Với C: Ta có $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^{n-k}$

Cách 2: **Sử dụng máy tính để thử**

Với các bài toán xét đẳng thức đúng thi ta có thể sử dụng máy tính để thử. Ta thử với từng trường hợp, thử với cặp số cụ thể.

Ví dụ với A ta thử ngay với $k = 3; n = 4$ ta thấy đẳng thức này đúng, suy ra A đúng, từ đây suy ra D sai.

Math ▲
$4C3 - \dfrac{4}{3} \times 3C2$
0

STUDY TIP

Đẳng thức ở phương án A là một đẳng thức quan trọng trong các bài toán về công thức tổ hợp Ta có hai hệ quả quan trọng như sau:

Với mọi $n; k \in \mathbb{N}^*, 2 \le k \le n$

- **Hệ quả 1:** Ta có
  $(k-1)kC_n^k = (n-1)nC_{n-2}^{k-2}$
- **Hệ quả 2:** Ta có
  $k^2C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$

Ví dụ 2. Cho $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $6n - 6 + C_n^3 \ge C_{n+1}^3$, Số các số n thỏa mãn là:.

A. 10 số. **B.** 9 số. **C.** 8 số. **D.** 7 số.

Đáp án A.

Lời giải

Điều kiện $n \ge 3$. Ta có $6n - 6 + C_n^3 \ge C_{n+1}^3 \Leftrightarrow 6n - 6 \ge C_n^2 \left(do\, C_{n+1}^3 = C_n^3 + C_n^{32} \right)$

$$\Leftrightarrow 6n - 6 \ge \frac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow n^2 - 13n + 12 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le n \le 12.$$

Ví dụ 3. Cho $S = C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^{10} + ... + C_{15}^{15}$. Tính S.

A. $S = 2^{15}$. **B.** $S = 2^{14}$. **C.** $S = 2^{13}$. **D.** $S = 2^{12}$.

Đáp án B

Lời giải

Cách 1: Sử dụng đẳng thức $C_n^k = C_n^{n-k}$ ta được:

$$S = C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^{10} + ... + C_{15}^{15} = C_{15}^7 + C_{15}^6 + C_{15}^5 + ... + C_{15}^0.$$

$$\Rightarrow 2S = (C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^{10} + ... + C_{15}^{15}) + (C_{15}^7 + C_{15}^6 + C_{15}^5 + ... + C_{15}^0) = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k = 2^{15}$$

$$\Rightarrow S = 2^{14}$$

Vậy $S = (C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^{10} + ... + C_{15}^{15}) = 2^{14}$

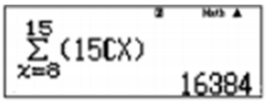
Cách 2: Sử dụng máy tính Casio

Do bài toán này, tổng bé và số các số hạng trong tổng ít nên ta có sử dụng lệnh tổng trong máy tính Caiso bằng cách bấm máy: $SHIFT\ LOG_{\square}\square(\sum_{\square}^{\square}\square)$.

Ta nhập $SHIFT\ LOG_{\square}15\ SHIFT \div alpha\,)\nabla 8\Delta 15 =$

STUDY TIP

Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.



Với các bài toán tính tổng ở trên ta cần chú ý kỹ thuật sử dụng các đẳng thức cơ bản sau:

$C_n^k = C_n^{n-k}, C_n^k = \dfrac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$ và các hệ quả: $\begin{cases} k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} \\ k^2C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1} \end{cases}$

Đẳng thức Pascal: $C_m^k = C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1}$

$$\begin{cases} C_m^0 - C_m^1 + C_m^2 - ... + (-1)^{m-1}C_m^{m-1} + (-1)^m C_m^m = (-1+1)^m = 0 \\ C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + ... + C_m^{m-1} + C_m^m = (1+1)^m = 2^m \end{cases}$$

Xét $m = 2n$: $\begin{cases} C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - ... + (-1)^{2n-1}C_{2n}^{2n-1} + (-1)^{2n} C_{2n}^{2n} = (-1+1)^m = 0 \\ C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = (1+1)^{2n} = 2^{2n} \end{cases}$

Cộng vế theo vế, trừ vế theo vế, ta được kết quả sau:

$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + ... + C_{2n}^{2n-2} + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + ... + C_{2n}^{2n-3} + C_{2n}^{2n-1} = 2^{n-1}$

Xét *m* = *2n* + *1*, hoàn toàn tương tự, ta được:

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+!}^4 + ... + C_{2n+1}^{2n} = C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n}$$

Ví dụ 4. Trong các đẳng thức sau đẳng thức nào sai?

A. $S_1 = 1C_n^1 + 2C_n^2 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = n2^{n-1}$.

B. $S_2 = 1.2.C_n^1 + 2.3.C_n^2 + ... + (n-1).n.C_n^n = (n-1).n.C_{n-2}^{k-2}$.

C. $S_3 = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + ... + (n-1)^2C_n^{n-1} + n^2C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$.

D. $S_4 = \dfrac{C_n^0}{1} + \dfrac{C_n^1}{2} + \dfrac{C_n^2}{3} + ... + \dfrac{C_n^{n-1}}{n} + \dfrac{C_n^n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}(2^n - 1)$.

Đáp án D.

Lời giải

Ta có thể sử dụng máy tính để thử trường hợp riêng của đẳng thức trên, tôi xin phép không đưa cách làm cụ thể vì độc giả có thể dễ dàng giải được.

Tôi xin giới thiệu cách chứng minh cụ thể như sau:

Với A: Ta sẽ dùng đẳng thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

Khi đó ta có:

$$S_1 = 1C_n^1 + 2C_n^2 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} = n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + ... + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) = n(1+1)^{n-1} = n.2^{n-1}$$

Vậy A đúng.

Với B: Ta sẽ dùng đẳng thức $(k-1)kC_n^k = (n-1)nC_{n-1}^{k-1}$.

Khi đó ta có:

$$S_2 = 1.2C_n^1 + 2.3C_n^2 + ... + (n-1).nC_n^{n-1} = \sum_{k=2}^{n} (k-1)kC_n^k = \sum_{k=2}^{n} (n-1)nC_{n-2}^{k-2}$$

$$= (n-1)n(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + ... + C_{n-2}^{n-3} + C_{n-2}^{n-2}) = (n-1)n.2^{n-2}$$

Vậy B đúng.

Với C: Ta có $k^2C_n^k = (n-1)nC_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$.

Khi đó ta có: $S_3 = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 ... + (n-1)^2 C_n^{n-1} + n^2C_n^n$.

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2C_n^k = \sum_{k=1}^{n} \left[(n-1)nC_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}\right].$$

$$= (n-1)n\left(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-2}^2 + ... + C_{n-2}^{n-3} + C_{n-2}^{n-2}\right) + n\left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + ... + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}\right).$$

$$= (n-1)n2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}..$$

Vậy C đúng.

Từ đây ta chọn ***D.***

Đọc thêm tính tổng S_4*:* Các số hạng của S_4 có dạng $\dfrac{C_n^k}{k+1}$ nên ta sẽ dùng đẳng thức $\dfrac{C_n^k}{k+1} = \dfrac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$.

Khi đó ta có: $S_4 = \dfrac{C_n^0}{1} + \dfrac{C_n^1}{2} + \dfrac{C_n^2}{3} + ... + \dfrac{C_n^{n-1}}{n} + \dfrac{C_n^n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{C_n^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$.

$$= \frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + ... + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - C_{n+1}^0\right) = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right).$$

STUDY TIP.

* Các số hạng của S_3 có dạng $k^2C_n^k$ nên ta dùng đẳng thức $k^2C_n^k = (n-1)nC_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$.

* Các số hạng của S_4 có dạng $\dfrac{C_n^k}{k+1}$ nên ta sẽ dùng đẳng thức $\dfrac{C_n^k}{k+1} = \dfrac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$.

Ví dụ 5. Một học sinh giải bài toán "Rút gọn biểu thức $S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + ... + (-1)^k C_n^k$ với $k \le n$; $n > 1$."

Như sau:

Bước 1: Ta áp dụng công thức $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1} = C_n^{k+1}$.

$S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 ... + (-1)^k C_n^k$.

$$= C_n^0 - \left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1\right) + \left(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2\right) - \left(C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3\right) + ... + (-1)^k \left(C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k\right).$$

Bước 2: Mở dấu ngoặc ta có:

$S_k = C_n^0 - C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 - C_{n-1}^2 - C_{n-1}^3 + (-1)^k C_{n-1}^{k-1} + (-1)^k C_{n-1}^k$.

Bước 3: Vậy với mọi k thì $S_k = (-1)^k C_{n-1}^k$.

Kết luận nào sau đây là đúng:

A. Lời giải trên sai từ bước 1. **B.** Lời giải trên sai từ bước 2.

C. Lời giải trên sai ở bước 3. **D.** Lời giải trên đúng.

Đáp án A.

Lời giải.

Ta thấy lời giải trên sai khi đã không xét hai trường hợp $k < n$; hoặc $k = n$.

Vì nếu $k = n$ thì không tồn tại C_{n-1}^k.

Rất nhiều học sinh mắc sai lầm khi giải như trên, hoặc sai lầm khi giải như sau:

$S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 ... + (-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0$.

Ta có lời giải đúng như sau:

TH1: Với $k < n$, ta áp dụng công thức $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1} = C_n^{k+1}$, ta có:

$S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 ... + (-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0$.

$= C_n^0 - (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) + (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) - (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3) + ... + (-1)^k (C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k)$.

$= C_n^0 - C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 - C_{n-1}^2 - C_{n-1}^3 + ... + (-1)^k C_{n-1}^{k-1} + (-1)^k C_{n-1}^k$.

Vậy $S_k = (-1)^k C_{n-1}^k$ khi $k < n$.

TH2: Với $k = n$, thì $S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 ... + (-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0$.

STUDY TIP.

Trong các bài toán mà các số k, n tổng quát ta cần lưu ý phân rõ trường hợp $k < n$ và $k = n$.

Ví dụ 6. Tính tổng $S = 1.C_{2018}^1 + 2.C_{2018}^2 + 3.C_{2018}^3 + \dots + 2018.C_{2018}^{2018}$

A. 2018.2^{2017}. **B.** 2017.2^{2018}. **C.** 2018.2^{2018}. **D.** 2017.2^{2017}.

Đáp án A.

Lời giải.

Cách 1: Xét số hạng tổng quát.

$$k.C_{2018}^k = k.\frac{2018!}{k!(2018-k)!} = k.\frac{2018.2017!}{k.(k-1)!\ (2018-k)!} = 2018.C_{2017}^{k-1}.$$

Cho k chạy từ 1 đến 2018 ta được:

$S = 2108.C_{2017}^0 + C_{2017}^1 + \dots + C_{2017}^{2017} = 2018.2^{2017}$.

STUDY TIP.

Với các bài toán tính tổng thường sử dụng công thức $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.

Cách 2: Khi các em học đạo hàm ở cuối chương trình lớp 11 ta sẽ nghiên cứu ở chương đạo hàm. Khi đó ta xét hàm số:.

$f(x) = (1+x)^{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 x + ... + C_{2018}^{2018} x^{2018}$.

$\Rightarrow f'(x) = 2018.(1+x)^{2017} = C_{2018}^1 + 2C_{2018}^2 x + ... + 2018.C_{2018}^{2018} x^{2017}$.

$\Rightarrow f'(1)=2018.2^{2017}=C_{2018}^{1}+2C_{2018}^{2}+...+2018.C_{2018}^{2018}$.

$\Rightarrow 2018.2^{2017}=S \Rightarrow$ ta chọn **A.**

Ví dụ 7. Tính tổng $S=C_{2017}^{0}+\frac{1}{2}C_{2017}^{1}+\frac{1}{3}C_{2017}^{2}+...+\frac{1}{2018}C_{2017}^{2017}$

A. $\frac{2^{2017}-1}{2017}$. **B.** $\frac{2^{2018}-1}{2018}$. **C.** $\frac{2^{2018}-1}{2017}$. **D.** $\frac{2^{2017}-1}{2018}$.

Đáp án B.

Lời giải.

Cách 1: Xét số hạng tổng quát $\frac{1}{k+1}C_{2017}^{k}$, ta có:.

$$\frac{1}{k+1}C_{2017}^{k}=\frac{1}{1+k}\frac{2017!}{k!(2017-k)!}=\frac{1}{2018}\frac{2018!}{(k+1)!(2017-k)!}=\frac{1}{2018}C_{2018}^{k+1}.$$

Vậy $\frac{1}{k+1}C_{2017}^{k}=\frac{1}{2018}C_{2018}^{k+1}$, cho k chạy từ 0 đến 2017 thì ta được:.

$$S=\frac{1}{2018}\left[C_{2018}^{0}+C_{2018}^{1}+C_{2018}^{2}+...+C_{2018}^{2018}\right]-\frac{C_{2018}^{0}}{2018}=\frac{1}{2018}2^{2018}-\frac{1}{2018}=\frac{2^{2018}-1}{2018}..$$

Cách 2: Sử dụng tích phân (các em sẽ học ở chương trình lớp 12).

Xét $f(x)=(1+x)^{2017}=C_{2017}^{0}+C_{2017}^{1}x+C_{2017}^{2}x^2+...+C_{2017}^{2017}x^{2017}$.

$$\Rightarrow \int_0^1 (1+x)^{2017}\,dx=\int_0^1\left[C_{2017}^{0}+C_{2017}^{1}x+C_{2017}^{2}x^2+...+C_{2017}^{2017}x^{2017}\right]dx.$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(1+x)^{2018}}{2018}\right|_0^1=\left.\left[C_{2017}^{0}x+\frac{1}{2}C_{2017}^{1}x^2+\frac{1}{3}C_{2017}^{2}x^3+...+\frac{1}{2018}C_{2017}^{2017}x^{2018}\right]\right|_0^1.$$

$\Leftrightarrow \frac{2^{2018}-1}{2018}=S$. Chọn **B.**

Ví dụ 8. ***(đọc thêm)**: Cho hai đẳng thức sau với $n>1;\ n\in\mathbb{N}$.

$$S_1=C_n^0-2C_n^1+3C_n^2-...+(-1)^n(n+1)C_n^n=0,\ (1)$$
$$S_2=C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1},\ (2).$$

Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng.

A. (1) đúng, (2) sai. **B.** (1) sai, (2) đúng.

C. Cả hai đều sai. **D.** Cả hai đều đúng.

Đáp án D.

Lời giải.

Ta có thể sử dụng máy tính để thử trường hợp riêng của các đẳng thức trên, tôi xin phép không đưa ra cách làm cụ thể vì độc giả có thể dễ dàng thử được.

Dưới đây tôi xin giới thiệu hai phương pháp tính tổng sử dụng đạo hàm và tích phân ta học cuối chương trình 11 và đầu chương trình 12.

STUDY TIP.

Có thể tính tổng.

$S_1 = C_n^0 + 2aC_n^1 + ... + (n+1)a^n C_n^n$

$S_2 = C_{2n}^0 + 3a^2 C_{2n}^2 + ... + (2n+1)a^{2n} C_{2n}^{2n}$.

$S_3 = 2aC_{2n}^1 + 4a^3 C_{2n}^3 + 6a^4 C_{2n}^4 + ... + 2na^{2n-1} C_{2n}^{2n-1}$

khi xét đa thức $P(x) = x(1+x)^n$ và chứng tỏ rằng $S_1 = P'(a)$.

Xét đa thức $Q(x) = x(1+x)^{2n}$ và chứng tỏ rằng.

$2S_2 = Q'(a) + Q'(-a)$;

$2S_3 = Q'(a) - Q'(-a)$.

Ta có thể giải thích cụ thể như sau:

*** Với S_1:**

Ta khai triển đa thức $P(x) = x(1+x)^n$.

$P(x) = C_n^0 x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + ... + C_n^n x^{n+1}$, nên.

$P'(x) = C_n^0 + 2C_n^1 x + 3C_n^2 x^2 + ... + (n+1)C_n^n x^n$;

$P'(-1) = C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - ... + (-1)^n (n+1) C_n^n = S_1$.

Mặt khác $P'(x) = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} \Rightarrow P'(-1) = 0$.

Vậy $S_1 = 0$.

*** Với *S*₂:**

Xét đa thức $P(x) = (1+x)^n$, ta có: $P(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$.

Suy ra $\int_0^1 P(x)\,dx = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = S_2$.

Do đó $S_2 = \int_0^1 (1+x)^n\,dx = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

STUDY TIP.

Có thể tính tổng: $S = (b-a)C_n^0 + \frac{b^2-a^2}{2}C_n^1 + \frac{b^3-a^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}C_n^n$ khi xét đa thức:

$P(x) = (1+x)^n$ và chứng tỏ rằng $S = \int_a^b P(x)\,dx$.

Ta thường gặp bài toán với một trong 2 cận của tích phân là 0 và 1, hoặc -1. Trong một số trường hợp ta phải xét đa thức $P(x) = x^k(1+x)^n$ với $k = 1, 2, ...$

Dạng 3. Phương trình, bất phương trình chứa công thức tổ hợp.

Ví dụ 1. Cho phương trình $A_x^3 + 2C_{x+1}^{x-1} - 3C_{x-1}^{x-3} = 3x^2 + P_6 + 159$. Giả sử $x = x_0$ là nghiệm của phương trình trên, lúc này ta có

A. $x_0 \in (10;\ 13)$. **B.** $x_0 \in (12;\ 14)$. **C.** $x_0 \in (10;\ 12)$. **D.** $x_0 \in (14;\ 16)$.

Đáp án A.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3, x \in \mathbb{N}$. Phương trình đã cho có dạng:.

$$\frac{x!}{(x-3)!}+\frac{2(x+1)!}{2!(x-1)!}-\frac{3(x-1)!}{2!(x-3)!}=3x^2+6!+159.$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2)+x(x+1)-\frac{3}{2}(x-1)(x-2)=3x^2+879.$$

$\Leftrightarrow x=12$ (sử dụng lệnh SHIFT SOLVE trên máy tính).

STUDY TIP.

Khi sử dụng lệnh SHIFT SOLVE ta nên rút gọn phương trình về đa thức, không nên để dạng phân thức vì máy tính ưu tiên sử lý các dạng phương trình không chứa phân thức trước.

Ví dụ 2. Bất phương trình $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}.C_x^3 + 10$ có tập nghiệm là:

A. $S=[3;\ 5]$. **B.** $S=[3;\ 4]$. **C.** $S=\{3;\ 4;\ 5\}$. **D.** $S=\{3;\ 4\}$.

Đáp án D.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3, x \in \mathbb{N}$.

Ta có bất phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{2x!}{(2x-2)!}-\frac{x!}{(x-2)!} \leq \frac{6}{x}\frac{x!}{3!(x-3)!}+10$.

$\Leftrightarrow 2x^2-x-x^2+x \leq x^2-3x+2+10$.

$\Leftrightarrow 3x \leq 12 \Leftrightarrow x \leq 4.$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta có $3 \leq x \leq 4$. Vậy $S=\{3;\ 4\}$ là tập nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 3. Tổng của ba số hạng liên tiếp lập thành cấp số cộng trong dãy số sau $C_{23}^0; C_{23}^1; \ldots; C_{23}^{13}$ có giá trị là

A. 2451570. **B.** 3848222. **C.** 836418. **D.** 1307527.

Đáp án A.

Lời giải.

Giả sử 3 số $C_{23}^n; C_{23}^{n+1}; C_{23}^{n+2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $2C_{23}^{n+1}=C_{23}^n+C_{23}^{n+2}$.

$$\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1}=C_{23}^n+C_{23}^{n+2}$$
$$\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1}=C_{25}^{n+2}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{4.23!}{(n+1)!(22-n)!}=\frac{25!}{(n+2)!(23-n)!}.$$

$$\Rightarrow (n+2)(23-n)=150 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=8\ (tm) \\ n=13\ (l) \end{array}\right..$$

Vậy $C_{23}^8+C_{23}^9+C_{23}^{10}=2451570$.

STUDY TIP.

Một số tình huống thường gặp thì lập phương trình tổ hợp là:.

* Ba số a,b,c lập thành cấp số cộng (hoặc cấp số nhân) khi và chỉ khi $2b=a+c$ (hoặc $b^2=ac$).

* Cho tập hợp A có n phần tử, số tập con của A gồm x phần tử bằng k lần số tập con của A gồm y phần tử, tương ứng với phương trình $C_n^x=kC_n^y$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Câu 1. Trong khai triển nhị thức Newton $\left(\sqrt[3]{\dfrac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\dfrac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$, số hạng có số mũ a và b bằng nhau là

A. C_{21}^{12}. **B.** $C_{21}^{12}a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}$. **C.** $C_{21}^{9}a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}$. **D.** C_{21}^{9}.

Câu 2. Khi khai triển nhị thức Newton $G(x)=(ax+1)^n$ thì ta thấy trong đó xuất hiện hai số hạng $24x$ và $252x^2$. Lúc này giá trị của a và n là

A. $a=3;n=8$. **B.** $a=4;n=6$.

C. $a=2;n=12$. **D.** $a=3;n=7$.

Câu 3. Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $(x+1)^{10}$ là

A. $C_{10}^{5}x^5$. **B.** $C_{10}^{6}x^5$. **C.** 252. **D.** 210.

Câu 4. Hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển $\left(\dfrac{4}{x}-3x^3\right)^{15}$ là

A. $3^6C_{15}^{9}x^9$. **B.** $3^62^{18}C_{15}^{9}x^9$.

C. $3^6C_{15}^{9}$. **D.** $3^62^{18}C_{15}^{9}$.

Câu 5. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$ là

A. $2^6C_{20}^{6}$. **B.** 2^8. **C.** $2^8C_{20}^{8}$. **D.** 2^6.

Câu 6. Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2+\dfrac{1}{x}-1\right)^{10}$ là

A. 1951. **B.** 1950. **C.** 3150. **D.** -360.

Câu 7. Số hạng chứa x^8 trong khai triển $(x^3-x^2-1)^8$ là

A. $168x^8$. **B.** 168. **C.** $238x^8$. **D.** 238.

Câu 8. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2+\dfrac{1}{x^3}\right)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1+C_n^3=13n$.

A. C_{10}^{6}. **B.** C_{10}^{5}. **C.** C_{10}^{10}. **D.** C_{10}^{3}.

Câu 9. Giả sử có khai triển $(1-2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$. Tìm a_5 biết $a_0+a_1+a_2=71$.

A. $672x^5$. **B.** -672. **C.** $-672x^5$. **D.** 672.

Câu 10. Hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức $(x+2)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn $3^n C_n^0 - 3^{n-1}C_n^1 + 3^{n-2}C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = 2048$.

A. $22x^{10}$. **B.** $123x^{10}$. **C.** 123. **D.** 22.

Câu 11. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^n$ biết $n \geq 2$ là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^2 - C_{n+1}^{n-2} = 14-14n.$

A. 73789. **B.** 73788. **C.** 72864. **D.** 56232.

Câu 12. Cho khai triển: $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}, n \geq 2$ với $a_0, a_1, a_2, ..., a_{2n}$ là các hệ số. Tính tổng $S = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{2n}$ biết $\frac{a_3}{14} = \frac{a_4}{41}$.

A. $S = 3^{10}$. **B.** $S = 3^{12}$. **C.** $S = 2^{10}$. **D.** $S = 2^{12}$.

Câu 13. Số lớn nhất trong các số $C_{16}^0; C_{16}^1; C_{16}^2; ...; C_{16}^{15}; C_{16}^{16}$ là

A. C_{16}^7. **B.** C_{16}^6. **C.** C_{16}^9. **D.** C_{16}^8.

Câu 14. Hệ số lớn nhất trong khai triển $(x+2)^{10}$ là

A. C_{10}^5. **B.** 128. **C.** 15360. **D.** C_{10}^3.

Câu 15. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^2 - 3C_n^{n-1} = 11n.$

Xét khai triển $P(x) = (x+2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Hệ số lớn nhất của $P(x)$ là

A. $C_{15}^5.2^{11}$. **B.** $C_{15}^5.2^{10}$. **C.** 252. **D.** 129024.

Câu 16. Giả sử $P(x) = (2x+1)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ thỏa mãn $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_n}{2^n} = 2^{12}$. Hệ số lớn nhất trong các hệ số $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_n\}$ là

A. 126720. **B.** 495. **C.** 256. **D.** 591360.

Câu 17. Cho khai triển $(x+2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Tìm tất cả các giá trị của n để $\max\{a_0, a_1, a_2, ..., a_n\} = a_{10}$.

A. $\{29;30;31;32\}$. **B.** 12.

C. $\{12;13;14;15\}$. **D.** 16.

Câu 18. Cho n là số nguyên dương. Gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n(x+2)^n$. Tìm n sao cho $a_{3n-3} = 26n$.

A. $n = 10$. **B.** $n = 3$. **C.** $n = 4$. **D.** $n = 5$.

Câu 19. Khi khai triển nhị thức Newton $G(x) = (ax+1)^n$ thì ta thấy trong đó xuất hiện hai số hạng $24x$ và $252x^2$. Tìm a và n.

A. $a = 3; n = 8$. **B.** $a = 2; n = 7$.

C. $a=4;n=9$. **D.** $a=5;n=10$.

Câu 20. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

$$\frac{C_n^1}{2}-\frac{2C_n^2}{2^2}+\frac{3C_n^3}{2^3}-...+(-1)^{n-2}\frac{(n-1)C_n^{n-1}}{2^{n-1}}+(-1)^{n-1}\frac{nC_n^n}{2^n}=\frac{1}{32}$$

A. $n=10$. **B.** $n=9$. **C.** $n=8$. **D.** $n=7$.

Câu 21. Cho $S=1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+n(n+1)(n+2)$. Kết quả biểu diễn S theo n là

A. $S=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. **B.** $S=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

C. $S=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$. **D.** $S=n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Câu 22. Tính tổng $S=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n$ theo n ta được

A. $S=2^{n-1}-1$. **B.** $S=2^n-1$. **C.** $S=2^{n-1}$. **D.** $S=2^n$.

Câu 23. Giá trị của n thỏa mãn $C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+...+2^2C_n^n=243$. là

A. $n=7$. **B.** $n=3$. **C.** $n=5$. **D.** $n=4$.

Câu 24. Tính tổng $S=\frac{1}{2!2017!}+\frac{1}{4!2015!}+\frac{1}{6!2013!}+...+\frac{1}{2016!3!}+\frac{1}{2018!}$ theo n ta được

A. $S=\frac{2^{2018}-1}{2017!}$. **B.** $S=\frac{2^{2018}-1}{2017}$.

C. $S=\frac{2^{2018}}{2017!}$. **D.** $S=\frac{2^{2018}}{2017}$.

Câu 25. Cho số nguyên $n\ge 3$. Giả sử ta có khai triển

$(x-1)^{2n}+x(x+1)^{2n-1}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}$. Biết $T=a_0+a_2+...+a_{2n}=768$. Tính a_5.

A. $126x^5$. **B.** $-126x^5$. **C.** 126. **D.** -126.

Câu 26. Tìm n sao cho $C_{2n}^1+C_{2n}^3+...C_{2n}^{2n-1}=2048$. là

A. $n=8$. **B.** $n=6$. **C.** $n=7$. **D.** $n=9$.

Câu 27. Cho khai triển $(1+2x)^{2014}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2014}x^{2014}$. Khi đó tổng

$S=a_1+3^2a_3+...+3^{2010}a_{2011}+3^{2012}a_{2013}$ có giá trị bằng

A. $\frac{7^{2014}-5^{2014}}{6}$. **B.** $\frac{7^{2014}-5^{2014}}{2}$.

C. $\frac{7^{2014}}{6}$. **D.** $\frac{5^{2014}}{2}$.

Câu 28. Tính tổng $S=C_{100}^0-5C_{100}^1+5^2C_{100}^2-...+5^{100}C_{100}^{100}$

A. 6^{100}. **B.** 4^{100}. **C.** 2^{300}. **D.** 3^{200}.

Câu 29. Đẳng thức nào sau đây **sai?**

A. $2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n$.

B. $0=C_n^0-C_n^1+C_n^2-...+(-1)^nC_n^n$.

C. $1=C_n^0-2C_n^1+4C_n^2-...+(-2)^n C_n^n$.

D. $3^n=C_n^0+2C_n^1+4C_n^2+...+2^n C_n^n$.

Câu 30. Khai triển $(2x+y)^5$ ta được kết quả là

A. $32x^5+16x^4y+8x^3y^2+4x^2y^3+2xy^4+y^5$.

B. $32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$.

C. $2x^5+10x^4y+20x^3y^2+20x^2y^3+10xy^4+y^5$.

D. $32x^5+10000x^4y+8000x^3y^2+400x^2y^3+10xy^4+y^5$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. **Đáp án B.**

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}=\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{6}}\right)^{21}=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^k\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}\right)^k\left(b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{6}}\right)^{21-k}=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^k a^{\frac{k}{3}-\frac{21-k}{6}}b^{-\frac{k}{6}+\frac{21-k}{2}}$$

Hệ số của số hạng có số mũ a và b bằng nhau ứng với: $\frac{k}{3}-\frac{21-k}{6}=-\frac{k}{6}+\frac{21-k}{2}\Leftrightarrow k=12$

Vậy số hạng cần tìm là $C_{21}^{12}a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}$.

Câu 2. **Đáp án A.**

Ta có $G(x)=(ax+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(ax)^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k x^k$

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases}C_n^1ax=24x\\C_n^2a^2x^2=252x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}na=24\\\frac{n(n-1)}{2}a^2=252\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n^2a^2=576\\\frac{n(n-1)}{2}a^2=252\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}na=24\\\frac{2n^2}{n(n-1)}=\frac{16}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}na=24\\14n=16(n-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=8\\a=3\end{cases}$$

Vậy $a=3;n=8$ là các số cần tìm.

Câu 3. **Đáp án C.**

Số hạng tổng quát sau khi khai triển $T_{k+1}=C_{10}^k x^k$

Số hạng chứa x^5 trong khai triển là $C_{10}^5x^5$. Đề bài hỏi hệ số nên ta chọn C.

Câu 4. **Đáp án D.**

Ta có $\left(\frac{4}{x}-3x^3\right)^{15}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k(ax)^k=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k\left(\frac{4}{x}\right)^k\left(-3x^3\right)^{15-k}=\sum_{k=0}^{15}(-3)^{15-k}4^kC_{15}^kx^{45-4k}$

Số hạng chứa x^9 tương ứng với $45-4k=9\Leftrightarrow k=9$ nên hệ số của x^9 trong khai triển trên là $(-3)^6 4^9C_{15}^9=3^6 4^9C_{15}^9$.

Câu 5. **Đáp án C.**

Ta có $\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}=\sum_{k=0}^{20}C_{20}^{k}\left(2\sqrt{x}\right)^{k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20-k}=\sum_{k=0}^{20}2^{k}C_{20}^{k}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{k}\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{20-k}=\sum_{k=0}^{20}2^{k}C_{20}^{k}x^{\frac{5k-40}{6}}$

Số hạng không chứa x tương ứng với $\frac{5k-40}{6}=0\Leftrightarrow k=8$. Do vậy số hạng đó là $2^{8}C_{20}^{8}$.

Câu 6. Đáp án A.

Từ lý thuyết ta có công thức tổng quát như sau: Với $0\le q\le p\le n$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $\left(x^{2}+\frac{1}{x}-1\right)^{10}$ là

$$T_{p}=C_{10}^{p}C_{p}^{q}\left(x^{2}\right)^{10-p}\left(\frac{1}{x}\right)^{p-q}(-1)^{q}=C_{10}^{p}C_{p}^{q}(-1)^{q}x^{20+q-3p}$$

Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với $20+q-3p=0\Leftrightarrow 3p-q=20$. Mà $0\le q\le p\le n$ và $q,p,n\in\mathbb{N}$ nên $(p;q)\in\{(7;1),(8;4)(9;7),(10;10)\}$. Lúc này số hạng không chứa x trong khai triển là $(-1)^{1}C_{10}^{7}C_{7}^{1}+(-1)^{4}C_{10}^{8}C_{8}^{4}+(-1)^{10}C_{10}^{10}C_{10}^{10}+(-1)^{7}C_{10}^{9}C_{9}^{7}=1951$

Câu 7. Đáp án C.

Từ lý thuyết ta có công thức tổng quát như sau: Với $0\le q\le p\le n$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $\left(x^{3}-x^{2}-1\right)^{8}$ là

$$T_{p}=C_{8}^{p}C_{p}^{q}\left(x^{3}\right)^{8-p}\left(-x^{2}\right)^{p-q}(-1)^{q}=C_{8}^{p}C_{p}^{q}x^{24-3p}x^{2p-2q}(-1)^{p}$$

Ta có: $24-3p+2p-2q=8\Leftrightarrow 24-p-2q=8\Leftrightarrow p+2q=16$. Suy ra $(p;q)\in\{(8;4)(6;5)\}$.

Lúc này hệ số của x^{8} trong khai triển là $C_{8}^{8}C_{8}^{4}(-1)^{8}+C_{10}^{6}C_{6}^{5}(-1)^{6}=238$

Câu 8. Đáp án A.

Theo giả thiết ta có:

$$C_{n}^{1}+C_{n}^{3}=13n\Leftrightarrow n+\frac{n!}{3!(n-3)!}=13n\Leftrightarrow n+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=13n\Leftrightarrow n\left(n^{2}-3n-70\right)=0\Leftrightarrow n=10$$

Khi đó ta có $\left(x^{2}+\frac{1}{x^{3}}\right)^{n}=\left(x^{2}+\frac{1}{x^{3}}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}\left(x^{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{x^{3}}\right)^{10-k}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}x^{5k-30}$

Số hạng không chứa x tương ứng với $5k-30=0\Leftrightarrow k=6$. Vậy số hạng không chứa x trong khai triển đã cho là $C_{10}^{6}=210$.

Câu 9. Đáp án B.

Ta cần biết công thức tổng quát của a_k để thay vào điều kiện $a_0+a_1+a_2=71$, rồi sau đó giải ra để tìm n. Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n=(1-2x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-2x)^k=\sum_{k=0}^{n}(-2)^kC_n^kx^k.$$

Do đó $a_k=(-2)^k C_n^k, \forall k\in\{0,1,2,...,n\}$.. Khi đó theo giả thiết ta có

$71=a_0+a_1+a_2=(-2)^0 C_n^0+(-2)^1 C_n^1+(-2)^2 C_n^2=1-2n+2n(n-1)\Leftrightarrow n^2-2n-35=0\Leftrightarrow n=7.$

Như vậy $a_5=(-2)^5 C_7^5=-672$..

Câu 10. Đáp án D.

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$3^n C_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2-...+(-1)^n C_n^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 3^{n-k}C_n^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k 3^{n-k}=(-1+3)^n=2^n.$

Do đó $2^n=2048=2^{11}\Leftrightarrow n=11$. Như vậy ta có $(x+2)^n=(x+2)^{11}=\sum_{k=0}^{11}C_{11}^k x^k 2^{11-k}$, suy ra hệ số của x^{10} ứng với $k=10$ và đó là số $C_{11}^{10}.2=22$

Câu 11. Đáp án A.

Ta có $A_n^2-C_{n+1}^{n-2}=14-14n\Leftrightarrow n(n-1)-\dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}=14-14n$

$\Leftrightarrow (n-1)\left[n-\dfrac{n(n+1)}{6}+14\right]=0\Leftrightarrow (n-1)(n^2-5n-84)=0\Leftrightarrow n=12$ vì $n\ge 2$.

Lúc này ta có $\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)^n=\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)^{12}$

Từ công thức tổng quát tam thức Newton ta có với $0\le q\le p\le 12$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)^{12}$ là

$T_p=C_{12}^p C_p^q 1^{12-p}(x)^{p-q}\left(\dfrac{1}{x}\right)^q=C_{12}^p C_p^q x^{p-q-q}=C_{12}^p C_p^q x^{p-2q}$

Ta có: $p-2q=0\Leftrightarrow p=2q$. Kết hợp với điều kiện ở trên ta có:

$(p;q)\in\{(0;0),(2;1)(4;2),(6;3),(8;4),(10;5),(12;6)\}$. Suy ra số hạng không chứa x là

$C_{12}^0C_0^0+C_{12}^2C_2^1+C_{12}^4C_4^2+C_{12}^6C_6^3+C_{12}^8C_8^4+C_{12}^{10}C_{10}^5+C_{12}^{12}C_{12}^6=73789$

Câu 12. Đáp án A.

Theo giả thiết ta có: $P(x)=(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}$

Thay $x=1$ ta được $S=a_0+a_1+a_2+...+a_{2n}=P(1)=3^n$. Như vậy ta chỉ cần xác định được n

Với $0\le q\le p\le n$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $(1+x+x^2)^n$ là

$T_p=C_n^pC_p^q1^{n-p}x^{p-q}(x^2)^q=C_n^pC_p^qx^{p+q}$

Hệ số của x^3 ứng với: $\begin{cases} p+q=3 \\ 0\le q\le p\le n \end{cases} \Rightarrow (p;q)\in\{(3;0),(2;1)\}$.

Suy ra $a_3 = C_n^3C_3^0 + C_n^2C_2^1 = C_n^3 + 2C_n^2$.

Hệ số của x^4 ứng với: $\begin{cases} p+q=4 \\ 0\le q\le p\le n \end{cases} \Rightarrow (p;q)\in\{(4;0),(3;1),(2;2)\}$.

Suy ra $a_4 = C_n^4C_4^0 + C_n^3C_3^1 + C_n^2C_2^2 = C_n^4 + 3C_n^3 + C_n^2$.

$$\frac{a_3}{14} = \frac{a_4}{41} \Leftrightarrow \frac{1}{14}\frac{n(n-1)(n+4)}{6} = \frac{1}{41}\left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{14}\frac{(n+4)}{3} = \frac{1}{41}\left(\frac{n^2-5n+6}{12} + n - 1\right) \Leftrightarrow 7n^2 - 33n - 370 = 0 \Leftrightarrow n = 10.$$

Vậy $S = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{2n} = 3^{10}$

Câu 13. Đáp án D.

Vì $C_n^k = C_n^{n-k}$ nên ta có $\{C_{16}^0, C_{16}^1, ..., C_{16}^8\} = \{C_{16}^{16}, C_{16}^{15}, ..., C_{16}^8\}$, suy ra ta chỉ cần tìm số lớn nhất trong các số $C_{16}^0, C_{16}^1, ..., C_{16}^7, C_{16}^8$. Bằng tính toán trực tiếp, ta có

$C_{16}^0 = 1, C_{16}^1 = 16, C_{16}^2 = 120, C_{16}^3 = 560, C_{16}^4 = 1820, C_{16}^5 = 4368, C_{16}^6 = 8008, C_{16}^7 = 11440, C_{16}^8 = 12870$

Như vậy $C_{16}^0 < C_{16}^1 < C_{16}^2 < ... < C_{16}^7 < C_{16}^8$

Do đó: $C_{16}^8 = \max\{C_{16}^0; C_{16}^1; C_{16}^2; ...; C_{16}^{15}; C_{16}^{16}\}$

Câu 14. Đáp án C.

Ta có $a_k = 2^{10-k}C_{10}^k$ với $k = 0,1,2,...,10$. Bài toán tương đương với tìm $k\in\{0,1,2,...,10\}$ sao cho a_k lớn nhất. Xét bất phương trình sau:

$$a_k \le a_{k+1} \Leftrightarrow 2^{10-k}C_{10}^k \le 2^{9-k}C_{10}^{k+1} \Leftrightarrow 2\frac{10!}{k!(10-k)!} \le \frac{10!}{(k+1)!(9-k)!}$$

$$\Leftrightarrow 2(k+1) \le 10 - k \Leftrightarrow k \le \frac{8}{3} \Leftrightarrow k\in\{0,1,2\}$$

Từ đây ta có: $\begin{cases} a_k \le a_{k+1} \forall k\in\{0;1;2\} \\ a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = \dfrac{8}{3}, k\notin N \\ a_k > a_{k+1} \forall k\in\{3;4;....10\} \end{cases}$

Do đó: $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5 > ... > a_{10}$ hay a_3 là hệ số lớn nhất cần tìm. $a_3 = C_{10}^3.2^7 = 15360$.

Câu 15. Đáp án B.

$A_n^2-3.C_n^{n-1}=11n \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!}-3n=11n.$

$\Leftrightarrow n(n-1)-3n=11n \Leftrightarrow n=15.$

$(x+2)^{15}=\sum\limits_{k=0}^{15} C_{15}^k x^k.2^{15-k}$

Xét bất phương trình: $a_k \le a_{k+1} \Leftrightarrow C_{15}^k.2^{15-k} \le C_{15}^{k+1}.2^{14-k} \Leftrightarrow$

$2\dfrac{15!}{k!.(15-k)!} \le 2\dfrac{15!}{(k+1)!.(14-k)!} \Leftrightarrow \dfrac{2}{15-k} \le \dfrac{1}{k+1} \Leftrightarrow k \le \dfrac{13}{3}, k \in N \Rightarrow k \in \{0,1,2,3,4\}$

Từ đây ta có: $\begin{cases} a_k \le a_{k+1} \forall k \in \{0,1,2,3,4\} \\ a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k=\dfrac{13}{3}, k \notin N \\ a_k > a_{k+1} \forall k \in \{5;6;....15\} \end{cases}$

Do đó: $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 > a_6 > a_7 > ... > a_{15}$

Vậy $a_5 = max\left\{a_i \middle| i=\overline{0,15}\right\} = C_{15}^5.2^{10}$

Câu 16. Đáp án A

$2^{12}=a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+......+\dfrac{a^n}{2^n}=a_0+a_1\left(\dfrac{1}{2}\right)+a_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+...+a_n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$=P\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(1+2.\dfrac{1}{2}\right)^n=2^n$

$\Rightarrow n=12$

$(2x+1)^{12}=\sum\limits_{k=0}^{12} C_{12}^k (2x)^k = \sum\limits_{k=0}^{12} C_{12}^k.x^k 2^k.$

$\Rightarrow a_k = C_{12}^k.2^k \;\forall k\overline{0,12} \Rightarrow a_k \le a_{k+1} \Leftrightarrow C_{12}^k.2^k \le C_{12}^{k+1}.2^{k+1}$

$\dfrac{12!}{k!.(12-k)!} \le \dfrac{12!}{(k+1)!.(11-k)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{12-k} \le \dfrac{2}{k+1}$

$\Leftrightarrow k \le \dfrac{23}{3}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \{0,1,2,3,...7\}$

Từ đây ta có: $\begin{cases} a_k \le a_{k+1} \forall k \in \{0,1,2,3,...7\} \\ a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k=\dfrac{23}{3}, k \notin N \\ a_k > a_{k+1} \forall k \in \{8;9;....11\} \end{cases}$

Do đó: $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < ..... < a_8 > a_9 > .... > a_{12}$

Vậy $a_5 = max\left\{a_i \middle| i=\overline{0,12}\right\} = C_{12}^8.2^8$