ĐÁP ÁN:

Câu 1. Ta có $\begin{cases} a>b \\ c>d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>b \\ -c<-d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>b \\ -d>-c \end{cases} \Rightarrow a-d>b-c.$ **Chọn C.**

Câu 2. Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- $\begin{cases} a>b \\ a>c \end{cases} \Rightarrow a+a>b+c \Rightarrow 2a>b+c \Rightarrow a>\dfrac{b+c}{2} \longrightarrow$ **A đúng.**
- $\begin{cases} a>b \\ a>c \end{cases} \Rightarrow a+a>b+c \Rightarrow a-c>b-a \longrightarrow$ **B đúng.**
- $a>b \Rightarrow a+(-c)>b+(-c) \Rightarrow a-c>b-c \longrightarrow$ **C đúng.**
- $a>b \Rightarrow -a<-b \Leftrightarrow c-a<c-b \longrightarrow$ **D sai. Chọn D.**

Câu 3. Ta có $\begin{cases} 0<a<b \\ 0<c<d \end{cases} \Rightarrow ac<bd.$ **Chọn C.**

Câu 4. Xét bất phương trình $a<b \qquad (*).$

Khi nhân cả hai vế của $(*)$ với $c,$ ta được $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} c>0 \\ a<b \Leftrightarrow ac<bc \end{cases} \\ \begin{cases} c<0 \\ a<b \Leftrightarrow ac>bc \end{cases} \end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 5. Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- $\begin{cases} 0<a<b \\ 0<c<d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<b \\ 0<\dfrac{1}{d}<\dfrac{1}{c} \end{cases} \Rightarrow$ Chưa đủ dữ kiện để so sánh $\dfrac{a}{c}, \dfrac{b}{d} \longrightarrow$ **A sai.**
- $\begin{cases} a>b>0 \\ c>d>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>b>0 \\ \dfrac{1}{d}>\dfrac{1}{c}>0 \end{cases} \Rightarrow$ Chưa đủ dữ kiện để so sánh $\dfrac{a}{c}, \dfrac{b}{d} \longrightarrow$ **B sai.**
- $\begin{cases} a<b \\ c<d \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{d} \longrightarrow$ **C sai** vì chưa thiếu điều kiện $a, b, c, d.$
- $\begin{cases} a>b>0 \\ c>d>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{b}>1 \\ 1>\dfrac{d}{c} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a}{b}>1>\dfrac{d}{c} \Leftrightarrow \dfrac{a}{b}>\dfrac{d}{c} \longrightarrow$ **D đúng. Chọn D.**

Câu 6. Từ giả thiết, ta có $a+2c>b+2c \Leftrightarrow a>b \Leftrightarrow 2a>2b.$ **Chọn C.**

Câu 7. Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} a+b<a \\ b-a>b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b<0 \\ -a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ b<0 \end{cases} \Rightarrow ab>0.$ **Chọn A.**

Câu 8. Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- $\dfrac{1}{a}-\sqrt{a}=\dfrac{1-a\sqrt{a}}{a}=\dfrac{\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}+a\right)}{a}>0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a}>\sqrt{a}, \forall a\in(0;1) \longrightarrow$ **A đúng.**
- $a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a^2-1}{a}=\dfrac{(a-1)(a+1)}{a}<0 \Leftrightarrow a<\dfrac{1}{a}, \forall a\in(0;1) \longrightarrow$ **B sai.**
- $a-\sqrt{a}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)<0 \Leftrightarrow a<\sqrt{a}, \forall a\in(0;1) \longrightarrow$ **C sai.**
- $a^3-a^2=a^2(a-1)<0 \Leftrightarrow a^3<a^2, \forall a\in(0;1) \longrightarrow$ **D sai.**

Chọn A.

Câu 9. Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- $\frac{a^2}{a^4+1}-\frac{1}{2}=\frac{2a^2-a^4-1}{2(a^4+1)}=-\frac{(a^2-1)^2}{2(a^4+1)}\le 0,\ \forall a\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{a^2}{a^4+1}\le\frac{1}{2}\longrightarrow$ **A sai.**
- $\frac{\sqrt{ab}}{ab+1}-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{ab}-ab-1}{2(ab+1)}=-\frac{(\sqrt{ab}-1)^2}{2(ab+1)}\le 0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{ab}}{ab+1}\le\frac{1}{2},\ \forall a,\ b>0\longrightarrow$ **B sai.**
- $\frac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+2}-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{a^2+1}-a^2-2}{2(a^2+2)}=-\frac{(\sqrt{a^2+1}-1)^2}{2(a^2+2)}\le 0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+2}\le\frac{1}{2},\ \forall a\longrightarrow$ **C đúng.**

Chọn C.

Câu 10. Giả sử $x<y\Leftrightarrow\frac{1+a}{1+a+a^2}<\frac{1+b}{1+b+b^2}\Leftrightarrow(1+a)(1+b+b^2)<(1+b)(1+a+a^2)$

$\Leftrightarrow 1+b+b^2+a+ab+ab^2<1+a+a^2+b+ab+a^2b$

$\Leftrightarrow b^2+ab^2<a^2+a^2b\Leftrightarrow(a^2-b^2)+ab(a-b)>0$

$\Leftrightarrow(a-b)(a+b+ab)>0$ luôn đúng với mọi $a>b>0$. Vậy $x<y$. **Chọn B.**

Câu 11. Ta có $f(x)=x+\frac{2}{x-1}=x-1+\frac{2}{x-1}+1\ge 2\sqrt{(x-1).\frac{2}{x-1}}+1=2\sqrt{2}+1.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x-1=\frac{2}{x-1}\end{cases}\Leftrightarrow x=1+\sqrt{2}.$ Vậy $m=2\sqrt{2}+1.$ **Chọn B.**

Câu 12. Ta có $f(x)=\frac{x^2+4+1}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\ge 2\sqrt{\sqrt{x^2+4}.\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}}=2.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x^2+4}=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\Leftrightarrow x^2=-3$ (vô lý).

Vậy hàm số đã cho không có giá trị nhỏ nhất. **Chọn D.**

Câu 13. Ta có $f(x)=\frac{x^2+2x+1+1}{x+1}=\frac{(x+1)^2+1}{x+1}=x+1+\frac{1}{x+1}.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x+1+\frac{1}{x+1}\ge 2\sqrt{(x+1).\frac{1}{x+1}}=2.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x+1=\frac{1}{x+1}\end{cases}\Leftrightarrow x=0.$ Vậy $m=2.$ **Chọn C.**

Câu 14. Ta có $f(x)=\frac{(x+2)(x+8)}{x}=\frac{x^2+10x+16}{x}=x+\frac{16}{x}+10.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x+\frac{16}{x}\ge 2\sqrt{x.\frac{16}{x}}=8\Rightarrow f(x)\ge 18.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x=\frac{16}{x}\end{cases}\Leftrightarrow x=4.$ Vậy $m=18.$ **Chọn B.**

Câu 15. Ta có $f(x)-4=\frac{4}{x}+\frac{x}{1-x}-4=\frac{4}{x}-\frac{4x}{x}+\frac{x}{1-x}=\frac{4(1-x)}{x}+\frac{x}{1-x}.$

Vì $x\in(0;1)\Rightarrow \dfrac{x}{1-x}>0$ nên theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$f(x)-4=\frac{4(1-x)}{x}+\frac{x}{1-x}\ge 2\sqrt{\frac{4(1-x)}{x}.\frac{x}{1-x}}=4\Leftrightarrow f(x)\ge 8.$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}1>x>0\\ \dfrac{4(1-x)}{x}=\dfrac{x}{1-x}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$. Vậy $m=8$. **Chọn D.**

Câu 16. Cách 1. Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{2}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Mặt khác $x(1-x)\le\dfrac{(x+1-x)^2}{4}=\dfrac{1}{4}\longrightarrow\sqrt{x(1-x)}\le\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\ge 2\Rightarrow f(x)\ge 4.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}1>x>0\\ x=1-x\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$. Vậy $m=4$. **Chọn B.**

Cách 2. Ta có $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{1-x+x}{x}+\dfrac{1-x+x}{1-x}=\dfrac{1-x}{x}+\dfrac{x}{1-x}+2.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\dfrac{1-x}{x}+\dfrac{x}{1-x}\ge 2\sqrt{\dfrac{1-x}{x}.\dfrac{x}{1-x}}=2\Rightarrow f(x)\ge 4.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}1>x>0\\ \dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1-x}{x}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}.$

Câu 17. Ta có $f(x)=\dfrac{x^2+32}{4(x-2)}=\dfrac{x^2-4+36}{4(x-2)}=\dfrac{x+2}{4}+\dfrac{9}{x-2}=\dfrac{x-2}{4}+\dfrac{9}{x-2}+1.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\dfrac{x-2}{4}+\dfrac{9}{x-2}\ge 2\sqrt{\dfrac{x-2}{4}.\dfrac{9}{x-2}}=3\Rightarrow f(x)\ge 3+1=4.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\ \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{9}{x-2}\end{cases}\Leftrightarrow x=8.$ Vậy $m=4$. **Chọn C.**

Câu 18. Ta có $f(x)=\dfrac{2x^3+4}{x}=2x^2+\dfrac{4}{x}=2x^2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x}.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $2x^2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x}\ge 3\sqrt[3]{2x^2.\dfrac{2}{x}.\dfrac{2}{x}}=3\sqrt[3]{8}=6.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ 2x^2=\dfrac{2}{x}\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$ Vậy $m=6$. **Chọn D.**

Câu 19. Ta có $f(x)=\dfrac{x^4+3}{x}=x^3+\dfrac{3}{x}=x^3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x^3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\ge 4\sqrt[4]{x^3.\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{x}}=4\Rightarrow f(x)\ge 4.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^3=\dfrac{1}{x}\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$ Vậy $m=4$. **Chọn A.**

Câu 20. Áp dụng bất đẳng thức hệ quả của Côsi $ab\le\dfrac{(a+b)^2}{4}$, ta được

$f(x)=3(2x+1)(5-2x)\le 3.\dfrac{(2x+1+5-2x)^2}{4}=27\Rightarrow f(x)\le 27.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{5}{2}\\ 2x+1=5-2x\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$ Vậy $M=27.$ **Chọn C.**

Câu 21. Ta có $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1+1}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2+1}.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\left(\sqrt{x-1}\right)^2+1\ge 2\sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2.1}=2\sqrt{x-1}.$

$\longrightarrow f(x)\le \dfrac{\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{2}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=2.$ Vậy $M=\dfrac{1}{2}.$ **Chọn B.**

Câu 22. Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x^2+4\ge 2\sqrt{x^2.4}=4x$

$\longrightarrow f(x)\le \dfrac{x}{4x}=\dfrac{1}{4}.$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=2.$ Vậy $M=\dfrac{1}{4}.$ **Chọn A.**

Câu 23. Ta có $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}=\dfrac{x}{x^2+2x+1}.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x^2+1\ge 2\sqrt{x^2.1}=2x\longrightarrow x^2+2x+1\ge 4x$

$\longrightarrow f(x)\le \dfrac{x}{4x}=\dfrac{1}{4}.$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1.$ Vậy $M=\dfrac{1}{4}.$ **Chọn B.**

Câu 24. Hàm số xác định khi $\begin{cases}x+3\ge 0\\ 6-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -3\le x\le 6$ nên TXĐ $\mathrm{D}=[-3;6].$

Ta có $f^2(x)=9+2\sqrt{(x+3)(6-x)}.$

- Vì $\sqrt{(3+x)(6-x)}\ge 0,\ \forall x\in[-3;6]$ nên suy ra $f^2(x)\ge 9\longrightarrow f(x)\ge 3.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=6.$ Vậy $m=3.$

- Lại có $2\sqrt{(3+x)(6-x)}\le 3+x+6-x=9$ nên suy ra $f^2(x)\le 18\longrightarrow f(x)\le 3\sqrt{2}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x+3=6-x\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}.$ Vậy $M=3\sqrt{2}.$

Vậy $m=3,\ M=3\sqrt{2}.$ **Chọn B.**

Câu 25. Hàm số xác định khi $\begin{cases}x-4\ge 0\\ 8-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 4\le x\le 8$ nên TXĐ $\mathrm{D}=[4;8].$

- Ta có $f^2(x)=3x-8+4\sqrt{(x-4)(8-x)}=3(x-4)+4\sqrt{(x-4)(8-x)}+4.$

Vì $\begin{cases}x-4\ge 0\\ \sqrt{(x-4)(8-x)}\ge 0\end{cases},\ \forall x\in[4;8]$ nên suy ra $f^2(x)\ge 4\longrightarrow f(x)\ge 4.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=4.$ Vậy $m=2.$

- Với $x\in[4;8],$ áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có
- $x-\dfrac{4}{5}=x-4+\dfrac{16}{5}\ge 2\sqrt{(x-4).\dfrac{16}{5}}=\dfrac{8\sqrt{x-4}}{\sqrt{5}}.$ (1)

- $\frac{44}{5}-x=8-x+\frac{4}{5}\geq 2\sqrt{(8-x).\frac{4}{x}}=\frac{4\sqrt{8-x}}{\sqrt{5}}.$ (2)

Lấy $(1)+(2)$ theo vế, ta được $\frac{8\sqrt{x-4}+4\sqrt{8-x}}{\sqrt{5}}\leq x-\frac{4}{5}+\frac{44}{5}-x=8.$

Suy ra $\frac{8\sqrt{x-4}+4\sqrt{8-x}}{\sqrt{5}}\leq 8\Leftrightarrow\frac{4f(x)}{\sqrt{5}}\leq 8\Leftrightarrow f(x)\leq 2\sqrt{5}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac{36}{5}$. Vậy $M=2\sqrt{5}$.

Vậy $m=2,\ M=2\sqrt{5}$. **Chọn C.**

Câu 26. Hàm số xác định khi $\begin{cases}7-2x\geq 0\\3x+4\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{4}{3}\leq x\leq\frac{7}{2}$ nên TXĐ $D=\left[-\frac{4}{3};\frac{7}{2}\right]$.

Ta có $y^2=\left(\sqrt{7-2x}+\sqrt{3x+4}\right)^2=7-2x+2\sqrt{(7-2x)(3x+4)}+3x+4$

$=x+11+2\sqrt{(7-2x)(3x+4)}=\frac{1}{3}(3x+4)+2\sqrt{(7-2x)(3x+4)}+\frac{29}{3}.$

Vì $\begin{cases}3x+4\geq 0\\\sqrt{(7-2x)(3x+4)}\geq 0\end{cases},\ \forall x\in\left[-\frac{4}{3};\frac{7}{2}\right]$ nên suy ra $f^2(x)\geq\frac{29}{3}\longrightarrow f(x)\geq\frac{\sqrt{87}}{3}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}$. Vậy $m=\frac{\sqrt{87}}{3}$. **Chọn D.**

Câu 27. Ta có $f^2(x)=\left(x+\sqrt{8-x^2}\right)^2=x^2+2x\sqrt{8-x^2}+8-x^2=8+2x\sqrt{8-x^2}.$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $2x\sqrt{8-x^2}\leq x^2+\left(\sqrt{8-x^2}\right)^2=8$

$\longrightarrow f^2(x)=8+2x\sqrt{8-x^2}\leq 8+8=16\longrightarrow f(x)\leq 4.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\left(\sqrt{8-x^2}\right)^2\\2x\sqrt{8-x^2}=8\end{cases}\Leftrightarrow x=2$. Vậy $M=4$. **Chọn D.**

Câu 28. Ta có $x^2+y^2+xy=3\Leftrightarrow(x+y)^2-3=xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}$.

Suy ra $(x+y)^2\leq 4\Leftrightarrow -2\leq x+y\leq 2$. **Chọn C.**

Câu 29. Ta có $\begin{cases}x^2+y^2+xy=1\Leftrightarrow 1-3xy=(x-y)^2\geq 0\Rightarrow xy\leq\frac{1}{3}\\x^2+y^2+xy=1\Leftrightarrow 1+xy=(x+y)^2\geq 0\Rightarrow xy\geq -1\end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 30. Với mọi x,y ta có $(x+y)^2\geq 4xy$.

Suy ra $(x+y)^3+(x+y)^2\geq(x+y)^3+4xy\geq 2$ hay $(x+y)^3+(x+y)^2\geq 2\Leftrightarrow x+y\geq 1$.

Chọn B.

Câu 31. Ta có $x^2+y^2=x+y+xy$

$\Leftrightarrow x+y=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy\geq(x+y)^2-\frac{3}{4}(x+y)^2=\frac{1}{4}(x+y)^2.$

Suy ra $x+y\geq\frac{1}{4}(x+y)^2\Leftrightarrow 0\leq x+y\leq 4$. **Chọn D.**

Câu 32. Từ giả thiết, ta có $3(x+y)-4=x^2+y^2\geq\frac{(x+y)^2}{2}$

$\Leftrightarrow(x+y)^2-6(x+y)+8\leq 0\Leftrightarrow 2\leq x+y\leq 4$. **Chọn D.**

Câu 33. Ta có $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1.\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)=5+\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}\geq 5+2\sqrt{\frac{4x}{y}.\frac{y}{x}}=9.$

Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{1}{3};\ y=\frac{2}{3}$. **Chọn C.**

Câu 34. Từ giả thiết, ta có $xy(x+y)=x+y+3xy$. (*)

Vì $x>0,\ y>0$ nên $x+y>0$. Do đó (*) $\Leftrightarrow x+y=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+3\geq\frac{4}{x+y}+3$

$\Leftrightarrow(x+y)^2-3(x+y)-4\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y\leq -1\\x+y\geq 4\end{array}\right.\Leftrightarrow x+y\geq 4$ (do $x,y>0$). **Chọn D.**

Câu 35. Ta có $x^4+y^4\geq 2x^2y^2$, kết hợp với giả thiết ta được $xy+2\geq 2x^2y^2+\frac{1}{xy}$.

Đặt $xy=t>0$, ta được $t+2\geq 2t^2+\frac{1}{t}\Leftrightarrow 2t^3-t^2-(2t-1)\leq 0$

$\Leftrightarrow(t+1)(t-1)(2t-1)\leq 0\Leftrightarrow(t-1)(2t-1)\leq 0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leq t\leq 1$. **Chọn A.**

Câu 36. Giả thiết $\Leftrightarrow\frac{(a^3+b^3)(a+b)}{ab}=(1-a)(1-b)$. (*)

● $\frac{(a^3+b^3)(a+b)}{ab}=\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)(a+b)\geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{ab}=4ab.$ (1)

● $(1-a)(1-b)=1-(a+b)+ab\leq 1-2\sqrt{ab}+ab.$ (2)

Từ (1), (2) và kết hợp với (*), ta được

$4ab\leq 1-2\sqrt{ab}+ab\Leftrightarrow 3ab+2\sqrt{ab}-1\leq 0\Rightarrow 0<ab\leq\frac{1}{9}$. **Chọn A.**

Câu 37. Ta có $4xy=x+y\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow xy\geq\frac{1}{4}$.

Do $x,y\in[0;1]$, suy ra $(1-x)(1-y)\geq 0\Leftrightarrow 1-(x+y)+xy\geq 0$. (*)

Kết hợp (*) và giả thiết, ta được $1-4xy+xy\geq 0\Rightarrow xy\leq\frac{1}{3}$. **Chọn D.**

Câu 38. Từ giả thiết, ta có $x+2y=xy=\frac{1}{2}.x.2y\leq\frac{1}{2}.\frac{(x+2y)^2}{4}$

$\Leftrightarrow(x+2y)[(x+2y)-8]\geq 0\Leftrightarrow x+2y\geq 8$ (do $x,y>0$). **Chọn C.**

Câu 39. Từ giả thiết $x+y+xy\geq 7\Leftrightarrow 2(x+1)(y+1)\geq 16.$

Ta có $16\leq 2(x+1)(y+1)=(x+1)(2y+2)\leq\left(\frac{1+x+2y+2}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow(x+2y+3)^2\geq 64\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2y\geq 5\\x+2y\leq -11\end{array}\right.\Leftrightarrow x+2y\geq 5$ (do $x,y>0$). **Chọn B.**

Câu 40. Ta có $6(x+1)(y+1)=(2x+2)(3y+3)\leq\frac{(2x+2+3y+3)^2}{4}\leq\frac{(7+5)^2}{4}\leq 36$.

Suy ra $x+y+xy\le 5$. **Chọn B.**

Câu 41. Từ giả thiết, ta có $16=\left(x^2+4\right)+2y\ge 4x+2y\ge 2\sqrt{4x.2y}$.

Suy ra $xy\le 8$. Dấu "=" xảy ra khi $x=2;\ y=4$. **Chọn C.**

Câu 42. Ta có $F=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}=\dfrac{x^2-2xy+y^2+2xy}{x-y}=\dfrac{(x-y)^2+2.1000}{x-y}=x-y+\dfrac{2.1000}{x-y}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $F=x-y+\dfrac{2.1000}{x-y}\ge 2\sqrt{(x-y).\dfrac{2.1000}{x-y}}=40\sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}xy=1000\\ x-y=\dfrac{2.1000}{x-y}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=1000\\ x-y=20\sqrt{5}\end{cases}$.

Vậy $F_{\min}=4\sqrt{5}$ khi $\begin{cases}ab=1000\\ a-b=20\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=4000\Rightarrow\dfrac{a^2+b^2}{1000}=4$.

Chọn C.

Câu 43. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số thực dương, ta có

$\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2x}\ge 2\sqrt{\dfrac{x}{2}.\dfrac{1}{2x}}=2.\dfrac{1}{\sqrt{4}}=1$ và $\dfrac{y}{2}+\dfrac{2}{y}\ge 2\sqrt{\dfrac{y}{2}.\dfrac{2}{y}}=2$.

Khi đó $F=x+y+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{x+y}{2}+\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2x}\right)+\left(\dfrac{y}{2}+\dfrac{2}{y}\right)\ge\dfrac{3}{2}+1+2=4\dfrac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=3\\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2x};\ \dfrac{y}{2}=\dfrac{2}{y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$. Vậy $F_{\min}=4\dfrac{1}{2}$. **Chọn A.**

Câu 44. Ta có $F=x+\dfrac{1}{y(x-8y)}=(x-8y)+8y+\dfrac{1}{y(x-8y)}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $F\ge 3\sqrt[3]{(x-8y).8y.\dfrac{1}{y(x-8y)}}=3\sqrt[3]{8}=6$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x-8y=8y=\dfrac{1}{y(x-8y)}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 45. Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 2\\ y\ge -3\end{cases}$, suy ra $x+y+1\ge 0$.

- Ta có $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)$.

$=2\sqrt{x-2}+2\sqrt{y+3}\le\dfrac{4+x-2}{2}+\dfrac{4+y+3}{2}=\dfrac{x+y+9}{2}$

Suy ra $x+y+1\le\dfrac{x+y+9}{2}\Leftrightarrow x+y\le 7$.

- Lại có $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)$

$\Leftrightarrow(x+y+1)^2=4\left(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}\right)\ge 4(x+y+1)$ (do $2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}\ge 0$)

Suy ra $(x+y+1)^2\ge 4(x+y+1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y+1\le 0\\ x+y+1\ge 4\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+y+1=0\\ x+y+1\ge 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y=-1\\ x+y\ge 3\end{array}\right.$.

Chọn C.

Câu 46. Do hàm số $f(x)=ax^2+bx+c\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}\longrightarrow 4ac\ge b^2.$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $F=\dfrac{4a+c}{b}\ge\dfrac{2\sqrt{4ac}}{b}\ge\dfrac{2\sqrt{b^2}}{b}=\dfrac{2b}{b}=2.$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}c=4a\\ b^2=4ac\end{cases}\Leftrightarrow b=c=4a.$ **Chọn B.**

Câu 47. Từ giả thiết suy ra $a^2+b^2+c^2\le 4.$

Ta có $4=a^2+b^2+c^2+abc=a^2+b^2+c^2+\sqrt{a^2b^2c^2}.$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}{27}\ge a^2b^2c^2.$

Từ đó suy ra $4\le a^2+b^2+c^2+\sqrt{\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}{27}}$ hay $\sqrt{\dfrac{S^3}{27}}\ge 4-S\Leftrightarrow 3\le S\le 4.$ **Chọn D.**

Câu 48. Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$x^2+\dfrac{y}{zx}+\dfrac{z}{xy}\ge 3.\sqrt[3]{x^2.\dfrac{y}{zx}.\dfrac{z}{xy}}=3;\quad y^2+\dfrac{x}{yz}+\dfrac{z}{xy}\ge 3;\quad z^2+\dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{zx}\ge 3.$

Cộng từng vế của ba bất đẳng thức trên, ta được $x^2+y^2+z^2+2\left(\dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{zx}+\dfrac{z}{xy}\right)\ge 9.$

Suy ra $P\ge\dfrac{9}{2}$. Khi $x=y=z=1$ thì $P=\dfrac{9}{2}.$ **Chọn C.**

Câu 49. Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$x^3+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}\ge 4x$ hay $x^3+3\sqrt[3]{x}\ge 4x.$

Tương tự: $y^3+3\sqrt[3]{y}\ge 4y$ và $z^3+3\sqrt[3]{z}\ge 4z.$

Suy ra $P=x^3+y^3+z^3+3\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}\right)\ge 4(x+y+z)=12.$

Khi $x=y=z=1$ thì $P=12.$ **Chọn A.**

Câu 50. Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$\sqrt{(x+y).\dfrac{4}{3}}\le\dfrac{x+y+\dfrac{4}{3}}{2};\ \sqrt{(y+z).\dfrac{4}{3}}\le\dfrac{y+z+\dfrac{4}{3}}{2}$ và $\sqrt{(z+x).\dfrac{4}{3}}\le\dfrac{z+x+\dfrac{4}{3}}{2}.$

Suy ra $\sqrt{(x+y).\dfrac{4}{3}}+\sqrt{(y+z).\dfrac{4}{3}}+\sqrt{(z+x).\dfrac{4}{3}}\le x+y+z+2=4.$

Do đó $P=\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\ge 2\sqrt{3}.$ Khi $x=y=z=\dfrac{2}{3}$ thì $P=2\sqrt{3}.$ **Chọn C.**

BÀI 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Câu 1. Bất phương trình xác định khi $\begin{cases}2-x\ge 0\\ 1-2x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ x\le\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\le\dfrac{1}{2}.$ **Chọn C.**

Câu 2. Bất phương trình xác định khi $\begin{cases}x+5>0\\ 4-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-5\\ x\le 4\end{cases}\Leftrightarrow -5<x\le 4.$ **Chọn B.**

Câu 3. Bất phương trình xác định khi $\begin{cases} \dfrac{x+1}{(x-2)^2} \ge 0 \\ x-2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x-2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x \ne 2 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 4. Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-m \ge 0 \\ 6-2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge m \\ x \le 3 \end{cases}$.

- Nếu $m=3$ thì tập xác định của hàm số là $D=\{3\}$.
- Nếu $m>3$ thì tập xác định của hàm số là $D=\varnothing$.
- Nếu $m<3$ thì tập xác định của hàm số là $D=[m;3]$. **Chọn B.**

Câu 5. Hàm số xác định khi $\begin{cases} m-2x \ge 0 \\ x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{m}{2} \\ x \ge -1 \end{cases}$.

- Nếu $\dfrac{m}{2}=-1 \Leftrightarrow m=-2$ thì tập xác định của hàm số là $\mathrm{D}=\{-1\}$.
- Nếu $\dfrac{m}{2}<-1 \Leftrightarrow m<-2$ thì tập xác định của hàm số là $\mathrm{D}=\varnothing$.
- Nếu $\dfrac{m}{2}>-1 \Leftrightarrow m>-2$ thì tập xác định của hàm số là $\mathrm{D}=\left[-1;\dfrac{m}{2}\right]$. **Chọn D.**

Câu 6. Điều kiện: $x \ne 2$. Bất phương trình tương đương với: $2x<3 \Leftrightarrow x<\dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn điều kiện). **Chọn D.**

Câu 7. Điều kiện: $x \ne 2$. Bất phương trình tương đương với: $2x<5 \Leftrightarrow x<\dfrac{5}{2}$ kết hợp với điều kiện ta có $x<\dfrac{5}{2}$ và $x \ne 2$. **Chọn B.**

Câu 8. Nếu ta cộng $\dfrac{1}{x-3}$ vào hai vế bất phương trình $2x-1 \ge 0$ thì điều kiện của bất phương trình sẽ thay đổi suy ra đáp án A sai.

Tương tự nếu ta nhân hoặc chia hai vế bất phương trình đã cho với $\sqrt{x-2018}$ thì điều kiện của bất phương trình ban đầu cũng sẽ thay đổi suy ra đáp án C và D sai.

Chọn B.

Câu 9. Ta xét từng bất phương trình trong đáp án A:

$x-2 \le 0 \Leftrightarrow x \le 2.$

$x^2(x-2) \le 0 \Leftrightarrow x \le 2.$

Cả hai bất phương trình có cùng tập nghiệm nên chúng tương đương. **Chọn A.**

Câu 10. Bất phương trình $x+5>0 \Leftrightarrow x>-5$.

Bất phương trình $(x-1)^2(x+5)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 1 \\ x>-5 \end{cases}$. Đáp án A sai.

Bất phương trình $x^2(x+5)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0 \\ x>-5 \end{cases}$. Đáp án B sai.

Bất phương trình $\sqrt{x+5}(x+5)>0 \Leftrightarrow x>-5$. Đáp án C đúng. **Chọn C.**

Câu 11. Bất phương trình $(x+1)\sqrt{x} \le 0$ có điều kiện $x \ge 0 \to (x+1)\sqrt{x} \le 0 \Leftrightarrow x=0$.

Ta có: $\sqrt{x(x+1)^2} \le 0 \Leftrightarrow x(x+1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$. Đáp án A sai.

Ta có: $(x+1)\sqrt{x}<0$ vô nghiệm vì từ điều kiện $x\geq 0\Rightarrow (x+1)\sqrt{x}\geq 0$. Đáp án B sai.

Ta có: $(x+1)^2\sqrt{x}\leq 0\Leftrightarrow x=0$. Đáp án C đúng. **Chọn C.**

Câu 12. Bất phương trình $\sqrt{x-1}\geq x\longrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ x-1\geq x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ x^2-x+1\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Ta có: $(1-2x)\sqrt{x-1}\geq x(1-2x)\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ \sqrt{x-1}\leq x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ x^2-x+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 1$. Đáp án A sai.

Ta có: $(2x+1)\sqrt{x-1}\geq x(2x+1)\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ \sqrt{x-1}\geq x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ x^2-x+1\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$. Đáp án B đúng.

Chọn B.

Câu 13. Phương pháp trắc nghiệm: Thay lần lượt từng đáp án vào hai phương trình.

- Thay $a=1$, ta được $\begin{cases}(a+1)x-a+2>0\longrightarrow 2x+1>0\leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2}\\ (a-1)x-a+3>0\longrightarrow 0x+2>0\leftrightarrow x\in\mathbb{R}\end{cases}$. Không thỏa.

- Thay $a=5$, ta được $\begin{cases}(a+1)x-a+2>0\longrightarrow 6x-3>0\leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}\\ (a-1)x-a+3>0\longrightarrow 4x-2>0\leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 14. Viết lại $(m+2)x\leq m+1\quad(1)$ và $(3m+1)x\leq 3m-1\quad(2)$.

- Thay $m=-3$, ta được $\begin{cases}(m+2)x\leq m+1\longrightarrow -x\leq -2\leftrightarrow x\geq 2\\ (3m+1)x\leq 3m-1\longrightarrow -8x\leq -10\leftrightarrow x\geq\dfrac{5}{4}\end{cases}$. Không thỏa mãn.

- Thay $m=-2$ thì hệ số của x ở (1) bằng 0, hệ số của x ở (2) khác 0. Không thỏa mãn.

- Thay $m=-1$ thì hệ số của x ở (1) dương, hệ số của x ở (2) âm. Suy ra nghiệm của hai bất phương trình ngược chiều. Không thỏa.

Đến đây dùng phương pháp loại trừ thì chỉ còn đáp án D.

- Thay $m=3$, ta được $\begin{cases}(m+2)x\leq m+1\longrightarrow 5x\leq 4\leftrightarrow x\leq\dfrac{4}{5}\\ (3m+1)x\leq 3m-1\longrightarrow 10x\leq 8\leftrightarrow x\leq\dfrac{4}{5}\end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 15.

- Thay $m=1$, thì hệ số của x ở (1) dương, hệ số của x ở (2) dương. Suy ra nghiệm của hai bất phương trình ngược chiều. Không thỏa.

- Thay $m=0$, ta được $\begin{cases}(m+3)x\geq 3m-6\longrightarrow 3x\geq -6\leftrightarrow x\geq -2\\ (2m-1)x\leq m+2\longrightarrow -x\leq 2\leftrightarrow x\geq -2\end{cases}$. Ta thấy thỏa mãn nhưng chưa đủ kết luận là đáp án B vì trong đáp án D cũng có $m=0$. Ta thử tiếp $m=4$.

- Thay $m=4$, thì hệ số của x ở (1) dương, hệ số của x ở (2) dương. Suy ra nghiệm của hai bất phương trình ngược chiều. Không thỏa mãn.

Vậy với $m=0$ thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 16.

- Nếu $a>0$ thì $ax+b>0\Leftrightarrow x>-\dfrac{b}{a}$ nên $S=\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right)\neq\varnothing$.

- Nếu $a<0$ thì $ax+b>0 \Leftrightarrow x<-\frac{b}{a}$ nên $S=\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)\neq\varnothing$.
- Nếu $a=0$ thì $ax+b>0$ có dạng $0x+b>0$
- Với $b>0$ thì $S=\mathbb{R}$.
- Với $b\leq 0$ thì $S=\varnothing$. **Chọn D.**

Câu 17.

- Nếu $a>0$ thì $ax+b>0 \Leftrightarrow x>-\frac{b}{a}$ nên $S=\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)\neq\varnothing$.
- Nếu $a<0$ thì $ax+b>0 \Leftrightarrow x<-\frac{b}{a}$ nên $S=\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)\neq\varnothing$.
- Nếu $a=0$ thì $ax+b>0$ có dạng $0x+b>0$
- Với $b\leq 0$ thì $S=\varnothing$.
- Với $b>0$ thì $S=\mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 18.

- Nếu $a>0$ thì $ax+b\leq 0 \Leftrightarrow x\leq-\frac{b}{a}$ nên $S=\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right]\neq\varnothing$.
- Nếu $a<0$ thì $ax+b\leq 0 \Leftrightarrow x\geq-\frac{b}{a}$ nên $S=\left[-\frac{b}{a};+\infty\right)\neq\varnothing$.
- Nếu $a=0$ thì $ax+b\leq 0$ có dạng $0x+b\leq 0$
- Với $b\leq 0$ thì $S=\mathbb{R}$.
- Với $b>0$ thì $S=\varnothing$. **Chọn A.**

Câu 19. Bất phương trình $5x-1\geq\frac{2x}{5}+3 \Leftrightarrow 25x-5\geq 2x+15 \Leftrightarrow 23x\geq 20 \Leftrightarrow x\geq\frac{20}{23}$.

Chọn D.

Câu 20. Bất phương trình $\frac{3x+5}{2}-1\leq\frac{x+2}{3}+x \Leftrightarrow 9x+15-6\leq 2x+4+6x \Leftrightarrow x\leq -5$.

Vì $x\in\mathbb{Z}, -10<x\leq -5$ nên có 5 nghiệm nguyên. **Chọn B.**

Câu 21. Bất phương trình $\left(1-\sqrt{2}\right)x<3-2\sqrt{2} \Leftrightarrow x>\frac{3-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{1-\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$.

Chọn B.

Câu 22. Bất phương trình $x(2-x)\geq x(7-x)-6(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x-x^2\geq 7x-x^2-6x+6 \Leftrightarrow x\geq 6 \xrightarrow[x\in\mathbb{Z}]{x\in[-10;10]} x\in\{6;7;8;9;10\}$. **Chọn D.**

Câu 23. Bất phương trình $(2x-1)(x+3)-3x+1\leq(x-1)(x+3)+x^2-5$ tương đương với $2x^2+5x-3-3x+1\leq x^2+2x-3+x^2-5 \Leftrightarrow 0.x\leq -6 \Leftrightarrow x\in\varnothing \longrightarrow S=\varnothing$. **Chọn D.**

Câu 24. Bất phương trình $5(x+1)-x(7-x)>-2x$ tương đương với:

$5x+5-7x+x^2>-2x \Leftrightarrow x^2+5>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R} \longrightarrow S=\mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 25. Bất phương trình $\left(x+\sqrt{3}\right)^2\geq\left(x-\sqrt{3}\right)^2+2$ tương đương với:

$x^2+2\sqrt{3}x+3\geq x^2-2\sqrt{3}x+3+2 \Leftrightarrow 4\sqrt{3}x\geq 2 \Leftrightarrow x\geq\frac{\sqrt{3}}{6} \longrightarrow S=\left[\frac{\sqrt{3}}{6};+\infty\right)$. **Chọn A.**

Câu 26. Bất phương trình tương đương $x^2-2x+1+x^2-6x+9+15<x^2+x^2-8x+16$

$\Leftrightarrow 0.x < -9$: vô nghiệm $\longrightarrow S = \varnothing$. **Chọn D.**

Câu 27. Điều kiện: $x \geq 0$.

Bất phương trình tương đương

$x + \sqrt{x} < 2x - 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 3 \Leftrightarrow -x < -3 \Leftrightarrow x > 3 \longrightarrow S = (3; +\infty)$

Chọn B.

Câu 28. Điều kiện: $x \geq 2$. Bất phương trình tương đương $x \leq 2 \longrightarrow x = 2$. **Chọn C.**

Câu 29. Điều kiện: $x > 4$. Bất phương trình tương đương :

$x - 2 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 6 \Rightarrow 4 < x \leq 6, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 5; x = 6 \longrightarrow S = 5 + 6 = 11$. **Chọn B.**

Câu 30. Điều kiện: $x \geq 2$.

Bất phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2} = 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x \geq 3 \end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 31. Rõ ràng nếu $m \neq 1$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Xét $m = 1$ bất phương trình trở thành $0x > 3$: vô nghiệm. **Chọn C.**

Câu 32. Bất phương trình tương đương với $(m^2 - 3m + 2)x < 2 - m$.

Rõ ràng nếu $m^2 - 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với $m = 1$ bất phương trình trở thành $0x < 1$: vô nghiệm.

Với $m = 2$ bất phương trình trở thành $0x < 0$: vô nghiệm.

Chọn C.

Câu 33. Rõ ràng nếu $m^2 - m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với $m = 1$ bất phương trình trở thành $0x < 1$: nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Với $m = 0$ bất phương trình trở thành $0x < 0$: vô nghiệm.

Chọn B.

Câu 34. Bất phương trình tương đương với $(m^2 - m - 6)x < -2 - m$.

Rõ ràng nếu $m^2 - m - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 3 \end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với $m = -2$ bất phương trình trở thành $0x < 0$: vô nghiệm.

Với $m = 3$ bất phương trình trở thành $0x < -5$: vô nghiệm.

Suy ra $S = \{-2; 3\} \longrightarrow -2 + 3 = 1$. **Chọn B.**

Câu 35. Bất phương trình tương đương với $(m-1)x \leq 2 - m$.

Rõ ràng nếu $m \neq 1$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Xét $m = 1$ bất phương trình trở thành $0x \leq 1$: nghiệm đúng với mọi x.

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn A.**

Câu 36. Bất phương trình tương đương với $(m+3)^2 x \geq m - 3$.

Với $m = -3$ bất phương trình trở thành $0x \geq -6$: nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chọn D.

Câu 37. Bất phương trình tương đương với $(4m^2 - 5m - 9)x \geq 4m^2 - 12m$.

Dễ dàng thấy nếu $4m^2-5m-9\neq 0\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -1 \\ m\neq \dfrac{9}{4}\end{cases}$ thì bất phương trình không thể có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Với $m=-1$ bất phương trình trở thành $0x\geq 16$: vô nghiệm.

Với $m=\frac{9}{4}$ bất phương trình trở thành $0x\geq -\frac{27}{4}$: nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m=\frac{9}{4}$. **Chọn B.**

Câu 38. Bất phương trình tương đương với $(m^2-9)x\geq m^2+3m$.

Dễ dàng thấy nếu $m^2-9\neq 0\Leftrightarrow m\neq \pm 3$ thì bất phương trình không thể có nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

Với $m=3$ bất phương trình trở thành $0x>18$: vô nghiệm

Với $m=-3$ bất phương trình trở thành $0x\geq 0$: nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m=-3$. **Chọn B.**

Câu 39. Để ý rằng, bất phương trình $ax+b>0$ (hoặc $<0,\ \geq 0,\ \leq 0$)

- Vô nghiệm $(S=\varnothing)$ hoặc có tập nghiệm là $S=\mathbb{R}$ thì chỉ xét riêng $a=0$.
- Có tập nghiệm là một tập con của $\mathbb{R}$ thì chỉ xét $a>0$ hoặc $a<0$.

Bất phương trình viết lại $(m-2)x>4-m^2$.

Xét $m-2>0\leftrightarrow m>2$, bất phương trình

$\Leftrightarrow x>\frac{4-m^2}{m-2}=-m-2\to S=(-m-2;+\infty)$. **Chọn C.**

Câu 40. Bất phương trình viết lại $(m-1)x\geq m^2-1$.

Xét $m-1>0\leftrightarrow m>1$, bất phương trình $\Leftrightarrow x\geq \frac{m^2-1}{m-1}=m+1\longrightarrow S=[m+1;+\infty)$.

Xét $m-1<0\leftrightarrow m<1$, bất phương trình $\Leftrightarrow x\leq \frac{m^2-1}{m-1}=m+1\longrightarrow S=(-\infty;m+1]$.

Chọn C.

Câu 41. Bất phương trình viết lại $(m-2)x<m-3$.

- Rõ ràng $m-2\neq 0\leftrightarrow m\neq 2$ thì bất phương trình có nghiệm.
- Xét $m-2=0\leftrightarrow m=2$, bất phương trình trở thành $0x<-1$ (vô lí).

Vậy bất phương trình có nghiệm khi $m\neq 2$. **Chọn A.**

Câu 42. Bất phương trình viết lại $(m+1)x<m+3$.

- Rõ ràng $m+1\neq 0$ thì bất phương trình có nghiệm.
- Xét $m+1=0\leftrightarrow m=-1$, bất phương trình trở thành $0x<2$ (luôn đúng với mọi x).

Vậy bất phương trình có nghiệm với mọi m. **Chọn C.**

Câu 43.

- Rõ ràng $m^2+m-6\neq 0$ thì bất phương trình có nghiệm.
- Xét $m^2+m-6=0\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2\longrightarrow 0x\geq 3\longrightarrow S=\varnothing \\ m=-3\longrightarrow 0x\geq -2\longrightarrow S=\mathbb{R}\end{array}\right.$.

Hợp hai trường hợp, ta được bất phương trình có nghiệm khi $m\neq 2$. **Chọn A.**

Câu 44. Bất phương trình viết lại $(m^2-m)x<m+1$.

- Rõ ràng $m^2-m\neq 0$ thì bất phương trình có nghiệm.

• Xét $m^2 - m = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \longrightarrow 0x < 1 \longrightarrow S = \mathbb{R} \\ m = 1 \longrightarrow 0x < 2 \longrightarrow S = \mathbb{R} \end{array}\right.$.

Hợp hai trường hợp, ta được bất phương trình có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$. **Chọn D.**

Câu 45. Bất phương trình tương đương với $(m-2)x < 3m-6$.

Với $m < 2$, bất phương trình tương đương với $x > \frac{3m-6}{m-2} = 3 \longrightarrow S = (3;+\infty)$

Suy ra phần bù của S là $(-\infty;3]$. **Chọn D.**

Câu 46. Bất phương trình tương đương với $(2m-2)x \geq m+1$.

• Với $m = 1$, bất phương trình trở thành $0x \geq 2$: vô nghiệm. Do đó $m = 1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• Với $m > 1$, bất phương trình tương đương với $x \geq \frac{m+1}{2m-2} \longrightarrow S = \left[\frac{m+1}{2m-2};+\infty\right)$.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{m+1}{2m-2} = 1 \Leftrightarrow m = 3$: thỏa mãn $m > 1$.

• Với $m < 1$, bất phương trình tương đương với $x \leq \frac{m+1}{2m-2} \longrightarrow S = \left(-\infty;\frac{m+1}{2m-2}\right]$: không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Câu 47. Bất phương trình tương đương với $2x - m < 3x - 3 \Leftrightarrow x > 3 - m$.

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (3-m;+\infty)$

Để bất phương trình trên có tập nghiệm là $(4;+\infty)$ thì $3 - m = 4 \Leftrightarrow m = -1$. **Chọn C.**

Câu 48. Cách 1. Ta có $|x| < 8 \Leftrightarrow -8 < x < 8 \Leftrightarrow x \in (-8;8)$.

• **TH1:** $m > 0$, bất phương trình $\Leftrightarrow mx > -4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{m} \longrightarrow S = \left(-\frac{4}{m};+\infty\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (-8;8) \subset S \Leftrightarrow -\frac{4}{m} \leq -8 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$.

Suy ra $0 < m \leq \frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• **TH2:** $m = 0$, bất phương trình trở thành $0.x + 4 > 0$: đúng với mọi x.

Do đó $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• **TH3:** $m < 0$, bất phương trình $\Leftrightarrow mx > -4 \Leftrightarrow x < -\frac{4}{m} \longrightarrow S = \left(-\infty;-\frac{4}{m}\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (-8;8) \subset S \Leftrightarrow -\frac{4}{m} \geq 8 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$.

Suy ra $-\frac{1}{2} \leq m < 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Kết hợp các trường hợp ta được $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Cách 2. Yêu cầu bài toán tương đương với $f(x) = mx + 4 > 0,\ \forall x \in (-8;8) \Leftrightarrow$ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-8;8)$ nằm phía trên trục hoành $\Leftrightarrow$ hai đầu mút của đoạn thẳng đó đều nằm phía trên trục hoành

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-8) \geq 0 \\ f(8) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8m+4 \geq 0 \\ 8m+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{1}{2} \\ m \geq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leq m \leq \dfrac{1}{2}$.

Câu 49. Cách 1. Bất phương trình $\Leftrightarrow (m^2-m+1)x < 2m^2-5 \longrightarrow x < \dfrac{2m^2-5}{m^2-m+1}$

$\longrightarrow S = \left(-\infty; \dfrac{2m^2-5}{m^2-m+1}\right)$ (vì $m^2-m+1 = \left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0,\ \forall m \in \mathbb{R}$)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow [-2018;2] \subset \left(-\infty; \dfrac{2m^2-5}{m^2-m+1}\right) \leftrightarrow 2 < \dfrac{2m^2-5}{m^2-m+1} \leftrightarrow m > \dfrac{7}{2}$. **Chọn C.**

Cách 2. Ta có $(m^2-m+1)x < 2m^2-5 \Leftrightarrow (m^2-m+1)x - 2m^2+5 < 0$.

Hàm số bậc nhất $y = (m^2-m+1)x - 2m^2+5$ có hệ số $m^2-m+1 > 0$ nên đồng biến.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y(2) < 0 \Leftrightarrow (m^2-m+1).2 - 2m^2+5 < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{7}{2}$.

Câu 50. Bất phương trình $\Leftrightarrow (m^2+1)x \geq 2m^2-m \longrightarrow x \geq \dfrac{2m^2-m}{m^2+1}$

$\longrightarrow S = \left[\dfrac{2m^2-m}{m^2+1}; +\infty\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow [-1;2] \cap \left[\dfrac{2m^2-m}{m^2+1}; +\infty\right) \neq \varnothing \longleftrightarrow \dfrac{2m^2-m}{m^2+1} \leq 2 \leftrightarrow m \geq -2$. **Chọn A.**

Câu 51. Ta có $\begin{cases} 2-x > 0 \\ 2x+1 < x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 > x \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow x < -3$. **Chọn A.**

Câu 52. Ta có $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} > -x+1 \\ \dfrac{4-3x}{2} < 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > -3x+3 \\ 4-3x < 6-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x > 4 \\ -x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{4}{5} \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{4}{5}$.

Chọn B.

Câu 53. Ta có $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} < -x+1 \\ 3+x > \dfrac{5-2x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < -2x+2 \\ 6+2x > 5-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < 3 \\ 4x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -\dfrac{1}{4} \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 54. Ta có $\begin{cases} 2x-1 < -x+2017 \\ 3+3x > \dfrac{2018-2x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < 2018 \\ 6+6x > 2018-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 2018 \\ 8x > 2012 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{2018}{3} \\ x > \dfrac{2012}{8} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2018}{3} < x < \dfrac{2012}{8}$. **Chọn B.**

Câu 55. Ta có $\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 3 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < \dfrac{3}{2} \longrightarrow S = \left[-1; \dfrac{3}{2}\right)$. **Chọn A.**

Ta có $\begin{cases} 2(x-1) > 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 3 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2} \longrightarrow S = \left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$. B sai.

Ta có $\begin{cases} 2(x-1)<1 \\ x\le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x<3 \\ x\le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{3}{2} \\ x\le -1 \end{cases} \Leftrightarrow x\le -1 \longrightarrow S=(-\infty;-1]$. C sai.

Ta có $\begin{cases} 2(x-1)>1 \\ x\le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>3 \\ x\le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{3}{2} \\ x\le -1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing \longrightarrow S=\varnothing$. D sai.

Câu 56. Ta có $\begin{cases} 2(x-1)<x+3 \\ 2x\le 3(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2<x+3 \\ 2x\le 3x+3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x<5 \\ x\ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3\le x<5 \longrightarrow S=[-3;5)$. **Chọn C.**

Câu 57. Bất phương trình $\begin{cases} x-1<2x-3 \\ 5-3x\le 2x-6 \\ 3x\le x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2<x \\ 11\le 5x \\ 2x\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x\ge \dfrac{11}{5} \\ x\le \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{11}{5}\le x\le \dfrac{5}{2}$.

Suy ra $a+b=\dfrac{11}{5}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{47}{10}$. **Chọn D.**

Câu 58. Bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 42x+5>28x+49 \\ 8x+3<4x+50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x>44 \\ 4x<47 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{44}{14} \\ x<\dfrac{47}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{44}{14}<x<\dfrac{47}{4} \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x\in\{4;5;6;7;8;9;10;11\}$. **Chọn C.**

Câu 59. Bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-2<4x+5 \\ x^2<x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<7 \\ -4x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<7 \\ -x<1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x<7 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<7 \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Suy ra tổng bằng 21. **Chọn A.**

Câu 60. Bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x+x^2\le 8-4x+x^2 \\ x^3+6x^2+12x+8<x^3+6x^2+13x+9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x\le 8-4x \\ 12x+8<13x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\le 7 \\ -x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{7}{2} \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x\le \dfrac{7}{2} \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x\in\{0;1;2;3\}$.

Suy ra tổng cần tính là $0+3=3$. **Chọn B.**

Câu 61. Bất phương trình $2x-1>0$ có tập nghiệm $S_1=\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Bất phương trình $x-m<2$ có tập nghiệm $S_2=(-\infty;m+2)$.

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $S_1\cap S_2\ne\varnothing \Leftrightarrow m+2>\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m>-\dfrac{3}{2}$. **Chọn C.**

Câu 62. Bất phương trình $3(x-6)<-3$ có tập nghiệm $S_1=(-\infty;5)$.

Bất phương trình $\dfrac{5x+m}{2}>7$ có tập nghiệm $S_2=\left(\dfrac{14-m}{5};+\infty\right)$.

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $S_1\cap S_2\ne\varnothing \Leftrightarrow \dfrac{14-m}{5}<5 \Leftrightarrow m>-11$. **Chọn A.**

Câu 63. Bất phương trình $x^2-1\le 0$ có tập nghiệm $S_1=[-1;1]$.

Bất phương trình $x-m>0$ có tập nghiệm $S_2=(m;+\infty)$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S_1\cap S_2\ne\varnothing\Leftrightarrow m<1$. **Chọn C.**

Câu 64. Bất phương trình $x-2\ge\Leftrightarrow x\ge 2$ có tập nghiệm $S_1=[2;+\infty)$.

Bất phương trình $(m^2+1)x<4\Leftrightarrow x<\dfrac{4}{m^2+1}$ (do $m^2+1>0$).

Suy ra $S_2=\left(-\infty;\dfrac{4}{m^2+1}\right)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $S_1\cap S_2\ne\varnothing\longleftrightarrow\dfrac{4}{m^2+1}>2$

Giải bất phương trình $\dfrac{4}{m^2+1}>2\Leftrightarrow 4>2(m^2+1)\Leftrightarrow 2>2m^2\Leftrightarrow m^2<1\Leftrightarrow -1<m<1$.

Chọn D.

Câu 65. Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases}m^2x<m+2\\ m^2x\ge 4m+1\end{cases}$.

• Với $m=0$, ta có hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases}0x<2\\ 0x\ge 1\end{cases}$: hệ bất phương trình vô nghiệm.

• Với $m\ne 0$, ta có hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases}x<\dfrac{m+2}{m^2}\\ x\ge\dfrac{4m+1}{m^2}\end{cases}$.

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{m+2}{m^2}>\dfrac{4m+1}{m^2}\Leftrightarrow m<\dfrac{1}{3}$.

Vậy $0\ne m<\dfrac{1}{3}$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 66. Bất phương trình $2x-1\ge 3\leftrightarrow x\ge 2\longrightarrow S_1=[2;+\infty)$.

Bất phương trình $x-m\le 0\leftrightarrow x\le m\longrightarrow S_2=(-\infty;m]$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow S_1\cap S_2$ là tập hợp có đúng một phần tử $\Leftrightarrow 2=m.$ **Chọn B.**

Câu 67. Bất phương trình $m^2x\ge 6-x\leftrightarrow(m^2+1)x\ge 6\leftrightarrow x\ge\dfrac{6}{m^2+1}$

$\longrightarrow S_1=\left[\dfrac{6}{m^2+1};+\infty\right)$.

Bất phương trình $3x-1\le x+5\leftrightarrow x\le 3\longrightarrow S_2=(-\infty;3]$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow S_1\cap S_2$ là tập hợp có đúng một phần tử $\Leftrightarrow\dfrac{6}{m^2+1}=3\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow m=\pm 1.$ **Chọn C.**

Câu 68. Bất phương trình $(x-3)^2\ge x^2+7x+1\leftrightarrow x^2-6x+9\ge x^2+7x+1\leftrightarrow x\le\dfrac{8}{13}$

$\longrightarrow S_1=\left(-\infty;\dfrac{8}{13}\right]$.

Bất phương trình $2m \le 8+5x \Leftrightarrow x \ge \frac{2m-8}{5} \longrightarrow S_2 = \left[\frac{2m-8}{5};+\infty\right)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2$ là tập hợp có đúng một phần tử $\Leftrightarrow \frac{8}{13} = \frac{2m-8}{5} \Leftrightarrow m = \frac{72}{13}$. **Chọn A.**

Câu 69. Giả sử hệ có nghiệm duy nhất thì $\frac{m-3}{m} = \frac{m-9}{m+3} \Leftrightarrow m = 1$.

Thử lại với $m=1$, hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} x \le -2 \\ x \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$.

Vậy $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn A.**

Câu 70. Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} (2m-1)x \ge 3-2m \\ (4m-4)x \ge -3 \end{cases}$.

Giả sử hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất thì

$\frac{3-2m}{2m-1} = \frac{-3}{4m-4} \Leftrightarrow 8m^2 - 26m + 15 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$ hoặc $m = \frac{5}{2}$.

Thử lại

- Với $m = \frac{3}{4}$, hệ trở thành $\begin{cases} \left(\frac{3}{2}-1\right)x \ge 3 - \frac{3}{2} \\ -x \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$: thỏa mãn.
- Với $m = \frac{5}{2}$, hệ trở thành $\begin{cases} 4x \ge -2 \\ 6x \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{2}$: không thỏa mãn.

Vậy $m = \frac{3}{4}$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 71. Bất phương trình $3x+4 > x+9 \leftrightarrow 2x > 5 \leftrightarrow x > \frac{5}{2} \longrightarrow S_1 = \left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.

Bất phương trình $1-2x \le m-3x+1 \leftrightarrow x \le m \longrightarrow S_2 = (-\infty;m]$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \varnothing \Leftrightarrow m \le \frac{5}{2}$. **Chọn D.**

Câu 72. Bất phương trình $2x+7 \ge 8x+1 \leftrightarrow -6x \ge -6 \leftrightarrow x \le 1 \longrightarrow S_1 = (-\infty;1]$.

Bất phương trình $m+5 < 2x \leftrightarrow x > \frac{m+5}{2} \longrightarrow S_2 = \left(\frac{m+5}{2};+\infty\right)$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \varnothing \Leftrightarrow 1 \le \frac{m+5}{2} \Leftrightarrow m \ge -3$. **Chọn B.**

Câu 73. Bất phương trình $(x-3)^2 \ge x^2+7x+1 \leftrightarrow x^2-6x+9 \ge x^2+7x+1$

$\leftrightarrow -6x+9 \ge 7x+1 \leftrightarrow 8 \ge 13x \leftrightarrow x \le \frac{8}{13} \longrightarrow S_1 = \left(-\infty;\frac{8}{13}\right]$.

Bất phương trình $2m \le 8+5x \leftrightarrow 2m-8 \le 5x \leftrightarrow x \ge \frac{2m-8}{5} \longrightarrow S_2 = \left[\frac{2m-8}{5};+\infty\right)$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \varnothing \Leftrightarrow \frac{8}{13} < \frac{2m-8}{5} \Leftrightarrow m > \frac{72}{13}$.

Chọn A.

Câu 74. Bất phương trình $3x+5 \ge x-1 \leftrightarrow 2x \ge -6 \leftrightarrow x \ge -3 \longrightarrow S_1 = [-3;+\infty)$.

Bất phương trình $(x+2)^2 \le (x-1)^2 + 9 \leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \le x^2 - 2x + 1 + 9$

$\leftrightarrow 4x + 4 \le -2x + 1 + 9 \leftrightarrow 6x \le 6 \leftrightarrow x \le 1 \longrightarrow S_2 = (-\infty;1].$

Suy ra $S_1 \cap S_2 = [-3;1]$.

Bất phương trình $mx + 1 > (m-2)x + m \leftrightarrow mx + 1 > mx - 2x + m$

$\leftrightarrow 1 > -2x + m \leftrightarrow 2x > m - 1 \leftrightarrow x > \dfrac{m-1}{2} \longrightarrow S_3 = \left(\dfrac{m-1}{2};+\infty\right).$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow (S_1 \cap S_2) \cap S_3 = \varnothing \Leftrightarrow \dfrac{m-1}{2} \ge 1 \Leftrightarrow m \ge 3.$

Chọn B.

Câu 75. Bất phương trình

$$2(x-3) < 5(x-4) \leftrightarrow x > \frac{14}{3} \longrightarrow S_1 = \left(\frac{14}{3};+\infty\right).$$

Bất phương trình $mx + 1 \le x - 1 \leftrightarrow (m-1)x \le -2$. (*)

- Với $m = 1$, khi đó (*) trở thành $0x \le -2$: vô nghiệm $\longrightarrow$ hệ vô nghiệm.

  $\longrightarrow$ trong trường hợp này ta chọn $m = 1$.

- Với $m > 1$, ta có $(*) \leftrightarrow x \le \dfrac{-2}{m-1} \longrightarrow S_2 = \left(-\infty;\dfrac{-2}{m-1}\right]$

  $\longrightarrow$ hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \varnothing \Leftrightarrow \dfrac{-2}{m-1} \le \dfrac{14}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-6}{3(m-1)} \le \dfrac{14(m-1)}{3(m-1)} \Leftrightarrow -6 \le 14(m-1) \Leftrightarrow m \ge \dfrac{4}{7}$ (do với $m > 1 \to m - 1 > 0$).

  $\longrightarrow$ trong trường hợp này ta chọn $m > 1$.

- Với $m < 1$, ta có $(*) \leftrightarrow x \ge \dfrac{-2}{m-1} \longrightarrow S_2 = \left[\dfrac{-2}{m-1};+\infty\right).$

Khi đó $S_1 \cap S_2$ luôn luôn khác rỗng nên $m < 1$ không thỏa mãn.

Vậy $m \ge 1$ thì hệ bất phương trình vô nghiệm.

Chọn B.

BÀI 3. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

Câu 1. Ta có $f(x) \ge 0 \Leftrightarrow 2x - 4 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2 \Leftrightarrow x \in [2;+\infty)$. **Chọn A.**

Câu 2. Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+5)(3-x) = 0.$

Phương trình $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ và $3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$3-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-5] \cup [3;+\infty)$. **Chọn D.**

Câu 3. Ta có $x=0;\ x-2=0\Leftrightarrow x=2$ và $3-x=0\Leftrightarrow x=3$. Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	$\mid$	$+$	
$x-2$		$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$3-x$		$+$	$\mid$	$+$	$\mid$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0\Leftrightarrow x\in(0;2)\cup(3;+\infty)$. **Chọn A.**

Câu 4. Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow 9x^2-1=0\Leftrightarrow(3x-1)(3x+1)=0.$

Phương trình $3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ và $3x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	
$3x+1$		$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **Chọn D.**

Câu 5. Ta có $(2x-1)(x^3-1)=0\Leftrightarrow(2x-1)(x-1)(x^2+x+1)=0.$

Phương trình $2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2};\ x-1=0\Leftrightarrow x=1$ và $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$x-1$		$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$	$\mid$	$-$	$\mid$	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra $f(x)\geq 0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty)$. **Chọn C.**

Câu 6. Ta có $f(x)\leq 0\Leftrightarrow\frac{1}{3x-6}\leq 0\Leftrightarrow 3x-6<0\Leftrightarrow x<2\Leftrightarrow x\in(-\infty;2)$. **Chọn A.**

Câu 7. Phương trình $x+3=0\Leftrightarrow x=-3;\ 2-x=0\Leftrightarrow x=2$ và $x-1=0\Leftrightarrow x=1.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	$\mid$	$+$	
$2-x$		$+$	$\mid$	$+$	$\mid$	$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(1;2)$. **Chọn D.**

Câu 8. Phương trình $4x-8=0 \Leftrightarrow x=2$; $2+x=0 \Leftrightarrow x=-2$ và $4-x=0 \Leftrightarrow x=4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		2		4		$+\infty$
$4x-8$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$4-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\in x\in(-\infty;-2]\cup[2;4)$. **Chọn A.**

Câu 9. Phương trình $x=0$; $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$; $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$ và $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		1		3		5		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-5$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	||	$+$	
$1-x$		$+$	|	$+$	||	$-$	|	$-$	|	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\in[0;1)\cup[3;5)$.

Chọn C.

Câu 10. Ta có $f(x)=\dfrac{4x-12}{x^2-4x}=\dfrac{4x-12}{x(x-4)}$.

Phương trình $4x-12=0 \Leftrightarrow x=3$; $x=0$ và $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		3		4		$+\infty$
$4x-12$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-4$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra $f(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup[3;4)$. **Chọn C.**

Câu 11. Ta có $f(x)=\dfrac{2-x}{x+1}+2=\dfrac{2-x+2(x+1)}{x+1}=\dfrac{x+4}{x+1}$.

Phương trình $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$ và $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	

$x+1$	$-$	|	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-4;-1)$. **Chọn C.**

Câu 12. Ta có $f(x)=1-\frac{2-x}{3x-2}=\frac{3x-2-2+x}{3x-2}=\frac{4x-4}{3x-2}$.

Phương trình $4x-4=0\Leftrightarrow x=1$ và $3x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$4x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x-2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\le 0\Leftrightarrow x\in\left(\frac{2}{3};1\right]$.

Chọn C.

Câu 13. Ta có $f(x)=-\frac{4}{3x+1}-\frac{3}{2-x}=\frac{3}{x-2}-\frac{4}{3x+1}=\frac{5x+11}{(x-2)(3x+1)}$.

Phương trình $5x+11=0\Leftrightarrow x=-\frac{11}{5}$; $x-2=0\Leftrightarrow x=2$

và $3x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{11}{5}$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$5x+11$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)>0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{11}{5};-\frac{1}{3}\right)\cup(2;+\infty)$. **Chọn B.**

Câu 14. Ta có $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x+4}-\frac{3}{x+3}<0\Leftrightarrow\frac{x+12}{x(x+3)(x+4)}<0$.

Phương trình $x+12=0\Leftrightarrow x=-12$; $x+3=0\Leftrightarrow x=-3$ và $x+4=0\Leftrightarrow x=-4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-12		-4		-3		0		$+\infty$
$x+12$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
x		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	

$x+3$	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$x+4$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	||	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-12;-4)\cup(-3;0)$. **Chọn A.**

Câu 15. Ta có $1-f(x)=1-\dfrac{(x-3)(x+2)}{x^2-1}=1-\dfrac{x^2-x-6}{x^2-1}=\dfrac{x+5}{(x-1)(x+1)}$.

Phương trình $x+5=0\Leftrightarrow x=-5$; $x-1=0\Leftrightarrow x=1$ và $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		-1		1		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-f(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $1-f(x)>0\Leftrightarrow x\in(-5;-1)\cup(1;+\infty)$.

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên âm của m thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn C.**

Câu 16. Đặt $f(x)=(2x+8)(1-x)$

Phương trình $2x+8=0\Leftrightarrow x=-4$ và $1-x=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$2x+8$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu ta có $f(x)>0\Leftrightarrow -4<x<1\Leftrightarrow x\in(-4;1)$.

Khi đó $b=1$, $a=-4\Rightarrow b-a=5$. **Chọn B.**

Câu 17. Phương trình $x+4=0\Leftrightarrow x=-4$ và $x+5=0\Leftrightarrow x=-5$.

Phương trình $x-4=0\Leftrightarrow x=4$ và $5x-25=0\Leftrightarrow x-5=0\Leftrightarrow x=5$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		-4		4		5		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x+4$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-4$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-5$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x+4)(x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$(x+4)(x-5)$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x-4)(x-5)$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy tập nghiệm $S=(-4;5)$ là nghiệm của bất phương trình $(x+4)(5x-25)<0$. **Chọn B.**

Câu 18. Đặt $f(x)=(x+3)(x-1)$

Phương trình $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ và $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có $(x+3)(x-1)\le 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 1 \Leftrightarrow x\in[-3;1]$.

Suy ra các nghiệm nguyên của bất phương trình là $-3,-2,-1,0,1$.

Suy ra tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình bằng -5.

Chọn C.

Câu 19. Đặt $f(x)=x(x-5)$.

Phương trình $x=0$ và $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $x\in[0;5] \Leftrightarrow f(x)\le 0 \Leftrightarrow x(x-5)\le 0$. **Chọn B.**

Câu 20. Đặt $f(x)=x(x-2)(x+1)$.

Phương trình $x=0$; $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ và $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-1;0)\cup(2;+\infty)$.

Vậy nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình là 3. **Chọn B.**

Câu 21. Phương trình $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$; $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$.

Và $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$; $14-2x=0 \Leftrightarrow x=7$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		3		5		7		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-5$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$14-2x$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	

$(x+3)(x-5)(14-2x)$	+	0	−	0	+		+	0	−
$(x-3)(x-5)(14-2x)$	+	|	+	0	−	0	+	0	−

Từ bảng xét dấu ta thấy tập nghiệm $S=(-\infty;3)\cup(5;7)$ là tập nghiệm của bất phương trình $(x-3)(x-5)(14-2x)>0.$ **Chọn B.**

Câu 22. Đặt $f(x)=(2-x)(x+1)(3-x)$

Phương trình $2-x=0\Leftrightarrow x=2;\ x+1=0\Leftrightarrow x=-1$ và $3-x=0\Leftrightarrow x=3.$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$2-x$		+	|	+	0	−	|	−	
$x+1$		−	0	+	|	+	|	+	
$3-x$		+	|	+	|	+	|	−	
$f(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\le 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]\cup[2;3].$

Vậy bất phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên dương. **Chọn D.**

Câu 23. Bất phương trình $(3x-6)(x-2)(x+2)(x-1)>0\Leftrightarrow 3(x-2)^2(x+2)(x-1)>0$

Vì $(x-2)^2>0,\ \forall x\ne 2$ nên bất phương trình trở thành $\begin{cases}x\ne 2\\(x+2)(x-1)>0\end{cases}.$

Đặt $f(x)=(x+2)(x-1).$ Phương trình $x+2=0\Leftrightarrow x=-2$ và $x-1=0\Leftrightarrow x=1.$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		−	0	+	|	+	
$x-1$		−	|	−	0	+	
$f(x)$		+	0	−	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty).$

Kết hợp với điều kiện $x\ne 2,$ ta được $\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(1;2)\cup(2;+\infty).$

Do đó, nghiệm nguyên âm lớn nhất của bất phương trình là -3 và nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của bất phương trình là $3.$ Vậy tích cần tính là $(-3).3=-9.$ **Chọn A.**

Câu 24. Đặt $f(x)=2x(4-x)(3-x)(3+x).$

Phương trình $2x=0\Leftrightarrow x=0;\quad 4-x=0\Leftrightarrow x=4;$

Và $3-x=0\Leftrightarrow x=3;\ \ 3+x=0\Leftrightarrow x=-3.$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		0		3		4		$+\infty$
$x+3$		−	0	+	|	+	|	+	|	+	
$2x$		−	|	−	0	+	|	+	|	+	
$3-x$		−	|	−	|	−	0	+	|	+	
$4-x$		−	|	−	|	−	|	−	0	+	
$f(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Từ bảng xét dấu ta có $f(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\0<x<3\\x<-3\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(0;3)\cup(4;+\infty).$

Suy ra tập nghiệm bất phương trình là hợp của ba khoảng.

Chọn C.

Câu 25. Bất phương trình $(x-1)\sqrt{x(x+2)}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\geq 0 \\ x(x+2)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x(x+2)\geq 0 \end{cases}$.

Đặt $f(x)=x(x+2)$.

Phương trình $x=0$ và $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 0 \\ x\leq -2 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $x\geq 1$, ta được tập nghiệm $S=[1;+\infty)$.

Vậy nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình là $x=1$. **Chọn C.**

Câu 26. Đặt $f(x)=\dfrac{2-x}{2x+1}$. Ta có $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$ và $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy rằng $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<x\leq 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\dfrac{1}{2};2\right]$. **Chọn C.**

Câu 27. Đặt $f(x)=\dfrac{(3-x)(x-2)}{x+1}$. Ta có $\begin{cases} 3-x=0 \Leftrightarrow x=3 \\ x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \end{cases}$; $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x\leq 2 \\ x\geq 3 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-1;2]\cup[3;+\infty)$.

Chọn A.

Câu 28. Bất phương trình $\dfrac{3}{2-x}<1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2-x}-1<0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{2-x}<0$.

Đặt $f(x)=\dfrac{x+1}{2-x}$. Ta có $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$ và $2-x=0\Leftrightarrow x=2$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>2\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **Chọn C.**

Câu 29. Bất phương trình $\dfrac{x^2+x-3}{x^2-4}\geq 1\Leftrightarrow\dfrac{x^2+x-3}{x^2-4}-1\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{x+1}{(x-2)(x+2)}\geq 0.$

Đặt $f(x)=\dfrac{x+1}{(x-2)(x+2)}$. Ta có $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$ và $(x-2)(x+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-2$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x\leq -1\\x>2\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-2;-1]\cup(2;+\infty)$. Chọn B.

Câu 30. Bất phương trình $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}<0\Leftrightarrow\dfrac{2x+6}{(x-1)(x+1)}<0.$

Đặt $f(x)=\dfrac{2x+6}{(x-1)(x+1)}$. Ta có $2x+6=0\Leftrightarrow x=-3$ và $(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$2x+6$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-3\\-1<x<1\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-3)\cup(-1;1)$. **Chọn B.**

Câu 31. Bất phương trình $\frac{3}{1-x}\geq\frac{5}{2x+1}\Leftrightarrow\frac{11x-2}{(1-x)(2x+1)}\geq 0.$

Đặt $f(x)=\frac{11x-2}{(1-x)(2x+1)}$. Ta có $11x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{11}$; $\begin{cases}1-x=0\Leftrightarrow x=1\\ 2x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{11}$		1		$+\infty$
$11x-2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$1-x$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$2x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-\frac{1}{2}\\ \frac{2}{11}\leq x<1\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{2}{11};1\right)$. **Chọn A.**

Câu 32. Bất phương trình $\frac{2x}{x+1}-\frac{1}{x-1}\leq 2\Leftrightarrow\frac{1-3x}{(x-1)(x+1)}\leq 0.$

Đặt $f(x)=\frac{1-3x}{(x-1)(x+1)}$. Ta có $1-3x=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$; $\begin{cases}x-1=0\Leftrightarrow x=1\\ x+1=0\Leftrightarrow x=-1\end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$1-3x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x\leq\frac{1}{3}\\ x>1\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-1;\frac{1}{3}\right]\cup(1;+\infty)$. **Chọn A.**

Câu 33. Bất phương trình $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+4}<\frac{3}{x+3}\Leftrightarrow\frac{x+12}{x(x+3)(x+4)}<0.$

Đặt $f(x)=\frac{x+12}{x(x+3)(x+4)}$. Ta có $x+12=0\Leftrightarrow x=-12$; $\begin{cases}x+3=0\Leftrightarrow x=-3\\ x+4=0\Leftrightarrow x=-4\end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-12	-4	-3	0	$+\infty$

$x+12$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$
x	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$x+4$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -12<x<-4 \\ -3<x<0 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-12;-4)\cup(-3;0)$. **Chọn D.**

Câu 34. Bất phương trình $\dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{(x-1)^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}<0.$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2-(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}<0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x-3)}{(x+1)(x-1)^2}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ \dfrac{x(x-3)}{x+1}<0 \end{cases}$ (vì $(x-1)^2>0, \forall x\in\mathbb{R}$).

Đặt $f(x)=\dfrac{x(x-3)}{x+1}$. Ta có $x-3=0\Leftrightarrow x=3$ và $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
x		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$-$	
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ 0<x<3 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $x\neq 1$, ta được tập nghiệm $S=(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;3)$.

Chọn C.

Câu 35. Bất phương trình tương đương với

$\dfrac{x(x+4)}{x(x-3)(x+3)}-\dfrac{2x(x-3)}{x(x-3)(x+3)}<-\dfrac{4x(x+3)}{x(x-3)(x+3)} \Leftrightarrow \dfrac{3x+22}{(x-3)(x+3)}<0.$

Đặt $f(x)=\dfrac{3x+22}{(x-3)(x+3)}$. Ta có $3x+22=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{22}{3}$; $\begin{cases} x-3=0\Leftrightarrow x=3 \\ x+3=0\Leftrightarrow x=-3 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{22}{3}$		-3		3		$+\infty$
$3x+22$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{22}{3}\right) \cup (-3;3)$.

Vậy nghiệm nguyên lớn nhất thỏa mãn bất phương trình là $x = 2$. **Chọn A.**

Câu 36. Ta có $|x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$. **Chọn D.**

Câu 37. Ta có $|2x-3| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le 2x-3 \le 1 \Leftrightarrow 2 \le 2x \le 4 \Leftrightarrow 1 \le x \le 2$. **Chọn C.**

Câu 38. Ta có $|3x-4| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le 3x-4 \ge 2 \Leftrightarrow 2 \le 3x \le 6 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \le x \le 2$. **Chọn B.**

Câu 39. Ta có $|1-3x| > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-3x > 2 \\ 1-3x < -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 > 3x \\ 3x > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\frac{1}{3} \\ x > 1 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1;+\infty)$. **Chọn A.**

Câu 40. Vì $|x-3| \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên suy ra $|x-3| > -1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$. **Chọn D.**

Câu 41.

Cách 1. Bất phương trình $|5x-4| \ge 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x-4 \ge 6 \\ 5x-4 \le -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x \ge 10 \\ 5x \le -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \le -\frac{2}{5} \end{array}\right.$.

Cách 2. TH1. Với $5x-4 \ge 0$, bất phương trình $|5x-4| \ge 6 \Leftrightarrow 5x-4 \ge 6 \Leftrightarrow x \ge 2$.

TH2. Với $5x-4 < 0$, bất phương trình $|5x-4| \ge 6 \Leftrightarrow -5x+4 \ge 6 \Leftrightarrow 5x \le -2 \Leftrightarrow x \le -\frac{2}{5}$.

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup [2;+\infty)$.

Mặt khác $S = (-\infty; a] \cup [b;+\infty)$ suy ra $\begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow 5a + b = 5.\left(-\frac{2}{5}\right) + 2 = 0$. **Chọn C.**

Câu 42. Điều kiện: $x+1 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne -1$.

Bất phương trình $\left|\frac{2-x}{x+1}\right| \ge 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2-x}{x+1} \ge 2 \\ \frac{2-x}{x+1} \le -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2-x}{x+1} - 2 \ge 0 \\ \frac{2-x}{x+1} + 2 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} -\frac{3x}{x+1} \ge 0 & (1) \\ \frac{4+x}{x+1} \le 0 & (2) \end{array}\right.$

Giải (1), ta có bất phương trình $(1) \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \le 0 \Leftrightarrow -1 < x \le 0$.

Giải (2), ta có bất phương trình $(2) \Leftrightarrow -4 \le x < -1$.

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-4;-1) \cup (-1;0]$.

Vậy có tất cả 4 giá trị nguyên x cần tìm là $x = \{-4;-3;-2;0\}$. **Chọn B.**

Câu 43. Bất phương trình $1 \le |x-2| \le 4 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| \le 4 \\ |x-2| \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \le x-2 \le 4 \\ \left[\begin{array}{l} x-2 \ge 1 \\ x-2 \le -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 6 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le 1 \end{array}\right. \end{cases}$

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-2;1] \cup [3;6]$.

Vậy số nghiệm nguyên thỏa mãn bất phương trình là 8. **Chọn D.**