ thức dưới đây ?

**A.** $a+b=9$. **B.** $a+b=-9$. **C.** $a-b=9$. **D.** $a-b=-9$.

**Câu 23.** Trong các giới hạn sau , giới hạn nào là $-\infty$?

**A.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^4-x-1}{x^2+x+2}$. **B.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-5x+2}{1+2|x|}$.

**C.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^5+x-11}}{2x^2+x+1}$. **D.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{1-2x}}$.

**Câu 24.** Tìm giới hạn nhỏ nhất trong các giới hạn hữu hạn sau.

**A.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{2x-x^2}{8x^2-x+3}}$.

**C.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2-x+2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}}$.

**Câu 25.** Trong các giới hạn hữu hạn sau , giới hạn nào là lớn nhất?

**A.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{(2x-5)(1-x)^2}{3x^3-x+1}}$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}$.

**C.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^4+x^2+2}{(x^3+1)(3x-1)}}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-2|x|}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

**Câu 26.** Trong các giới hạn hữu hạn sau , giới hạn nào là nhỏ nhất?

**A.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}+2x}{3-4|x|}$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{x}{x^3-1}}$.

**C.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{3x^4+4x^5+2}{9x^5+5x^4+4}}$.

**DẠNG 4: Giới hạn vô định dạng** $0.\infty$

**Câu 27.** Cho $a$ là một số thực dương. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}$.

**A.** bằng $-\dfrac{1}{a^2}$. **B.** là $+\infty$. **C.** là $-\infty$. **D.** không tồn tại.

**Câu 28.** Trong các giới hạn sau , giới hạn nào là hữu hạn ?

**A.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{x^3}{2x^4+x^2+1}}$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{3x}{x^2-1}}$.

**C.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3+x}}$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)\sqrt{\dfrac{x}{2x^4+x+1}}$.

**Câu 29.** Trong các giới hạn hữu hạn sau , giới hạn nào là nhỏ nhất?

**A.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{2x+1}{x^3+x+2}}$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{3x-11}{x^3+1}}$.

**C.** $\lim\limits_{x\to1^+}(x^3-1)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-3x)\sqrt{\dfrac{x+1}{5x^3+2x+1}}$.

**Câu 30.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x}}\right)$.

**A.** $\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$

**Câu 31.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

**A.** $2$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$

**DẠNG 5: Dạng vô định $\infty-\infty$**

**Câu 32.** Cho $n$ là một số nguyên dương. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right)$.

**A.** $\frac{n}{2}$. **B.** $\frac{n-1}{2}$. **C.** $\frac{n+1}{2}$. **D.** $\frac{n+2}{2}$

**Câu 33.** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1} & khi\, x>1\\ mx+2 & khi\, x\le 1\end{cases}$. Với giá trị nào của $m$ thì hàm số $f(x)$ có giới hạn tại điểm $x=1$

**A.** 2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3

**Câu 34.** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực $k$ sao cho giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{k}{x^2-1}\right)$ là hữu hạn.

**A.** $k=2$. **B.** $k\ne 2$. **C.** $k<2$. **D.** $k>2$.

**Câu 35.** Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào là $-1$?

**A.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)$.

**C.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$.

**Câu 36.** Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+5}+\text{ax})=+\infty$ nếu.

**A.** $a\ge 1$. **B.** $a\le 1$. **C.** $a>1$. **D.** $a<1$.

**Câu 37.** Cho $a$ và $b$ là các số thực khác $0$. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax-\sqrt{x^2+bx+2})=3$, thì tổng $a+b$ bằng

**A.** $2$. **B.** $-6$. **C.** $7$. **D.** $-5$.

**Câu 38.** Cho $a$ và $b$ là các số thực khác $0$. Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}(\text{ax+b-}\sqrt{x^2-6x+2})=5$ số lớn hơn trong hai số $a$ và $b$ là số nào trong các số dưới đây?

**A.** $4$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Câu 39.** Trong các giới hạn dưới đây, giới hạn nào là vô cực?

**A.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+3})$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}+2x)$.

**C.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+3x+1}+5x)$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+5x})$.

**Câu 40.** Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+2x}+\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5})=-\frac{m}{n}$ trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, $m$ và $n$ là các số nguyên dương. Tìm bội số chung nhỏ nhất của $m$ và $n$.

**A.** $135$. **B.** $136$. **C.** $138$. **D.** $140$.

**Câu 41.** Cho $a$ và $b$ là các số nguyên dương. Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+\text{ax}}+\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5})=\dfrac{7}{27}$, hỏi $a$ và $b$ thỏa mãn hệ thức nào dưới đây?

**A.** $a+2b=33$. **B.** $a+2b=34$. **C.** $a+2b=35$. **D.** $a+2b=36$.

## HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

### DẠNG 1: Bài tập tính giới hạn bằng cách sử dụng định nghĩa, định lý, qui tắc.

**Câu 1. Đáp án B.**

**Cách 1:** Ta có $B=\lim\limits_{x\to-1}\left(x^2+3x+m^2-2m\right)=m^2-2m+4$.

Do đó $B>7\Leftrightarrow m^2-2m+4>7\Leftrightarrow m<-1$ hay $m>3$.

**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính B khi $m=4$ và $m=0$.

Khi $m=4$ thì $B=12>7$, do đó chỉ xét A và B.

Khi $m=0$ thì $B=4<7$, do đó A sai vậy B đúng.

**Câu 2. Đáp án D.**

**Cách 1:** Ta có $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2+1}{1-x}$.

Vì $\lim\limits_{x\to-1^-}\left(x^2+1\right)=2;\ \lim\limits_{x\to-1^-}\left(1-x\right)=0$ và $1-x>0;\forall x<1$

nên theo quy tắc 2: $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2+1}{1-x}=+\infty$.

**Cách 2:** Ta có $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2+1}{1-x}$.

Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=0{,}99999999$ ta được kết quả $199999998$.


Vậy chọn D.

**Câu 3. Đáp án A.**

Vì $\lim\limits_{x\to1}|x-1|=0$, $|x-1|>0,\forall x\neq1$ nên $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{|x-1|}=+\infty$.

Giải thích thêm:

+ Hàm số $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ xác định trên khoảng $(1;+\infty)$ nên không tồn tại giới hạn bên trái tại $x=1$, do đó không tồn tại giới hạn tại $x=1$.

+ Hàm số $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ xác định trên khoảng $(-\infty;1)$ nên không tồn tại giới hạn bên phải tại $x=1$, do đó không tồn tại giới hạn tại $x=1$.

+ Vì $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$, $x-1>0,\forall x>1$, $x-1<0,\forall x<1$

nên $\lim\limits_{x\to 1^-} t(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$ , $\lim\limits_{x\to 1^+} t(x)=\lim\limits_{x\to 1^{+-}}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^-} t(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} t(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} t(x)$.

**Câu 4. Đáp án D.**

Xét dãy số $(x_n)$ với $x_n=\dfrac{1}{(2n+1)\pi}$. Ta có $x_n\to 0$ và $\lim\cos\dfrac{1}{x_n}=\lim\cos[(2n+1)\pi]=-1$ (1).

Lại xét dãy số $(y_n)$ với $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$ . Ta có $y_n\to 0$ và $\lim\cos\dfrac{1}{y_n}=\lim\cos(2n\pi)=1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ không tồn tại.

**Câu 5. Đáp án C.**

**Cách 1:** Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x^3-x^2+x+1)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^4+3x+1)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}(4x^2-7x^3+2)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-x^5+2)=+\infty$.

**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn bằng $-\infty$.

**Câu 6. Đáp án D.**

**Cách 1:** Ta có

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-2x\right)=+\infty$

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-1\right)=+\infty$

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+4x+3}\right)=-\infty$.

**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn bằng $-\infty$.

**Câu 7. Đáp án C.**

**Cách 1:** Ta có $\lim\limits_{x\to-3^+}(6-x^2)=-3<0$; $\lim\limits_{x\to-3^+}(9+3x)=0$ và $9+3x>0,\forall x>-3$.

Vậy theo quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{6-x^2}{9+3x}=-\infty$.

Tương tự: $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{\sqrt{1-2x}}{5+5x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5-3x^3}{(x+2)^2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3-4}{(x+1)^2}=-\infty$.

Do đó đáp án đúng là C ( Thật ra ta chỉ cần tính đến C là chọn được đáp án đúng).

**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn bằng $+\infty$.

**Câu 8. Đáp án B.**

**Cách 1:** Các hàm số trong A, C, D đều xác định tại các điểm điểm tính giới hạn. Do đó đáp án là B.

Thật vậy, ta tính được bằng MTCT: $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x^2-x-6)^2}=+\infty$.

**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn vô cực.

**Câu 9.** **Đáp án C**

**Cách 1:** Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^-}(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{3-x})=\sqrt{2}-2<0$;

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x^4+x)=0$; $(x^4+x)=x(x^3+1)>0,\forall x<-1$.

Vậy $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{3-x}}{x^4+x}=-\infty$

Bổ sung:

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{5x^2+x+2}+4x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x(-\sqrt{5+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+4)=-\infty$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{\sqrt{5x^2+x+2}+4x}=0$.

+ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-2)^3+8}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8+8}{x}=\lim\limits_{x\to0}(x^2-6x+12)=12$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^3-x^2+2)=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{4x^3-x^2+2}=0$.

**Cách 2:** Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn vô cực.

**Câu 10.** **Đáp án A**

**Cách 1:** Sử dụng MTCT tính toán khi $m=-3$ ta được kết quả

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x+\sqrt{9x^2-3x+1})=-\dfrac{1}{2}$. Vậy ta chỉ xét các đáp án **A** và **D**.

Lại sử dụng MTCT tính toán khi $m=-1$ ta được kết quả $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+\sqrt{9x^2-3x+1})=+\infty$.

Vậy loại đáp án **D**. Do đó đáp án đúng là **A**.

**Cách 2:** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+\sqrt{9x^2-3x+1})$.

+ Nếu $m\ge0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+\sqrt{9x^2-3x+1})=+\infty$.

+ Nếu $m<0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx+\sqrt{9x^2-3x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(m+\sqrt{9-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)$.

Ta thấy nếu $m\ne-3$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(m+\sqrt{9-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)\ne0$ và do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+\sqrt{9x^2-3x+1})=\infty$.

Ngược lại nếu $m=-3$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x+\sqrt{9x^2-3x+1})=-\dfrac{1}{2}$. Vậy đáp án đúng là **A**.

## DẠNG 2: Giới hạn vô định dạng $\dfrac{0}{0}$.

**Câu 11.** **Đáp án D.**

Ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{|3x+6|}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{3(x+2)}{x+2}=3$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{|3x+6|}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{-3(x+2)}{x+2}=-3$.

Vậy $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{|3x+6|}{x+2}\neq\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{|3x+6|}{x+2}$ nên $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{|3x+6|}{x+2}$ không tồn tại.

**Câu 12. Đáp án D.**

**Cách 1:** Ta có $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x^3+x^2a+xa^2+a^3)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(x^3+xa^2+x^2a+a^3)=4a^3$.

**Cách 2:** Cho $a$ một giá trị cụ thể rồi tính giới hạn bằng máy tính cầm tay. Chẳng han với $a=2$ ta có $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-2^4}{x-2}=32=4.2^3$. Do đó chọn đáp án **D.**


**Câu 13. Đáp án B.**

**Cách 1:** $C=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-mx+m-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-m+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-m+1}{x+1}=\dfrac{2-m}{2}$

Vậy $C=2\Leftrightarrow m=-2$.

**Cách 2:** Thay lần lượt các giá trị của $m$ vào, rồi tìm $C$ cho đến khi gặp kết quả $C=2$ thì dừng lại.

**Câu 14. Đáp án C**

Đặt $g(x)=x^2+ax+b$. Rõ ràng là nếu $g(2)\neq0$ thì $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)}{x-2}$ không thể hữu hạn. Do đó điều kiện đầu tiên là $g(2)=0\Leftrightarrow 2a+b=-4$.

Khi đó $g(x)=(x-2)(x-\frac{b}{2})$ và $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x-\frac{b}{2})=2-\dfrac{b}{2}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)}{x-2}=6\Rightarrow 2-\dfrac{b}{2}=6\Rightarrow b=-8\Rightarrow a=2\Rightarrow a+b=-6.$

**Câu 15. Đáp án B.**

**Cách 1:** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{ax+1}}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1-\sqrt{ax+1}}{x}.\dfrac{bx}{\sin bx}.\dfrac{1}{b})$.

**Mà** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{ax+1}}{\sin bx}=\dfrac{-a}{2}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{bx}{\sin bx}=1$ **nên** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{ax+b}}{\sin bx}=\dfrac{-a}{2b}$;

**Cách 2**: Cho $a$ và $b$ các giá trị cụ thể, thay vào rồi tính giới han. Chẳng hạn với $a=b=1$, sử dụng MTCT ta tính được $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{\sin x}=\dfrac{1}{2}$. Từ đó chọn đáp án đúng là B.

**Câu 16. Đáp án D.**

**Cách 1:** $\dfrac{\tan ax}{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}=a.\dfrac{\tan ax}{ax}.\dfrac{x}{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}$

**Lại có** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{ax}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin ax}{ax}.\dfrac{1}{\cos ax})=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sqrt{1+bx}-1}{x}-\dfrac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x})=\dfrac{b}{2}-\dfrac{c}{3}=\dfrac{3b-2c}{6}$

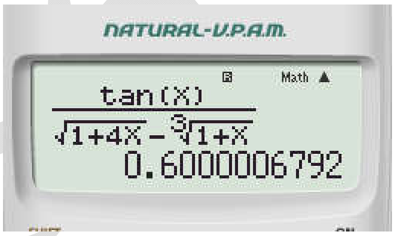
Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}=\dfrac{6a}{3b-2c}$.

Do đó hệ thức liên hệ giữa $a,b,c$ là $\dfrac{6a}{3b-2c}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{a}{3b-2c}=\dfrac{1}{12}$

Cách 2: Sử dụng MTCT. Với mỗi đáp án, chọn các giá trị cụ thể của $a,b,c$ thỏa mãn hệ thức rồi thay vào để tính giới hạn. Nếu giới hạn tìm được bằng $\dfrac{1}{2}$ thì đó là đáp án đúng.

Chẳng hạn, với đáp án A, chọn $a=1;b=4;c=1$, sử dụng MTCT tính được

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+x}}=\dfrac{3}{5}$.




Vậy A không phải là đáp án đúng.

Tương tự vậy B và C cũng không phải là đáp án đúng. Vậy đáp án đúng là D.

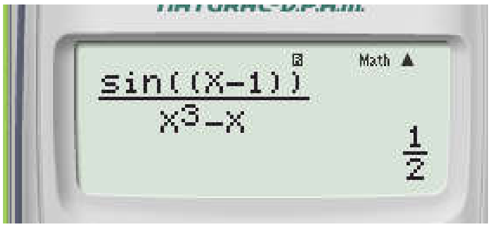
**Câu 17. Đáp án C.**

Cách 1: Ta có $\dfrac{\sin(x-1)}{x^m-x^n}=\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=\dfrac{x-1}{x^m-x^n}$

Mà $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-x^n}{x-1}=m-n$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=1$ nên $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^m-x^n}=\dfrac{1}{m-n}$

Cách 2: Cho m và n các giá trị cụ thể, thay vào rồi sử dụng MTCT tính giới hạn.

Chẳng hạn với $m=3;n=1$ ta tính được $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^3-x}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{m-n}$.




Vậy đáp án đúng là C

**Câu 18. Đáp án A.**

Vì ta chưa thể biết được các giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}$ ; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-4}-1}{x-1}$ có hữu hạn hay không nên chưa thể viết được: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-4}-1}{x-1}$

Do đó lời giải đã mắc lỗi sai ngay ở bước đầu tiên.

Ta sửa lại như sau:

Bước 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}-\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}\right)$

**Câu 19. Đáp án A.**

Ta có $\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}=\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-3}{x^2-3x+2}-\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-3x+2}$

$$=\frac{x-2}{(x-2)(x-1)(\sqrt[3]{(8x+11)^2}+3\sqrt[3]{8+11}+9)}-\frac{x-2}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+7}+3)}$$

$$=\frac{8}{(x-1)(\sqrt[3]{(8x+11)^2}+3\sqrt[3]{8+11}+9)}-\frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+7}+3)}$$

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8}{(x-1)(\sqrt[3]{(8x+11)^2}+3\sqrt[3]{8+11}+9)}=\dfrac{8}{27}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-1)(\sqrt{x+7}+3)}=\dfrac{1}{6}$

Do đó $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}=\dfrac{8}{27}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{54}$

Vậy $m=7;n=54$ và $2m+n=68$.

**Câu 20. Đáp án C.**

Ta có $\dfrac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x\text{-}54}}{(x-3)(x^2+3x\text{-}18)}=\dfrac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x\text{-}54}}{(x-3)^2(x+6)}$

Sử dụng MTCT ta tính được:

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x\text{-}54}}{(x-3)^2}=\dfrac{1}{6}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+6}=\dfrac{1}{9}$

nên $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x\text{-}54}}{(x-3)(x^2+3x\text{-}18)}=\dfrac{1}{54}$. Vậy $3m+n=57$.

Giải tự luận: Đặt $t=x-3$ thì $\lim\limits_{x\to 3}t=0$ và

$$\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x\text{-}54}}{(x-3)^2}=\frac{\sqrt{6t+9}-\sqrt[3]{27t\text{+}27}}{t^2}=\frac{\sqrt{6t+9}-(t+3)}{t^2}+\frac{(t+3)-\sqrt[3]{27t+27}}{t^2}$$

$$=\frac{-t^2}{t^2\left(\sqrt{6t+9}+t+3\right)}+\frac{t^3+9t^2}{t^2\left[\left(t+3\right)^2+\left(t+3\right)\sqrt[3]{27t+27}+\sqrt[3]{(27t+27)^2}\right]}$$

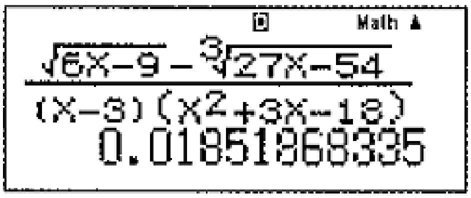
$$=\frac{-1}{\left(\sqrt{6t+9}+t+3\right)}+\frac{t+9}{\left(t+3\right)^2+\left(t+3\right)\sqrt[3]{27t+27}+\sqrt[3]{(27t+27)^2}}$$

Ta có $\lim\limits_{t\to 0}\frac{-1}{\left(\sqrt{6t+9}+t+3\right)}=-\frac{1}{6};\lim\limits_{t\to 0}\frac{t+9}{\left(t+3\right)^2+\left(t+3\right)\sqrt[3]{27t+27}+\sqrt[3]{(27t+27)^2}}=\frac{1}{3}$

Vậy $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{\left(x-3\right)^2}=\frac{-1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x+6}=\frac{1}{9}$ nên $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{\left(x-3\right)^2\left(x^2+3x-18\right)}=\frac{1}{54}$.

Lưu ý: Nếu sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=3,00000001$ và tại $x=2,99999999$ ta đều thu được kết quả bằng 0 hoặc máy báo lỗi ( tùy theo loại máy). Điều này là do vượt quá khả năng tính toán của máy. Ta thay đổi tính giá trị của hàm số tại $x=2,99999$ thì ta được kết quả như sau




Kết quả hiển thị trên máy như vậy rất khó để ta tìm ra giới hạn chính xác của hàm số. Tuy nhiên nếu phân tích kĩ một chút rồi biến đổi như trong lời giải trên thì ta vẫn có thể tìm ra đáp án đúng chỉ bằng MTCT.

**Câu 1: Đáp án A**

Bài tập này có dạng tương tự như bài tập trên. Bằng MTCT, không khó để tìm ra đáp án đúng là **A.** Tuy nhiên nếu giải tự luận thì có một số vấn đề cần bàn. Đặt $t=x-1$ thì $x=t+1$, $\lim\limits_{x\to 1^+}=0$ và

$$\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{5x-4}}{(x-1)^2}=\frac{\sqrt{3t+1}-\sqrt[3]{5t+1}}{t^2}=\frac{\sqrt{3t+1}-1}{t^2}+\frac{1-\sqrt[3]{5t+1}}{t^2}$$

$$=\frac{3t}{t^2\left(\sqrt{3t+1}+1\right)}+\frac{5t}{t^2\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{(5t+1)^2}\right)}$$

$$=\frac{3\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{(5t+1)^2}\right)-5\left(\sqrt{3t+1}+1\right)}{t\left(\sqrt{3t+1}+1\right)\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{(5t+1)^2}\right)}$$

Ta có $\lim\limits_{t\to0^+}=\dfrac{3\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{(5t+1)^2}\right)-5\left(\sqrt{3t+1}+1\right)}{t\left(\sqrt{3t+1}+1\right)\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{(5t+1)^2}\right)}=-\infty$

Vậy $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt[2]{5x-4}}{(x-1)^2}=-\infty.$

Ta thấy sau khi đổi biến cho gọn, ta thêm bớt tử với hàng số 1 rồi tách ra thành hai phân thức và nhân chia liên hợp mà không thêm bớt đa thức. Vậy khi nào thì thêm bớt hằng số, khi nào thì thêm bớt với đa thức? Quý độc giả hãy nghiên cứu kĩ hai bài tập trên và tự rút ra nhận xét.

**Câu 2: Đáp án D**

**Ta có** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x^2-x-6)^2}{x^3+2x^2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x-3)^2(x+2)^2}{x^2(x+2)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x-3)^2(x+2)}{x^2}=0.$

**Câu 3: Đáp án C**

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+1}}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+3x+2}{\sqrt{(x+1)^2}}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+3x+2}{|x+1|}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to(-1)^-}(x+2)=-1\neq0.$$

**Câu 4: Đáp án C**

Ta có $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x\sqrt{3+x^2}}{2x}=-\dfrac{\sqrt3}{2}$ và $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x\sqrt{3+x^2}}{2x}=\dfrac{\sqrt3}{2}$

Vậy $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}\neq\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$ nên $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$ không tồn tại.

**Câu 5: Đáp án B**