Câu 22. Biết rằng tồn tại đúng ba giá trị m_1,m_2,m_3 của tham số m để phương trình $x^3-9x^2+23x+m^3-4m^2+m-9=0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng, tính giá trị của biểu thức $P=m_1^3+m_2^3+m_3^3$.

A. $P=34$. **B.** $P=36$. **C.** $P=64$. **D.** $P=-34$.

Câu 23. Mặt sàn tầng của một ngôi nhà cao hơn mặt sân $0,5m$. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 21 bậc, một bậc cao $18cm$. Kí hiệu h_n là độ cao của bậc thứ n so với mặt sân. Viết công thức để tìm độ cao h_n.

A. $h_n=0,18n+0,32(m)$. **B.** $h_n=0,18n+0,5(m)$. **C.** $h_n=0,5n+0,18(m)$. **D.** $h_n=0,5n-0,32(m)$.

Câu 24. Người ta trồng 3003 cây theo hình một tam giác như sau: hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây,… Hỏi trồng được bao nhiêu hàng cây theo cách này?

A. 77 hàng. **B.** 76 hàng. **C.** 78 hàng. **D.** 79 hàng.

Câu 25. Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông. Người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô vuông đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt dẻ nhiều hơn ô đầu tiên là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt dẻ nhiều hơn ô thứ hai là 5, … và cứ thế tiếp tục đến ô cuối cùng. Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta đã phải sử dụng hết 25450 hạt dẻ. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô?

A. 98 ô. **B.** 100 ô. **C.** 102 ô. **D.** 104 ô.

Câu 26. Một công ty trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho các kỹ sư theo phương thức sau: Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ty là $13,5$ triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, múc lương sẽ được tăng thêm 500.000 đồng mỗi quý. Tính tổng số tiền lương một kỹ sư nhận được sau ba năm làm việc cho công ty.

A. 198 triệu đồng. **B.** 195 triệu đồng. **C.** 228 triệu đồng. **D.** 114 triệu đồng.

Câu 27. Trên tia Ox lấy các điểm $A_1,A_2,...,A_n,...$ sao cho với mỗi số nguyên dương n, $OA_n=n$. Trong cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa tia Ox, vẽ các nửa đường tròn đường kính OA_n, $n=1,2,...$ Kí hiệu u_1 là diện tích nửa đường tròn đường kính OA_1 và với mỗi $n\geq 2$, kí hiệu u_n là diện tích của hình giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính OA_{n-1}, nửa đường tròn đường kính OA_n và tia Ox. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Dãy số (u_n) không phải là một cấp số cộng.

B. Dãy số (u_n) là một cấp số cộng có công sai $d=\frac{\pi}{4}$.

C. Dãy số (u_n) là một cấp số cộng có công sai $d=\frac{\pi}{8}$.

D. Dãy số (u_n) không phải là một cấp số cộng có công sai $d=\frac{\pi}{2}$.

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đồ thị (C) của hàm số $y=3x-2$. Với mỗi số nguyên dương n, gọi A_n là giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $d: x-n=0$. Xét dãy số (u_n) với u_n là tung độ của điểm A_n. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. Dãy số (u_n) là một cấp số cộng có công sai $d=-2$.

B. Dãy số (u_n) là một cấp số cộng có công sai $d=3$.

C. Dãy số (u_n) là một cấp số cộng có công sai $d=1$.

D. Dãy số (u_n) không phải là một cấp số cộng.

Câu 29. Cho cấp số cộng $(u\ )$ có số hạng đầu $u_1=2$ và công sai $d=-3$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, lấy các điểm $A_1, A_2, \ldots$ sao cho với mỗi số nguyên dương n, điểm A_n có tọa độ $(n; u_n)$. Biết rằng khi đó tất cả các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ cùng nằm trên một đường thẳng. Hãy viết phương trình của đường thẳng đó.

A. $y=-3x+5$. **B.** $y=-3x+2$. **C.** $y=2x-3$. **D.** $y=2x-5$

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Dạng 1: Bài tập về nhận dạng cấp số cộng

Câu 1. Đáp án B.

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được đáp án đúng.

- *Phương án A*: $1-(-3)=5-1=9-5=4\neq 14-9=5$.

- *Phương án B*: $2-5=-1-2=-4-(-1)=-7-(-4)=-3$.

Vậy dãy số ở phương án B là cấp số cộng.

Câu 2. Đáp án C.

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được đáp án đúng.

- *Phương án A*: Ta có $a_{n+1}-a_n=3, \forall n\geq 1$ nên (a_n) là cấp số cộng.

- *Phương án B*: Ta có $b_{n+1}-b_n=-\sqrt{5}, \forall n\geq 1$ nên (b_n) là cấp số cộng.

- *Phương án C*: Ta có $c_{n+1}-c_n=2n, \forall n\geq 1$ nên (c_n) không là cấp số cộng.

- *Phương án D*: Ta có $d_n=2018, \forall n\geq 1$(do $\cot\frac{(4n-1)\pi}{2}=0$) nên (d_n) là cấp số cộng.

Câu 3. Đáp án C.

Theo giả thiết, ta có: $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z+x}=\frac{2}{y+z}\Rightarrow (y+z)(2x+y+z)=2(x+y)(x+z)\Leftrightarrow y^2+z^2=2x^2$.

Suy ra y^2,x^2,z^2 hoặc z^2,x^2,y^2 lập thành một cấp số cộng. Do đó phương án đúng là C.

Dạng 2: Bài tập về nhận dạng cấp số cộng

Câu 4. Đáp án A.

Ta có (u_n) là cấp số cộng có công sai $d=3$ nên số hạng đầu là $u_1=u_3-2d=-8$

Suy ra số hạng tổng quát là $u_n=3n-11$.

Câu 5. Đáp án A.

Gọi d là công sai của cấp số cộng. Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} u_1+d=2017 \\ u_1+4d=1945 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u_1=2041 \\ d=-24 \end{cases}$

Suy ra $u_{2018}=u_1+2017d=-46367$.

Câu 6. Đáp án B.

Ta có $u_1=S_1=1$ và $u_1+u_2=S_2=8$. Suy ra $u_2=7$

Vậy $d=u_2-u_1=6$.

Câu 7. Đáp án A.

Ta có $u_n=S_n-S_{n-1}=9-4n$.

Suy ra $u_3=-3, u_5=-11, u_7=-19$. Do đó $P=491$.

Câu 8. Đáp án A.

Ta có $\begin{cases} u_3 + u_5 = 5 \\ u_3.u_5 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_3 = 2 \\ u_5 = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_3 = 3 \\ u_5 = 2 \end{cases}$.

+ Giải $\begin{cases} u_3 = 2 \\ u_5 = 3 \end{cases}$, ta được $u_1 = 1$.

+ Giải $\begin{cases} u_3 = 3 \\ u_5 = 2 \end{cases}$, ta được $u_1 = 4$.

Câu 9. **Đáp án A.**

Ta có $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 3u_1^2 + 24u_1 + 56 = 3(u_1 + 4)^2 + 8 \geq 8$

Dấu bằng xảy ra khi $u_1 + 4 = 0 \Leftrightarrow u_1 = -4$

Số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = 2n - 6$.

Nếu $u_n = 2018$ thì $2n - 6 = 2018 \Leftrightarrow n = 1012$.

Vậy 2018 là số hạng thứ 1012 của cấp số cộng.

Câu 10. **Đáp án C.**

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $\begin{cases} 2x = 6 + (-2) \\ 2.(-2) = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -6 \end{cases}$.

Câu 11. **Đáp án A.**

Theo giả thiết, ta có $u_1 = 3, u_8 = 24$

Suy ra $3 + 7d = 24 \Leftrightarrow d = 3$.

Vậy 6 số cần viết thêm là $6, 9, 12, 15, 18, 21$.

Câu 12. **Đáp án B.**

Ta có $x_n = 4 + (n-1).3 = 3n + 1, 1 \leq n \leq 2017$

$y_n = 1 + (m-1).5 = 5m - 4, 1 \leq m \leq 2017$

Để một số là số hạng chung của cả hai cấp số cộng thì ta phải có $3n + 1 = 5m - 4 \Leftrightarrow 3n = 5(m-1)$.

Suy ra $n \vdots 5$, tức là $n = 5t$ và $m = 3t + 1$ $\left(t \in \mathbb{N}^*\right)$.

Lại do $1 \leq n \leq 2017$ nên $1 \leq t \leq 403$.

ứng với 403 giá trị của t, ta tìm được 403 số hạng chung.

Câu 13. **Đáp án B.**

Cấp số cộng $1, 7, 13, \ldots, x$ có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 6$ nên số hạng tổng quát là $u_n = 6n - 5$

Giả sử $x = u_n = 6n - 5$. Khi đó $1 + 7 + 13 + \ldots + x = \dfrac{n(6n-4)}{2} = 3n^2 - 2n$

Theo giả thiết, ta có $3n^2 - 2n = 280 \Rightarrow n = 10 \Rightarrow x = u_{10} = 55$.

Câu 14. **Đáp án A.**

Theo tính chất của cấp số cộng ta có:

$1+\sin x+1+\sin 3x=2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 2+4\sin x-4\sin^3 x=2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 2\sin^3 x+\sin^2 x-2\sin x-1=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(\sin^2 x-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-\dfrac{1}{2}\\ \cos x=0\end{array}\right.$

+) $\sin x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$.

+) $\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

Với nghiệm $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ và $x\in[0;2\pi]$, ta tìm được $x=\dfrac{11\pi}{6}$. Với nghiệm $x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi$ và $x\in[0;2\pi]$, ta tìm được $x=\dfrac{7\pi}{6}$. Với nghiệm $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ và $x\in[0;2\pi]$ ta tìm được nghiệm $x=\dfrac{\pi}{2};x=\dfrac{3\pi}{2}$

Do đó $S+\dfrac{11\pi}{6}+\dfrac{7\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3\pi}{2}=5\pi$.

Dạng 3: Bài tập về tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

Câu 15. Đáp án B.

Ta có $u_4=-3\Leftrightarrow u_1+3d=-3$.

$S_9=45\Leftrightarrow \dfrac{9[2u_1+8d]}{2}=45\Leftrightarrow u_1+4d=5$.

Do đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}u_1+3d=-3\\ u_1+4d=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=-27\\ d=8\end{cases}$.

Ta có $S_{10}=\dfrac{10[2u_1+9d]}{2}=90; S_{20}=\dfrac{20[2u_1+19d]}{2}=980$

Vậy đáp án đúng là **B.**

Câu 16. Đáp án A.

Ta có $x_3+x_{13}=80\Leftrightarrow (x_1+2d)+(x_{15}-2d)=80$

$\Leftrightarrow x_1+x_{15}=80\Rightarrow S_{15}=\dfrac{15(x_1+x_{15})}{2}=600$.

Dạng 4: Bài tập liên quan đến tính chất của cấp số cộng.

Câu 17. Đáp án A.

Kiểm tra từng phương án cho đến khi tìm được phương án đúng.

Ta có: $u_m = u_1 + (m-1)d; u_n = u_1 + (n-1)d; u_p = u_1 + (p-1)d$.

- Phương án A: Ta có: $(n-p)u_m + (p-m)u_n + (m-n)u_p$

- $= (n-p)\left[u_1 + (m-1)d\right] + (p-m)\left[u_1 + (n-1)d\right] + (m-n)\left[u_1 + (p-1)d\right] = 0$.

- Vậy đáp án **A.**

Câu 18. **Đáp án A.**

Theo giả thiết ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}+2\sqrt{b}\right) = 2\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) \Leftrightarrow a+c=2b$$

Suy ra ba số a,b,c hoặc c,b,a lập thành một cấp số cộng. Do đó đáp án là. **A.**

Dạng 5: Bài tập liên quan đến cấp số cộng.

Câu 19. **Đáp án B.**

Áp dụng kết quả ở phần lí thuyế, ta có phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng thì điều kiện cần là $9b^2 = 100ac$ hay $9.10^2 = 100.1.m \Leftrightarrow m = 9$.

Với $m = 9$ thì phương trình đã cho trở thành $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1; x = \pm 3$.

Bốn số $-3;-1;1;3$ lập thành một cấp số cộng nên $m = 9$ là giá trị cần tìm.

Câu 20. **Đáp án A.**

ÁP dụng kết quả phần lý thuyết, ta có phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng thì điều kiện cần là $9b^2 = 100ac$ hay

$$9(2m+2)^2 = 100.1.(2m+1) \Leftrightarrow 9m^2 - 32m - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -\dfrac{4}{9} \end{array}\right.$$

Với $m = 4$, ta có phương trình $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$. Phương trình nàu có 4 nghiệm là $-3;-1;1;3$ lập thành cấp số cộng.

Với $m = -\dfrac{4}{9}$, ta có phương trình $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. Phương trình này có 4 nghiệm $-1;-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};1$ lập thành cấp số cộng.

Vậy $m = 4; m = -\dfrac{4}{9}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó $4^2 + \left(-\dfrac{4}{9}\right)^2 = \dfrac{1312}{81}$.

Câu 21. **Đáp án D.**

Áp dụng kết quả phần lý thuyết, ta có phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thì điều kiện cần là $-\dfrac{b}{3a} = -\dfrac{-3}{3} = 1$ là nghiệm của phương trình.

Suy ra $1^3 - 3.1^2 - 1 + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Với $m = \pm 2$, ta có phương trình $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$.

$\Leftrightarrow (x-3)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=-1, x=1, x=3$

Ba số $-1,1,3$ lập thành cấp số cộng.

Vậy các giá trị cần tìm là $m=\pm 2$. Do đó D là phương án đúng.

Câu 22. **Đáp án A.**

Áp dụng kết quả ở phần lý thuyết, ta có phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thì điều kiện cần là: $-\frac{b}{3a}=-\frac{-9}{3}=3$ là nghiệm của phương trình.

Suy ra $3^3-9.3^2+23.3+m^3-4m^2+m-9=0$

$\Leftrightarrow m^3-4m^2+m+6=0 \Leftrightarrow m=-1, m=2, m=3$

Với $m=-1, m=2, m=3$ thì $m^3-4m^2+m+6=0$ nên $m^3-4m^2+m-9=-15$.

Do vậy, với $m=-1, m=2, m=3$ ta có phương trình

$x^3-9x^2+23x-15=0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2-6x+5)=0 \Leftrightarrow x=1, x=3, x=5$.

Ba số 1,3,5 lập thành cấp số cộng.

Vậy $m=-1, m=2, m=3$ là các giá trị cần tìm.

Do đó $(-1)^3+2^3+3^3=34$

Câu 23. **Đáp án A.**

Ký hiệu h_n là độ cao của bậc thứ n so với mặt sân.

Khi đó, ta có $h_{n+1}=h_n+0,18$ (mét), trong đó $h_1=0,5$ (mét). Dãy số (h_n) lập thành một cấp số cộng có $h_1=0,5$ và công sai $d=0,18$. Suy ra số hạng tổng quát của cấp số cộng này là

$h_n=0,5+(n-1).0,18=0,18.n+0,32$ (mét).

Câu 24. **Đáp án A.**

Giả sử trồng được n hàng. Khi đó tổng số cây được trồng là $S=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Theo giả thiết ta có $\frac{n(n+1)}{2}=3003 \Leftrightarrow n=77$.

Câu 25. **Đáp án B.**

Kí hiệu u_n là số hạt dẻ ở ô thứ n.

Khi đó, ta có $u_1=7$ và $u_{n+1}=u_n+5, n\geq 1$.

Dãy số (u_n) là cấp số cộng với $u_1=7$ và công sai $d=5$ nên có

$S_n=\frac{n\left[2u_1+(n-1)d\right]}{2}=\frac{5n^2+9n}{2}$.

Theo giả thiết, ta có $\frac{5n^2+9n}{2}=25450 \Leftrightarrow n=100$.

Suy ra bàn cờ có 100 ô. Do đó B là đáp án đúng.

Câu 26. **Đáp án B.**

Kí hiệu u_n là mức lương của quý thứ n làm việc cho công ty. Khi đó $u_1 = 13,5$ và $u_{n+1} = u_n + 0,5, n \geq 1$.

Dãy số (u_n) lập thành cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 13,5$ và công sai $d = 0,5$.

Một năm có 4 quý nbên 3 năm có tổng 12 quý.

Số tiền lương sau 3 năm bằng tổng số tiền lương của 12 quý và bằng tổng 12 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n). Vậy, tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm làm việc cho công ty của kỹ sư là $S_{12} = \dfrac{12.[2.13,5 + 11.0,5]}{2} = 195$ (triệu đồng).

Câu 27. **Đáp án B.**

Bán kính đường tròn có đường kính OA_n là $r_n = \dfrac{n}{2}$.

Diên tích nửa đường tròn đường kính OA_n là $S_n = \dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{n}{2}\right)^2 = \dfrac{n^2\pi}{8}$.

Suy ra $u_n = s_n - s_{n-1} = \dfrac{\pi}{8}\left[n^2 - (n-1)^2\right] = \dfrac{(2n-1)\pi}{8}, n \geq 2$.

Ta có $u_1 = \dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi}{8}$.

Do $u_{n+1} - u_n = \dfrac{\pi}{4}, \forall n \geq 1$ nên (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = \dfrac{\pi}{4}$.

Suy ra B là phương án đúng.

Câu 28. **Đáp án B.**

Ta có $A_n(n; u_n)$ trong đó $u_n = 3n - 2$.

Do $u_{n+1} - u_n = 3, \forall n \geq 1$ nên (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 3$.

Suy ra B là phương án đúng.

Câu 29. **Đáp án A.**

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) là $u_n = u_1 + (n-1)d = -3n + 5$.

Nhận thấy toạ độ của các điểm A_n đều thoả mãn phương trình $y = -3x + 5$ nên phương trình đường thẳng đi qua các điểm $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ là $y = -3x + 5$.

Suy ra A là phương án đúng.

CẤP SỐ NHÂN

A. LÝ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA.

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nhân với một số không đổi q.

Số không đổi q được gọi là ***công bội*** của cấp số nhân.

Đặc biệt:

1) *Khi* $q=1$ *thì cấp số nhân là một* ***dãy số không đổi*** *(tất cả các số hạng đều bằng nhau).*
2) *Khi* $q=0$ *thì cấp số nhân có dạng* $u_1,0,0,0,\ldots,0,\ldots$
3) *Khi* $u_1=0$ *thì với mọi* q *cấp số nhân có dạng* $0,0,0,0,\ldots,0,\ldots$

Nhận xét: Từ định nghĩa, ta có:

Nếu (u_n) là một cấp số nhân với công bội q, ta có công thức truy hồi $\boxed{u_{n+1}=u_n.q,\, n\in\mathbb{N}^*}$ (1)

STUDY TIP

1) Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số nhân, chúng ta cần phải chỉ tồn tại một số không đổi q sao cho $u_{n+1}=u_n.q,\,\forall n\ge 1$.

2) Trong trường hợp $u_n\ne 0,\forall n\ge 1$ để chứng minh (u_n) là một cấp số nhân, chúng ta cần phải chỉ ra tỷ số $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ là một số không đổi với mọi số nguyên dương n.

3) Để chỉ ra một dãy số không phải là cấp số nhân, chúng ta cần chỉ một dãy số gồm 3 số hạng liên tiếp của dãy số đã cho mà không lập thành cấp số nhân.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng dãy số hữu hạn sau là một cấp số nhân.

$$-3,-1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{9},-\frac{1}{27},-\frac{1}{81}.$$

Lời giải

Ta có $1=-2+3$; $-1=-3.\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}=-1.\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{9}=-\frac{1}{3}.\frac{1}{3}$;

$-\frac{1}{27}=-\frac{1}{9}.\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{81}=-\frac{1}{27}.\frac{1}{3}$.

Theo định nghĩa cấp số nhân, dãy số $-3,-1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{9},-\frac{1}{27},-\frac{1}{81}$. là một cấp số nhân với công bội $q=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 2. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

a) Dãy số (x_n), với $x_n=n^2$;

b) Dãy số (y_n), với $y_n=\left(\sqrt{5}\right)^{2n-3}$;

c) Dãy số (z_n), với $z_n=\dfrac{2}{n}$;

d) Dãy số (w_n), với $w_n=\dfrac{3^n+1}{3^{n+1}}$.

Lời giải

a) **Cách 1:** Ba số hạng đầu của dãy số (x_n) là 1, 4, 9. Vì $4=1.4; 9\ne 4.4$ nên dãy số (x_n) không phải là cấp số nhân.

Cách 2: Ta có $x_{n+1}=(n+1)^2$ nên $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{(n+1)^2}{n^2}=1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}$ (phụ thuộc vào *n* không phải là số không đổi).

Do đó, (x_n) không phải là cấp số nhân.

b) Ta có $y_{n+1}=\left(\sqrt{5}\right)^{2(n+1)-3}=\left(\sqrt{5}\right)^{2n-1}$ nên $\frac{y_{n+1}}{y_n}=\left(\sqrt{5}\right)^2=5$ (là số không đổi). Do đó, $\left(y_n\right)$ phải là cấp số nhân với công bội $q=5$.

c) Ta có $z_{n+1}=\frac{2}{n+1}$ nên $\frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{n}{n+1}$ (phụ thuộc vào n, không phải là số không đổi).

Do đó $\left(z_n\right)$ không phải là một cấp số nhân.

d) Ba số hạng đầu của dãy số $\left(w_n\right)$ là $\frac{4}{9},\frac{10}{27},\frac{28}{81}$. Vì $\frac{10}{27}=\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{6},\frac{28}{81}\neq\frac{10}{27}\cdot\frac{5}{6}$ nên dãy số $\left(w_n\right)$ không phải là cấp số nhân.

Ví dụ 3. Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ có số hạng đầu $u_1=-1$ và công bội $q=-3$. Viết 6 số hạnh đầu của cấp số nhân và tính tổng của 6 số hạng đó.

Lời giải

Ta có $u_2=u_1q=(-1)(-3)=3;$ $\quad u_3=u_2\,\mathrm{q}=3(-3)=-9;$

$u_4=u_3\,\mathrm{q}=(-9)(-3)=27;$ $\quad u_5=u_4\,\mathrm{q}=(27)(-3)=-81;$

$u_6=u_5\,\mathrm{q}=(-81)(-3)=243;$

Tổng của 6 số hạng đầu tiên của cấp số nhân là

$$S=-1+3+(-9)+27+(-81)+243=182.$$

2. Số hạng tổng quát của cấp số nhân.

Định lý 1.

Nếu cấp số nhân $\left(u_n\right)$ có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức: $\boxed{u_n=u_1\,\mathrm{q}^{n-1},\forall n\geq 2.}$ (2)

STUDY TIP

Từ kết quả của định lý 1, ta rút ra kết quả sau:

Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ với các số hạng khác 0. Khi đó ta có:

1) $u_m=u_k.q^{m-k},k<m.$

2) $q^{m-k}=\frac{u_m}{u_k},k<m.$

Ví dụ 4. Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ có $u_1=3$ và $q=2.$

a) Tìm u_7.

b) Số 12288 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân đã cho?

Lời giải

a) Ta có $u_7=u_1q^{7-1}=3.2^6=192.$

b) Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n=u_1q^{n-1}=3.2^{n-1}.$

Vì $u_n=12288$ nên $3.2^{n-1}=12288\Leftrightarrow n=13.$

Do $n=13$ là số nguyên dương nên số 12288 là số hạng thứ 13 của cấp số nhân đã cho.

Ví dụ 5. Cho cấp số nhân (x_n) có $x_3 = 18$ và $x_7 = 1458$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân đó

Lời giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân (x_n).

Ta có $\begin{cases} x_3 = 18 \\ x_7 = 1458 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.q^2 = 18 \\ x_1.q^6 = 1458 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.q^2 = 18 \\ x_1.q^2q^4 = 1458 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ q^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ q = \pm 3 \end{cases}$

+ Với $x_1 = 2$ và $q = 3$, ta có số hạng tổng quát là $x_n = x_1.q^{n-1} = 2.3^{n-1}$.

+ Với $x_1 = 2$ và $q = -3$, ta có số hạng tổng quát là $x_n = x_1.q^{n-1} = 2.(-3)^{n-1}$.

3. Tính chất các số hạng của cấp số nhân

Định lý 2.

Trong một cấp số nhân (u_n), bình phương mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$\boxed{u^2_k = u_{k-1}.u_{k+1},\ k \ge 2} \qquad (3)$$

STUDY TIP

Một cách tổng quát, ta có:

Nếu (u_n) là cấp số nhân thì $u_m^2 = u_{m-k} + u_{m+k}, k < m$

Ví dụ 6.

a) Cho cấp số nhân (a_n) có $a_7 = 4$ và $a_9 = 12$. Tìm a_8.

b) Cho cấp số nhân $3, x, 12, y$. Tính giá trị của biểu thức $F = x^3 + y^3$.

Lời giải

a) Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $a_8^2 = a_7.a_9 = 4.12 = 48$ Suy ra $a_8 = 4\sqrt{3}$ hoặc $a_8 = -4\sqrt{3}$.

b) Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $x^2 = 3.12 = 36$ và $x.y = 12^2 = 144$.

Giải ra ta được $x = 6; y = 24$ hoặc $x = -6; y = -24$.

+ Với $x = 6; y = 24$ thì $F = x^3 + y^3 = 14040$.

+ Với $x = -6; y = -24$ thì $F = x^3 + y^3 = -14040$.

Vậy $F = 14040$ hoặc $F = -14040$.

4. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

Định lý 3.

Cho một cấp số nhân (u_n) với công bội $q \ne 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Khi đó:

$$S_n = \frac{n(1-q^n)}{1-q} \ (4) \text{ hoặc } S_n = \frac{u_1 - u_{n+1}}{1-q} \ (5)$$

STUDY TIP

1) Chúng ta thường sử dụng công thức (4) để tính S_n khi biết số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân.

> *2) Công thức (5) được sử dụng để tính S_n trong trường hợp biết các số hạng u_1, u_{n+1} và công bội q của cấp số nhân.*

Ví dụ 7.

a) Tính tổng $S = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{12}$.

b) Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Tìm *k*, biết $S_k = 189$.

Lời giải

a) Ta có dãy số $1, 10, 10^2, \ldots, 10^{12}$ lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 10$. Cấp số nhân này có 13 số hạng. Do đó

$$S = S_{13} = \frac{u_1(1-q^{13})}{1-q} = \frac{1}{9}(10^{13}-1).$$

b) Ta có $S_k = \dfrac{u_1(1-q^k)}{1-q} = \dfrac{3.(1-2^k)}{1-2} = 3(2^k-1)$

Theo giả thiết, ta có $3(2^k-1) = 189 \Leftrightarrow 2^k = 2^6 \Leftrightarrow k = 6.$

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ CẤP SỐ NHÂN

Câu 1. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

A. Dãy số (a_n), với $a_n = (-1)^n.3^{n+1} + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. Dãy số (b_n), với $b_1 = 1, b_{n+1} = b_n + \dfrac{2017}{2018}b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Dãy số (c_n), với $c_n = n.5^{2n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

D. Dãy số (d_n), với $d_1 = 3, d_{n+1} = d_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Đáp án B

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

- *Phương án A*: Ba số hạng đầu tiên của dãy số là $-8, 28, -80$.

Ba số này không lập thành cấp số nhân vì $\dfrac{28}{-8} \neq \dfrac{-80}{28}$.

- *Phương án B*: Ta có $b_{n+1} = \dfrac{4035}{2018}b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (b_n) là cấp số nhân

- *Phương án C*: Ta có $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{25(n+1)}{n}$ (phụ thuộc vào *n*, không phải là không đổi)

Do đó (c_n) không phải là cấp số nhân.

- *Phương án D*: Ba số hạng đầu tiên của dãy số (d_n) là $3, 9, 81$. Nhận thấy ba số này không lập thành cấp số nhân nên dãy số (d_n) không là cấp số nhân.