1) Độ dài $AB = \sqrt{2}$.
2) Tam giác BCD vuông tại B.
3) Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 6.
Các mệnh đề đúng là:

A. 2). **B.** 3). **C.** 1); 3). **D.** 2), 1)

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1,1,0); \vec{b} = (1,1,0); \vec{c} = (1,1,1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng:

A. $\cos\left(\vec{b},\vec{c}\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

A. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng. **D.** $\vec{a}.\vec{b} = 1$.

Hướng dẫn giải

$\cos(\vec{b},\vec{c}) = \dfrac{\vec{b}.\vec{c}}{\left|\vec{b}\right|.\left|\vec{c}\right|}$

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$, biết $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$, $C(-1;1;0)$, $D(2;-1;-2)$. Độ dài đường cao AH của tứ diện $ABCD$ bằng:

A. $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{13}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

Hướng dẫn giải

Sử dụng công thức $h = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

Câu 59. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ với I là trọng tâm của đáy ABC. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng

A. $\overrightarrow{SI} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right)$. **B.** $\overrightarrow{SI} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right)$.

C. $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$. **D.** $\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AI} \\ \overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BI} \\ \overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CI} \end{array}\right\} \Rightarrow 3\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SB} + \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI}\right)$$

Vì I là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{SI} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right)$.

Câu 60. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1), D(-2;1;-1)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 3. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = a, SC = 3a, \widehat{ASB} = \widehat{CSB} = 60^0, \widehat{CSA} = 90^0$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó khoảng cách SG bằng

A. $\frac{a\sqrt{15}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{7}}{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức tổng quát: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$ và có $\widehat{ASB} = \alpha, \widehat{BSC} = \beta, \widehat{CSA} = \gamma$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, khi đó

$SG = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha + 2ac\cos\gamma + 2bc\beta}$

Chứng minh:

Ta có: $\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right)$

$\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right)^2 = \overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SC}^2 + 2\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}$

Khi đó $SG = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha + 2ac\cos\gamma + 2bc\beta}$

Áp dụng công thức trên ta tính được $SG = \frac{a\sqrt{15}}{3}$

Câu 62. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;1), B(-2;-6;2), C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$, để $\left|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì m bằng

A. 2. **B.** 3 . **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{AC}(-1;-3;-2), \overrightarrow{MB}(-2-m;-6-m;2-m)$

$\left|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{m^2 + m^2 + (m-6)^2} = \sqrt{3m^2 - 12m + 36} = \sqrt{3(m-2)^2 + 24}$

Để $\left|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}\right|$ nhỏ nhất thì $m = 2$

Câu 63. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;1), B(-2;-6;2), C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$, để $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì m bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{MA} = (2-m;5-m;1-m), \overrightarrow{MB} = (-2-m;-6-m;2-m), \overrightarrow{MC} = (1-m;2-m;-1-m)$

$MA^2 - MB^2 - MC^2 = -3m^2 - 24m - 20 = 28 - 3(m-4)^2 \le 28$

Để $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì $m = 4$

Câu 64. Cho hình chóp $S.ABCD$ biết $A(-2;2;6), B(-3;1;8), C(-1;0;7), D(1;2;3)$. Gọi H là trung điểm của CD, $SH \perp (ABCD)$. Để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{27}{2}$ (đvtt) thì có hai điểm S_1, S_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tọa độ trung điểm I của S_1S_2

A. $I(0;-1;-3)$. **B.** $I(1;0;3)$ **C.** $I(0;1;3)$. **D.** $I(-1;0;-3)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;2),\overrightarrow{AC}=(1;-2;1)\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{DC}=(-2;-2;4),\overrightarrow{AB}=(-1;-1;2)\Rightarrow\overrightarrow{DC}=2.\overrightarrow{AB}\Rightarrow ABCD$ là hình thang và

$S_{ABCD}=3S_{ABC}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

Vì $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}\Rightarrow SH=3\sqrt{3}$

Lại có H là trung điểm của $CD\Rightarrow H(0;1;5)$

Gọi $S(a;b;c)\Rightarrow\overrightarrow{SH}=(-a;1-b;5-c)\Rightarrow\overrightarrow{SH}=k\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=k(3;3;3)=(3k;3k;3k)$

Suy ra $3\sqrt{3}=\sqrt{9k^2+9k^2+9k^2}\Rightarrow k=\pm1$

+) Với $k=1\Rightarrow\overrightarrow{SH}=(3;3;3)\Rightarrow S(-3;-2;2)$

+) Với $k=-1\Rightarrow\overrightarrow{SH}=(-3;-3;-3)\Rightarrow S(3;4;8)$

Suy ra $I(0;1;3)$

Câu 65. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;7),B(4;5;-2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm M. Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số nào

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm $M\Rightarrow M(0;y;z)$

$\Rightarrow\overrightarrow{MA}=(2;-1-y;7-z),\overrightarrow{MB}=(4;5-y;-2-z)$

Từ $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$ ta có hệ $\begin{cases}2=k.4\\-1-y=k(5-y)\\7-z=k(-2-z)\end{cases}\Rightarrow k=\frac{1}{2}$

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;1;-1),B(3;0;1),C(2;-1;3)$ và D thuộc trục Oy. Biết $V_{ABCD}=5$ và có hai điểm $D_1(0;y_1;0),D_2(0;y_2;0)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó y_1+y_2 bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

$D\in Oy\Rightarrow D(0;y;0)$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2),\overrightarrow{AD}=(-2;y-1;1),\overrightarrow{AC}=(0;-2;4)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right]=(0;-4;-2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-4y+2$ $V_{ABCD}=5\Leftrightarrow\frac{1}{6}|-4y+2|=5\Leftrightarrow y=-7;y=8$

$\Rightarrow D_1(0;-7;0),D_2(0;8;0)\Rightarrow y_1+y_2=1$

Câu 67. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;2;4),B(3;0;-2),C(1;3;7)$. Gọi D là chân đường phân giác trong của góc A. Tính độ dài $\left|\overrightarrow{OD}\right|$.

A. $\frac{\sqrt{207}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{203}}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{201}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{205}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $D(x;y;z)$

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{14}}=2$$

Vì D nằm giữa B, C (phân giác trong) nên $\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}3-x=-2(1-x)\\-y=-2(3-y)\\-2-z=-2(7-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{3}\\y=2\\z=4\end{cases}$

Suy ra $D\left(\frac{5}{3};2;4\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{OD}\right|=\frac{\sqrt{205}}{3}$

Câu 68. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC, biết $A(1;1;1)$, $B(5;1;-2)$, $C(7;9;1)$. Tính độ dài phân giác trong AD của góc A

A. $\frac{2\sqrt{74}}{3}$. **B.** $\frac{3\sqrt{74}}{2}$. **C.** $2\sqrt{74}$. **D.** $3\sqrt{74}$.

Hướng dẫn giải

$D(x;y;z)$ là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC.

Ta có $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}\Rightarrow\overrightarrow{DC}=-2\overrightarrow{DB}\Rightarrow D(\frac{17}{3};\frac{11}{3};-1)\Rightarrow AD=\frac{2\sqrt{74}}{3}$.

Câu 69. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$ $D(2;2;-1)$. Biết $M(x;y;z)$, để $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x+y+z$ bằng

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của $ABCD$ ta có: $G\left(\frac{7}{3};\frac{14}{3};0\right)$.

Ta có: $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=4MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$

$\geq GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$. Dấu bằng xảy ra khi $M\equiv G\left(\frac{7}{3};\frac{14}{3};0\right)\Rightarrow x+y+z=7$.

Câu 70. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;3;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(1;1;-2)$. H là trực tâm tam giác ABC, khi đó, độ dài đoạn OH bằng

A. $\frac{\sqrt{870}}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{870}}{14}$. **C.** $\frac{\sqrt{870}}{16}$. **D.** $\frac{\sqrt{870}}{15}$.

Hướng dẫn giải

$H(x;y;z)$ là trực tâm của $\Delta ABC\Leftrightarrow BH\perp AC, CH\perp AB, H\in(ABC)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\\\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0\\\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH}=0\end{cases}\Leftrightarrow\left\{x=\frac{2}{15};y=\frac{29}{15};z=-\frac{1}{3}\right.\Rightarrow H\left(\frac{2}{15};\frac{29}{15};-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow OH=\frac{\sqrt{870}}{15}.$$

Câu 71. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(3;1;0)$, B nằm trên mặt phẳng (Oxy) và có hoành độ dương, C nằm trên trục Oz và $H(2;1;1)$ là trực tâm của tam giác ABC. Toạ độ các điểm B, C thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

A. $B\left(\frac{-3+\sqrt{177}}{4};\frac{17-\sqrt{177}}{2};0\right), C\left(0;0;\frac{3-\sqrt{177}}{4}\right)$.

B. $B\left(\frac{-3-\sqrt{177}}{4};\frac{17+\sqrt{177}}{2};0\right), C\left(0;0;\frac{3+\sqrt{177}}{4}\right)$.

C. $B\left(\frac{-3+\sqrt{177}}{4};\frac{17-\sqrt{177}}{2};0\right), C\left(0;0;\frac{3+\sqrt{177}}{4}\right)$.

D. $B\left(\frac{-3+\sqrt{177}}{4};\frac{17+\sqrt{177}}{2};0\right), C\left(0;0;\frac{3-\sqrt{177}}{4}\right)$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $B(x;y;0)\in(Oxy), C(0;0;z)\in Oz$.

H là trực tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AH} \text{ đồng phẳng}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0\\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}\right].\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+z=0\\ 2x+y-7=0\\ 3x-3y+yz-z=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-3-\sqrt{177}}{4}; y=\frac{17+\sqrt{177}}{2}; z=\frac{3+\sqrt{177}}{4}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{-3-\sqrt{177}}{4};\frac{17+\sqrt{177}}{2};0\right), C\left(0;0;\frac{3+\sqrt{177}}{4}\right).$$

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|$ bằng:

A. $5\sqrt{10}$. **B.** $6\sqrt{10}$. **C.** $10\sqrt{6}$. **D.** $10\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Ta có trung điểm BD là $I(-1;-2;4)$, $BD=12$ và điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $A(a;b;0)$.

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases}AB^2=AD^2\\ AI^2=\left(\frac{1}{2}BD\right)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-3)^2+b^2+8^2=(a+5)^2+(b+4)^2\\ (a+1)^2+(b+2)^2+4^2=36\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}b=4-2a\\ (a+1)^2+(6-2a)^2=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=\frac{17}{5}\\ b=\frac{-14}{5}\end{cases} \Rightarrow$ A(1; 2; 0) hoặc $A\left(\frac{17}{5};\frac{-14}{5};0\right)$ (loại).

Với $A(1;2;0) \Rightarrow C(-3;-6;8)$.

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC, biết $A(5;3;-1)$, $B(2;3;-4)$, $C(3;1;-2)$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng:

A. $9-2\sqrt{6}$. **B.** $9-3\sqrt{6}$. **C.** $9+3\sqrt{6}$. **D.** $9+2\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $AC^2+BC^2=9+9=AB^2 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại C.

Suy ra: $r=\dfrac{S_{ABC}}{p}=\dfrac{\frac{1}{2}CA.CB}{\frac{1}{2}(AB+BC+CA)}=\dfrac{3.3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}}=9-3\sqrt{6}$

Câu 74. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3;0;0), N(m,n,0), P(0;0;p)$. Biết $MN=\sqrt{13}, \widehat{MON}=60^0$, thể tích tứ diện $OMNP$ bằng 3. Giá trị của biểu thức $A=m+2n^2+p^2$ bằng

A. 29. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 30.

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{OM}=(3;0;0), \overrightarrow{ON}=(m;n;0)\Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=3m$

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{ON}\right|\cos 60^0\Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{ON}\right|}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}=\dfrac{1}{2}$

$MN=\sqrt{(m-3)^2+n^2}=\sqrt{13}$

Suy ra $m=2; n=\pm 2\sqrt{3}$

$\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right].\overrightarrow{OP}=6\sqrt{3}p\Rightarrow V=\dfrac{1}{6}\left|6\sqrt{3}p\right|=3\Rightarrow p=\pm\sqrt{3}$

Vậy $A=2+2.12+3=29$.

Câu 75. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;3;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(1;1;-2)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính giá trị biểu thức $P=15a+30b+75c$

A. 48. **B.** 50. **C.** 52. **D.** 46.

Hướng dẫn giải

$I(x;y;z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Leftrightarrow AI=BI=CI, I\in(ABC)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AI^2=BI^2 \\ CI^2=BI^2 \\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AI}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ x=\frac{14}{15};\ y=\frac{61}{30};\ z=-\frac{1}{3} \right. \Rightarrow I\left(\frac{14}{15};\frac{61}{30};-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow P=50.$$