Vậy $\min P = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{15} - 6$ khi $\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{y}{2} = \frac{z}{\sqrt{5}} > 0$.

Phần trên ta đã sử dụng dấu hiệu nhận biết để đổi biến. Tuy nhiên còn rất nhiều bất đẳng thức mà khi gặp phải, nó đòi hỏi chúng ta kinh nghiệm giải toán và sự linh hoạt trong phán đoán. Sau đây tôi trình bày tiếp các ví dụ mà cách đổi biến không tuân theo dấu hiệu nào.

Ví dụ 16: Cho a, b, c là ba số dương thỏa $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Giải:

Đặt $a = \frac{1}{x},\ b = \frac{1}{y},\ c = \frac{1}{z}$ thì ta có $xyz = 1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^2}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} + \frac{y^2}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}} + \frac{z^2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$ (Đã chứng minh)

Ví dụ 17: Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh rằng: $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \leq xyz$.

Giải:

Đặt $a = x+y-z, b = y+z-x, c = z+x-y \Rightarrow x = \frac{a+c}{2}, y = \frac{a+b}{2}, z = \frac{b+c}{2}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $abc \leq \frac{a+b}{2}.\frac{b+c}{2}.\frac{c+a}{2}$.

Ta thấy tổng 2 số bất kỳ trong 3 số a, b, c là 1 số không âm nên có ít nhất 2 trong 3 số đó không âm. Trong trường hợp có 1 số âm thì BĐT hiển nhiên đúng. Do đó phải xảy ra trường hợp cả 3 số a, b, c không âm. Áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số ta có:

$$\frac{a+b}{2}.\frac{b+c}{2}.\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ab}.\sqrt{bc}.\sqrt{ca} = abc$$ (ĐPCM).

Ví dụ 18: Cho ba số $a,b,c \in (0;\frac{3}{2}): a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{\sqrt{3-2a}}+\frac{1}{\sqrt{3-2b}}+\frac{1}{\sqrt{3-2c}} \geq \frac{9}{ab+bc+ca}.$$

Giải:

Đặt $\sqrt{3-2a}=x, \sqrt{3-2b}=y, \sqrt{3-2c}=z$ thì $\begin{cases} x,y,z>0 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$;

Ta có: $ab+bc+ca=\frac{1}{4}(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9)$.

Do đó BĐT cần chứng minh trở thành:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{36}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9} \Leftrightarrow (\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9) \geq 36.$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số dương và 12 số dương ta được:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}>0 \quad (1)$$

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+9 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+\underbrace{1+1+...+1}_{9 so 1} \geq 12\sqrt[12]{(xyz)^4} = 12\sqrt[3]{xyz}>0 \quad (2)$$

Nhân vế theo vế của (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 19: Cho $x,y,z>0: x+y+z=1$. Chứng minh rằng: $\frac{1+x}{y+z}+\frac{1+y}{z+x}+\frac{1+z}{x+y} \leq 2(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x})$ (1)

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(x+y+z)+x}{y+z}+\frac{(x+y+z)+y}{z+x}+\frac{(x+y+z)+z}{x+y} \leq 2(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x})$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{3}{2} \leq \frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{x}{z}-\frac{x}{y+z})+(\frac{z}{y}-\frac{z}{x+y})+(\frac{y}{x}-\frac{y}{z+x}) \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{xy}{yz+z^2}+\frac{zx}{xz+y^2}+\frac{yz}{xz+x^2} \geq \frac{3}{2} \quad (2)$$

Đặt $a = xy > 0, b = yz > 0, c = zx > 0$.

Khi đó (2) trở thành:

$$\frac{a}{b+\frac{bc}{a}}+\frac{c}{a+\frac{ab}{c}}+\frac{b}{c+\frac{ac}{b}} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2}{ab+bc}+\frac{b^2}{ab+ac}+\frac{c^2}{bc+ac} \geq \frac{3}{2}.$$

Ta có: $\frac{a^2}{ab+bc}+\frac{b^2}{ab+ac}+\frac{c^2}{bc+ac} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2.\frac{(a+b+c)^2}{3}} = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 20: Cho ba số dương a, b, c thoả mãn *abc* = 1.Chứng minh:

$$\frac{a}{(a+1)^2}+\frac{b}{(b+1)^2}+\frac{c}{(c+1)^2}-\frac{4}{(a+1)(b+1)(c+1)} \leq \frac{1}{4}$$

Giải:

Đặt: $x = \frac{1-a}{1+a}; y = \frac{1-b}{1+b}; z = \frac{1-c}{1+c} \Rightarrow -1<x, y, z < 1$ và $a = \frac{1-x}{1+x}; b = \frac{1-y}{1+y}; c = \frac{1-z}{1+z}$.

Từ $abc = 1 \Rightarrow (1-x)(1-y)(1-z) = (1+x)(1+y)(1+z) \Rightarrow x + y + z + xyz = 0$.

Mặt khác: $\frac{4a}{(a+1)^2} = 1-x^2; \frac{2}{a+1} = 1+x$

Tương tự: $\frac{4b}{(b+1)^2} = 1-y^2; \frac{2}{b+1} = 1+y$ và $\frac{4c}{(c+1)^2} = 1-z^2; \frac{2}{c+1} = 1+z$

Nên bất đẳng thức cần chúng minh tương đương với

$$\frac{4a}{(a+1)^2}+\frac{4b}{(b+1)^2}+\frac{4c}{(c+1)^2} \leq 1+2.\frac{2}{(a+1)}.\frac{2}{(b+1)}.\frac{2}{(c+1)}$$

$$\Leftrightarrow 1-x^2+1-y^2+1-z^2 \leq 1+2(1+x)(1+y)(1+z)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)+2(x+y+z+xyz) \geq 0 \Leftrightarrow (x+y+z)^2 \geq 0.$$

Đây là bất đẳng thức luôn đúng nên bài toán được chứng minh.

Ví dụ 21: Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng $\frac{4c}{2a+b}+\frac{4a}{b+2c}+\frac{b}{c+a} \geq 3$.

Giải:

Đặt $x=2a+b,\ y=b+2c,\ z=c+a$, suy ra

$$a=\frac{x-y+2z}{4},\quad b=\frac{x+y-2z}{2},\quad c=\frac{y-x+2z}{4}$$

BĐT cần chứng minh trở thành: $\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{2z}{x}+\frac{x}{2z}\right)+\left(\frac{2z}{y}+\frac{y}{2z}\right)\geq 6.$ (CM dễ dàng)

Ví dụ 22: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\frac{a+2b}{5c+4a}+\frac{3c}{4a+4b+c}+\frac{c+2a}{a+2b+6c}\geq 1$.

Giải:

Đặt $x=a+2b,\ y=3c,\ z=c+2a$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y}\geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS và BĐT cơ bản $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$, ta có

$$\frac{x^2}{xy+2xz}+\frac{y^2}{yz+2xy}+\frac{z^2}{xz+2yz}\geq\frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)}\geq\frac{3(xy+yz+zx)}{3(xy+yz+zx)}=1.$$

Ví dụ 23: (ĐH_A, 2009). Chứng minh rằng với mọi $x,y,z>0$ thỏa mãn $x(x+y+z)=3yz$, ta có bất đẳng thức sau: $(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(y+z)(z+x)\leq 5(y+z)^3$.

Giải:

Đặt $a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y$, khi đó $a,b,c>0$ và

$$x=\frac{b+c-a}{2},\quad y=\frac{c+a-b}{2},\quad z=\frac{a+b-c}{2}$$

BĐT cần chứng minh trở thành $c^3+b^3+3abc\leq 5a^3 \Leftrightarrow \frac{c^3}{a^3}+\frac{b^3}{a^3}+3.\frac{b}{a}.\frac{c}{a}\leq 5 \qquad (1)$

Giả thiết được viết lại thành $b^2+c^2-bc=a^2 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}-\frac{b}{a}.\frac{c}{a}=1 \quad (2)$

Đặt $u=\frac{b}{a},\ v=\frac{c}{a}$ thì $u,v>0$ và từ $(2)\Leftrightarrow u^2+v^2-uv=1$. Ta phải chứng minh

$$u^3+v^3+3uv\le 5 \qquad (3)$$

Ta có : $(u+v)^2\le(u+v)^2+3(u-v)^2=4(u^2+v^2-uv)=4\Rightarrow u+v\le 2$

Do đó $u^3+v^3=(u+v)(u^2+v^2-uv)=u+v\le 2$ và $uv\le\frac{(u+v)^2}{4}=1$

Suy ra (3) đúng.

Đối với một số bài toán chứng minh bất đẳng thức chứa ba biến a, b, c không âm, có vai trò như nhau ta có thể sử dụng phương pháp đổi biến như sau:

Đặt $x=a+b+c$; $y=ab+bc+ca$; $z=abc$.

Ta có các đẳng thức sau:

$$xy-z=(a+b)(b+c)(c+a) \qquad (1)$$

$$x^2+y=(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b) \qquad (2)$$

$$x^2-2y=a^2+b^2+c^2 \qquad (3)$$

$$x^3-3xy+3z=a^3+b^3+c^3 \qquad (4)$$

Các bất đẳng thức sau:

$$x^2\ge 3y \qquad (5)$$

$$x^3\ge 27z \qquad (6)$$

$$y^2\ge 3xz \qquad (7)$$

$$xy\ge 9z \qquad (8)$$

$$x^3-4xy+9z\ge 0 \qquad (9)$$

(Bạn đọc tự chứng minh các bất đẳng thức trên).

Ví dụ 24: Cho ba số dương a, b, c thoả mãn điều kiện *abc* = 1. Chứng minh

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 2(1+a+b+c)$$

Giải:

Đặt $x=a+b+c$; $y=ab+bc+ca$; $z=abc$.

Theo (1) thì bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$xy-z \ge 2(1+x) \Leftrightarrow xy-1 \ge 2(1+x) \Leftrightarrow x(y-2) \ge 3.$$

Do *z* = *abc* = 1 nên theo (6) và (7) suy ra: $x \ge 3$; $y \ge 3$ suy ra: $x(y-2) \ge 3$ là BĐT đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ *x* = y = 3 hay a = b = c =1. Suy ra bài toán được chứng minh.

Ví dụ 25: Cho ba số dương a, b, c thoả mãn: *a + b + c* = 3. Chứng minh:

$$abc+\frac{12}{ab+bc+ca} \ge 5$$

Giải:

Đặt $x=a+b+c$; $y=ab+bc+ca$; $z=abc$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau:

$$z+\frac{12}{y} \ge 5 \qquad (*)$$

Theo (9) kết hợp với *x = a + b + c* =3 ta có: $27-12y+9z \ge 0$.

Suy ra: $$z \ge \frac{4y-9}{3} \Rightarrow z+\frac{12}{y} \ge \frac{4y-9}{3}+\frac{12}{y} \qquad (**)$$

Mặt khác: $\frac{4y-9}{3}+\frac{12}{y} \ge 5 \Leftrightarrow 4y^2-9y+36 \ge 15y \Leftrightarrow (y-3)^2 \ge 0$ (đúng với mọi y).

Từ (*) và (**) suy ra bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: a = b = c =1.

hoc360.net

Bài tập tương tự:

1. Giả sử a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi là 3.
   Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{a+b-c}}+\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{1}{\sqrt{c+a-b}}\ge\frac{9}{ab+bc+ca}$.
2. Cho $a,b,c: abc=1$. CMR: $\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\ge\frac{3}{2}$.
3. Cho x, y, z là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:
   $(x+y+z)xyz\ge(xy+yz+zx)\sqrt[3]{(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)}$.
4. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:
   $\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a-b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}}\ge 3$.
5. Cho a, b, c >0. Tìm GTLN của: $P=\frac{\sqrt{bc}}{a+3\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+3\sqrt{ca}}+\frac{\sqrt{ab}}{c+3\sqrt{ab}}$.
6. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $4^x+4^y+4^z=3$. CMR: $2^x+2^y+2^z\ge4^{x+y}+4^{y+z}+4^{z+x}$.
7. Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a+2}+\frac{2007}{2008+b}\le\frac{c+1}{2007+c}$.
   Tìm GTNN của P = (a+1)(b+1)(c+1).
8. Xét a, b, c > 0 tùy ý. Tìm GTLN của: $T=\frac{\sqrt{abc}}{(1+a)(1+a+b)(1+a+b+c)}$.

9. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $\frac{a+1}{b+2c+3}+\frac{b+1}{c+2a+3}+\frac{c+1}{a+2b+3}\ge 1$.

10. Cho ba số không âm a, b, c, thoả mãn: $ab+bc+ca+abc=4$.
Chứng minh: $3(a^2+b^2+c^2)+abc\ge 10$

11. Cho ba số dương a, b, c thoả mãn điều kiện ab + bc + ca = 3.
Chứng minh: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{a+b+c}{6}+\frac{3}{a+b+c}$

12. Cho ba số a, b, c thuộc (0; 1) thoả mãn $abc=(1-a)(1-b)(1-c)$.
Chứng minh: $a^3+b^3+c^3+5abc\ge 1$

13. Cho a, b, c là các số dương và $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2$. Chứng minh: 8abc $\le$ 1.

14. Cho ba số dương a, b, c thoả mãn abc = 1. Chứng minh:

(a + b)(b + c)(c + a) ≥ 5(a + b + c) – 7

15.Cho các số dương a, b, c sao cho abc = 1. Chứng minh: $\frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}+\frac{c+3}{(c+1)^2}\geq 3$

16.Cho các số dương a, b, c sao cho abc = 1. Chứng minh: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{3}{2}(a+b+c-1)$

17.Cho $a,b,c\geq 0$ thoả a + b + c = 1. Chứng minh: $0\leq 27(ab+bc+ca)-54abc\leq 7$

18.Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}\geq(1+a)(1+b)(1+c)-2(1+abc)$

19.Cho x, y, z là các số thực không âm, đôi một khác nhau và thỏa mãn điều kiện $(x+z)(y+z)=1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}\geq 4$.

20.Cho $a,b,c\geq -1$ thỏa $a^2+b^2+c^2=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=a+b+c$.

21.Cho $x,y,z\in[0;2]$ và $x+y+z=3$. Chứng minh $3\leq x^2+y^2+z^2\leq 5$.

22.Cho $x,y,z\in[0;2]$ và $x+y+z=3$. Tìm GTNN va GTLN của biểu thức

$$P=x^4+y^4+z^4-12(x-1)(y-1)(z-1)$$

&3. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPSKI

(Cauchy-Schwarz - *Bất đẳng thức BCS*)

***Bất** đẳng thức BCS*

Cho $2n$ số dương ($n \in Z, n \geq 2$): $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ ta có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

Dấu "=' xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ (quy ước nếu $b_i = 0 \Rightarrow a_i = 0$)

Hệ quả (dạng thường dùng)

Cho hai dãy số $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ với $b_i > 0\ \forall i = \overline{1,n}$ ta luôn có:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

Dấu "=' xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$

Ví dụ 1: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $3x^3 + 4y^2 = 5$. Chứng minh $2x + y \leq \sqrt{\frac{95}{12}}$

Giải:

Sử dụng BCS cho 2 dãy số $\sqrt{3}x,\ 2y$ và $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}$ ta có

$$(2x+y)^2 = \left(\sqrt{3}x.\frac{2}{\sqrt{3}} + 2y.\frac{1}{2}\right) \leq \left(3x^3 + 4y^2\right)\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{4}\right) = 5.\frac{19}{12} = \frac{95}{12}$$

Dấu "=' xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}x}{\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)} = \dfrac{2y}{\left(\dfrac{1}{2}\right)} \\ 3x^2 + 4y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{15}{76}} \\ y = \sqrt{\dfrac{15}{76}} \end{cases}$. Vậy bất đẳng thức được chứng.

Ví dụ 2: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$.

<u>*Giải:*</u>

Áp dụng hệ quả bất đẳng thức BCS với hai dãy a,b,c và $a(b+2c),b(c+2a),c(a+2b)$,ta có

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}=\frac{a^2}{a(b+2c)}+\frac{b^2}{b(c+2a)}+\frac{c^2}{c(a+2b)}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)}$$

Do đó, ta còn chứng minh

$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$ **(bạn đọc tự chứng minh)**

Dấu "=' xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{a(b+2c)}=\frac{b}{b(c+2a)}=\frac{c}{c(a+2b)}\Leftrightarrow a=b=c$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với a, b c dương , ta đều có $\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}\ge\frac{1}{a^2+bc}$

<u>*Giải:*</u>

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có

$$(a+b)^2=\left(a.1+\sqrt{bc}.\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2\le(a^2+bc)\left(1+\frac{b}{c}\right)\Rightarrow\frac{1}{(a+b)^2}\ge\frac{c}{(b+c)(a^2+bc)}\qquad(1)$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $\frac{1}{(a+c)^2}\ge\frac{b}{(b+c)(a^2+bc)}\qquad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Dấu "=' xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 4: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh $\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)}+\frac{b^3}{(2b^2+c^2)(2b^2+a^2)}+\frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)}\le\frac{1}{a+b+c}$

<u>*Giải:*</u>

Áp dụng bất dẳng thức BCS, ta có

$$\left(a^2+b^2+a^2\right)\left(a^2+a^2+c^2\right)\geq\left(a^2+ba+ac\right)^2=a^2\left(a+b+c\right)$$
$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{\left(2a^2+b^2\right)\left(2a^2+c^2\right)}\leq\frac{1}{a+b+c}\Leftrightarrow\frac{a^3}{\left(2a^2+b^2\right)\left(2a^2+c^2\right)}\leq\frac{a}{\left(a+b+c\right)^2}$$

Tương tự

$$\frac{b^3}{\left(2b^2+c^2\right)\left(2b^2+a^2\right)}\leq\frac{b}{\left(a+b+c\right)^2},\qquad\frac{c^3}{\left(2c^2+a^2\right)\left(2c^2+b^2\right)}\leq\frac{c}{\left(a+b+c\right)^2}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức cùng chiều, ta được (1)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 5: Cho x, y, z là các thực thỏa $xy+yz+zx=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^4+y^4+z^4$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức BCS hai lần liên tiếp, ta có

$$\left(x^2.1+y^2.1+z^2.1\right)^2\leq\left(x^4+y^4+z^4\right)\left(1^2+1^2+1^2\right)\Rightarrow3\left(x^4+y^4+z^4\right)\geq\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\quad(1)$$
$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(y^2+z^2+x^2\right)\geq\left(xy+yz+zx\right)^2=16\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $P=x^4+y^4+z^4\geq\frac{16}{3}$.

Vậy $\min P=\frac{16}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}xy+yz+zx=4\\x^2=y^2=z^2\\\frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=z=\frac{2\sqrt{3}}{3}\\x=y=z=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$.

<u>Lưu ý:</u> Vấn đề bảo tồn dấu "=" luôn xảy ra trong quá trình biến đổi bài toán cũng quan trọng như bất đẳng thức Côsi.

hoc360.net

Ví dụ 6: Cho x,y,z là ba số dương và $x+y+z\le 1$, chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}$$

Sai lầm

$$\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(1^2+1^2\right)}\ge\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}=x+\frac{1}{x}\Rightarrow\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

Tương tự ta có:

$$P\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(x+y+z)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right]\ge\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=3\sqrt{2}$$

Vậy $P\ge 3\sqrt{2}....?$

Nguyên nhân sai lầm: $P=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{1}=\dfrac{1}{x},\dfrac{y}{1}=\dfrac{1}{y},\dfrac{z}{1}=\dfrac{1}{z}\,(vn)\\ x+y+z=1\end{cases}$

Lời giải đúng: Ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$; và biểu thức trong căn gợi cho tam sử dụng BCS: $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)\ge\left(\alpha x+\frac{\beta}{y}\right)^2$ với α,β là những số thỏa mãn

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{\frac{1}{x}}{\beta}=\frac{1}{\beta x}\Leftrightarrow x^2=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{9},$$ chọn $\alpha=1,\beta=9$

Ta có $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(1^2+9^2\right)\ge\left(x+\frac{9}{x}\right)^2\Rightarrow\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\ge\frac{1}{\sqrt{82}}\left(x+\frac{9}{x}\right)$

Tương tự ta có: $P\ge\frac{1}{\sqrt{82}}\left[9x+y+z)+9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right]$

Do $x+y+z=1;\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=9$ nên ta tách:

$$(x+y+z)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{80}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq\frac{2}{3}\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}+\frac{80}{9}\frac{9}{x+y+z}\geq 82$$

Vậy $P\geq\sqrt{82}$, dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 7: Cho $\begin{cases} x,y,z.0 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq 1 \end{cases}$. Tìm GTLN của $P=\frac{1}{\sqrt{2}x+y+z}+\frac{1}{x+\sqrt{2}y+z}+\frac{1}{x+y+\sqrt{2}z}$

Giải:

Áp dụng BCS ta có: $\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}x}+\frac{1^2}{y}+\frac{1^2}{z}\geq\frac{(\alpha+1+1)^2}{\sqrt{2}x+y+z}$, ta chọn α thỏa

$x=y=z=3$ và $\frac{\alpha}{\sqrt{2}x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}\Rightarrow\frac{\alpha}{\sqrt{2}.3}=\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow\alpha=\sqrt{2}$

Vậy ta có: $\begin{cases} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}x}+\frac{1^2}{y}+\frac{1^2}{z}\geq\frac{(\sqrt{2}+1+1)^2}{\sqrt{2}x+y+z} \\ \frac{1^2}{x}+\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}y}+\frac{1^2}{z}\geq\frac{(1+\sqrt{2}+1)^2}{x+\sqrt{2}y+z} \\ \frac{1^2}{x}+\frac{1^2}{y}+\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}z}\geq\frac{(1+1+\sqrt{2})^2}{x+y+\sqrt{2}z} \end{cases}\Rightarrow P\leq\frac{\left(\sqrt{2}+2\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right]\leq\frac{1}{2+\sqrt{2}}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=3\Rightarrow MaxP=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$ khi $x=y=z=3$

Ví dụ 8: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2x-y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

Giải:

Nhận xét: Ý tương là dùng bất đẳng thức BCS, nhưng ta không biết được dấu "=" xảy ra tại đâu. Ta giả định dấu "=" là có như sau

Giả sử P đạt min tại $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ với $2a - b = 2$

Áp dụng BCS, ta có

$$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \geq \frac{ax + (b+1)(y+1)}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}}, \qquad \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \geq \frac{ax + (b-3)(y-3)}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}}$$

Suy ra

$$P = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \geq \frac{ax + (b+1)(y+1)}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} + \frac{ax + (b-3)(y-3)}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}}$$

$$= \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}}\right]x + \left[\frac{b+1}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} + \frac{b+1}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}}\right]y$$

$$+ \frac{b+1}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} - \frac{3(b+1)}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}}$$

Ta sẽ chọn a, b thỏa

$$\begin{cases} 2a - b = 2 \\ \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} + \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}} = -2\left(\dfrac{b+1}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} + \dfrac{b+1}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{-2}{3} \end{cases}$$

Tới đây suy ra $P \geq \frac{12\sqrt{5}}{25}x - \frac{6\sqrt{5}}{25}y + \frac{38\sqrt{5}}{25} = \frac{6\sqrt{5}}{25}(2x - y) + \frac{38\sqrt{5}}{25} = 2\sqrt{5}$

Các bạn tự viết lại bài giải hoàn chỉnh.

Ví dụ 9: Cho $a,b,c > 0$ thỏa $a + b + c = 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 14$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{4a + b}{c}$$

hoc360.net

<u>*Giải:*</u>

Đây là một bài toán khó, dấu "=" không biết xảy ra tại đâu. Ý tưởng như ví dụ 8, nhưng khó áp dụng được BCS. Vì vậy ta có thể giả sử $\max P \le m \Leftrightarrow \frac{4a+b}{c} \le m \Leftrightarrow 4a+b-mc \le 0$ với $m>0$.

Kết hợp với giả thiết $n(a+b+c)=6n$ với $n>0$, ta có

$$(4+n)a+(1+n)b+(n-m)c \le 6n \qquad (1)$$

Từ đây ta cố gắng đánh giá theo bất đẳng thức BCS sao cho vế trái xuất hiện $a^2+b^2+c^2$.

Áp dụng BCS, ta có

$$\left[(4+n)a+(1+n)b+(n-m)c\right]^2 \le \left[(4+n)^2+(1+n)^2+(n-m)^2\right].\left[a^2+b^2+c^2\right]=14\left[(4+n)^2+(1+n)^2+(n-m)^2\right](2)$$

Vì cần chứng minh (1), nên ta chọn m,n sao cho bình phương của vế phải của (1) và vế phải của (2) bằng nhau. Tức là

$$14\left[(4+n)^2+(1+n)^2+(n-m)^2\right]=36n^2$$

Ngoài ra dấu "=" trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{4+n}=\frac{b}{1+n}=\frac{c}{n-m}=\frac{a+b+c}{5+3n-m}=\frac{6}{5+3n-m}$

Hay $\quad a=\frac{6(4+n)}{5+3n-m},\ b=\frac{6(1+n)}{5+3n-m},\ c=\frac{6(n-m)}{5+3n-m}$.

Khi đó $\max P$ đạt được thỏa yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n>m>0 \\ a+b+c=6 \quad (h/n) \\ a^2+b^2+c^2=14 \\ 14\left[(4+n)^2+(1+n)^2+(n-m)^2\right]=36n^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n>m>0 \\ 36\left[(4+n)^2+(1+n)^2+(n-m)^2\right]=14(5+3n-m)^2 \\ 14\left[(4+n)^2+(1+n)^2+(n-m)^2\right]=36n^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{31}{2} \\ n=\frac{49}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow a=\frac{19}{7},\ b=\frac{17}{7},\ c=\frac{6}{7}$$

Trình bày lại bài giải hoàn chỉnh (dành cho bạn đọc).

Bài tập tương tự

1. Cho $a,b,c>0$ thỏa $abc=1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$
2. Cho $a,b,c>0$ thỏa $abc=1$. Tìm GTNN của $P=\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}$
3. Cho $a,b,c,d>0$. Tìm GTNN của $P=\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}$
4. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1$
5. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\frac{a^4}{b+4c}+\frac{b^4}{c+4a}+\frac{c^4}{a+4b}\ge\frac{a^3+b^3+c^3}{4}$
6. Cho $a,b,c>0$ thỏa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng $\frac{a}{a+2bc}+\frac{b}{b+2ca}+\frac{c}{c+2ab}\ge 1$
7. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$
8. Cho $a,b,c>0$ thỏa $a+b+c=6$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{a+b}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b+c}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c+a}}\ge\frac{3\sqrt{17}}{2}$$

hoc360.net