**A.** $4$ . **B.** $5$ . **C.** $6$ . **D.** $7$ .

***Lời giải***

**Chọn B.**

Phương trình $\Leftrightarrow \sin\left[\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+2\pi\right]-3\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-4\pi\right]=1+2\sin x$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-3cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=1+2\sin x \Leftrightarrow cos2x+3\sin x=1+2\sin x$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+3\sin x=1+2\sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$$

Mà $x\in\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)$ nên $x\in\left\{\pi;2\pi;\frac{13\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{17\pi}{6}\right\}$

Vậy phương trình có 5 nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)$.

**Ví dụ 6.** **Sử dụng công thức hạ bậc cao**

Cho các phương trình sau:

$$(1)\ \sin^8 x+cos^8x=\frac{17}{16}cos^2 2x$$
$$(2)\ \sin^8 x+cos^8x=\frac{17}{32}$$
$$(3)\ \sin^8 x+cos^8x=\frac{97}{128}$$
$$(4)\ \sin^8 2x+cos^8 2x=\frac{1}{8}$$

Phương trình không tương đương với một trong các phương trình còn lại là:

**A.** $(1)$ . **B.** $(2)$. **C.** $(3)$. **D.** $(4)$.

***Lời giải***

**Chọn C.**

Ta có

$$\sin^8 x+cos^8x=\left(\sin^2 x\right)^4+\left(cos^2 x\right)^4=\left(\frac{1-cos2x}{2}\right)^4+\left(\frac{1+cos2x}{2}\right)^4=\frac{1}{8}\left(cos^4 2x+6cos^2 2x+1\right)$$

Giải $(1)$ : $\frac{1}{8}\left(cos^4 2x+6cos^2 2x+1\right)=\frac{17}{16}cos^2 2x \Leftrightarrow 2cos^4 2x-5cos^2 2x+2=0 \Leftrightarrow cos^2 2x=\frac{1}{2}$

Giải $(2)$ : $\frac{1}{8}\left(cos^4 2x+6cos^2 2x+1\right)=\frac{17}{32} \Leftrightarrow 4cos^4 2x+24cos^2 2x-13=0 \Leftrightarrow cos^2 2x=\frac{1}{2}$

Giải $(3)$: $\frac{1}{8}\left(cos^4 2x+6cos^2 2x+1\right)=\frac{97}{128} \Leftrightarrow 2cos^4 2x-12cos^2 2x-\frac{81}{8}=0 \Leftrightarrow cos^2 2x=\frac{3}{4}$

Giải $(4)$: $\frac{1}{8}\left(cos^4 4x+6cos^2 4x+1\right)=\frac{1}{8} \Leftrightarrow 2cos^4 4x+12cos^2 4x=0 \Leftrightarrow cos^2 4x=0$

$\Leftrightarrow \left(2\cos^2 2x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \cos^2 2x=\frac{1}{2}.$

Vậy phương trình (3) không tương đương với các phương trình còn lại.

**STUDY TIP**

$+)\ \sin^8 x+cos^8 x=\frac{1}{8}\left(cos^4 2x+6cos^2 2x+1\right)$

$+)\ (t+1)^4+(t-1)^4=2t^4+12t^2+2$

**Ví dụ 7.** ***Biểu diễn tổng của các đại lượng không âm***

Phương trình $\cos 2x-\cos 6x+4\left(3\sin x-4\sin^3 x+1\right)=0$ có phương trình tương đương là:

**A.** $\cos x=0$.
**B.** $\sin 3x+1=0$.
**C.** $\cos x(\sin 3x+1)=0$.
**D.** $\sin x-1=0$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

$\Rightarrow$ Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1-\left(1-2\sin^2 3x\right)+4\left(\sin 3x+1\right)=0.$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+2\sin^2 3x+4\sin 3x+2=0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x+2\left(\sin 3x+1\right)^2=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=0\\ \sin 3x+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-1\end{array}\right.\\ -4\sin^3 x+\sin 3x+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow \sin x-1=0.$$

**Lưu ý:** Có thể thử các nghiệm trong các đáp án vào phương trình đã cho nếu thỏa mãn thì 2 phương trình tương đương.

**STUDY TIP**

$$\begin{cases}A\ge 0\\ B\ge 0\end{cases} \Rightarrow A+B=0 \Leftrightarrow \begin{cases}A=0\\ B=0\end{cases}$$

**Ví dụ 8.** ***Đặt ẩn phụ - công thức nhân ba***

Phương trình $\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)$ có tổng các nghiệm trên $[0;2\pi]$ là:

**A.** $\frac{9\pi}{5}$. **B.** $\frac{9\pi}{15}$. **C.** $\frac{10\pi}{3}$. **D.** $\frac{10\pi}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Đặt $t=\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{3\pi}{10}-t\Rightarrow\frac{3x}{2}=\frac{9\pi}{10}-3t$

$\Rightarrow$ Phương trình $\Leftrightarrow \sin t=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{9\pi}{10}-3t\right)\Leftrightarrow \sin t=\frac{1}{2}\sin(\pi-3t)\Leftrightarrow \sin t=\frac{1}{2}\sin(3t)$

$\Leftrightarrow 2\sin t=3\sin t-4\sin^3 t\Leftrightarrow \sin t(1-4\sin^2 t)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin t=0\\ \sin^2 t=\frac{1}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=k\pi(k\in\mathbb{Z})\\ \cos 2t=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=k\pi\\ t=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{5}-k2\pi\Rightarrow x=\frac{3\pi}{5}\in[0;2\pi]\\ x=\frac{14\pi}{15}-k2\pi\Rightarrow x=\frac{14\pi}{15}\in[0;2\pi]\\ x=\frac{4\pi}{15}-k2\pi\Rightarrow x=\frac{4\pi}{15}\in[0;2\pi]\end{array}\right.$

Vậy tổng các nghiệm trên $[0;2\pi]$ của phương trình là: $\frac{3\pi}{5}+\frac{14\pi}{15}+\frac{14\pi}{15}=\frac{9\pi}{5}$.

**Ví dụ 9.** ***Đặt ẩn phụ không hoàn toàn***

Phương trình $\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\frac{x}{2}(\sin x+3)+\sin x+2=0$ có các nghiệm là:

**A.** $x=k2\pi;k\in\mathbb{Z}.$. **B.** $x=k\pi;k\in\mathbb{Z}.$. **C.** $x=(2k+1)\pi;k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=k\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}.$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Đặt $t=\sin^2\frac{x}{2}\Rightarrow t\in[0;1],\forall x\in\mathbb{R}.$

Phương trình tương đương $t^2-(\sin x+3)t+\sin x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=1 & (1)\\ t=\sin x+2(2)\end{array}\right.$

+ Với $t=1\Leftrightarrow\sin^2\frac{x}{2}=1\Leftrightarrow\frac{1-\cos x}{2}=1\Leftrightarrow\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\Leftrightarrow x=(2k+1)\pi,(k\in\mathbb{Z})$

+ Với $t=\sin x+2\Leftrightarrow\sin^2\frac{x}{2}=\sin x+2$

$$\begin{cases}\sin^2\dfrac{x}{2}\le 1\\ \sin x+2\ge 1\end{cases}\Rightarrow \sin^2\dfrac{x}{2}=\sin x+2\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2\dfrac{x}{2}=1\\ \sin x+2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=-1\\ \sin x=-1\end{cases}\quad \text{(vô nghiệm)}$$

Kết luận: Vậy nghiệm của phương trình là $x=(2k+1)\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

***Nhận xét:***

+ Với phương trình này hoàn toàn có thể giải bằng phương pháp đưa về dạng tích $A.B=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=0\\ B=0\end{array}\right.$.

+ Với phương trình $\sin^2\dfrac{x}{2}=\sin x+2$ (2) có thể giải cách khác như sau:

$(2)\Leftrightarrow\dfrac{1-\cos x}{2}=\sin x+2\Leftrightarrow 2\sin x+\cos x=-3$, phương trình này vô nghiệm do $2^2+1^2<(-3)^2$.

**STUDY TIP**

$a\sin x+b\cos x=c$ có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+b^2\ge c^2$.

**Ví dụ 10.** ***Phương pháp đánh giá***

Với phương trình $3\cos 4x+(\cos 2x-\sin x)^2=7\ (*)$ thì:

**A.** trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 1 nghiệm.

**B.** trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 2 nghiệm

**C.** trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 3 nghiệm.

**D.** trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 4nghiệm.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có $3\cos 4x\le 3$

$(\cos 2x-\sin x)^2=|\cos 2x-\sin x|^2\le(|\cos 2x|+|\sin x|)^2\le 2^2$

$\Rightarrow(\cos 2x-\sin x)^2\le 4\Rightarrow 3\cos 4x+(\cos 2x-\sin x)^2\le 7$

Phương trình (*) xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}3\cos 4x=3\\ (\cos 2x-\sin x)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 4x=1\\ \cos 2x-\sin x=2(1)\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 4x=1\\ \cos 2x-\sin x=-2(2)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 4x=1\\ \cos 2x=1\ \text{(I)}\\ \sin x=-1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 4x=1\\ \cos 2x=-1\ \text{(II)}\\ \sin x=1\end{cases}\end{array}\right.$

+ Giải (I): $\begin{cases} 2\cos^2 2x-1=1 \\ \cos 2x=1 \\ \sin x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 2x=1 \\ \cos 2x=1 \\ \sin x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x=1 \\ \sin x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2\sin^2 x=1 \\ \sin x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=0 \\ \sin x=1 \end{cases}$

(vô nghiệm)

+ Giải (II): $\begin{cases} \cos^2 2x=1 \\ \cos 2x=-1 \\ \sin x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x=-1 \\ \sin x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2\sin^2 x=-1 \\ \sin x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi (k\in\mathbb{Z})$

Vậy phương trình ban đầu có 1 nghiệm thuộc $[0;2\pi]$ .

***Chú ý:*** Có thể giải phương trình này bằng cách đưa về phương trình bậc 4 với $\sin x$ sẽ tự nhiên hơn. Tuy nhiên với ví dụ này tôi muốn minh họa thêm cho các bạn một phương pháp giải khác để linh hoạt khi làm bài.

**STUDY TIP**

(1) $\cos 2x-\sin x=2 \Leftrightarrow \cos 2x=\sin x+2$ . Mà $\begin{cases} \cos 2x\le 1 \\ \sin x+2\ge 1 \end{cases}$

+ suy ra (1) xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \cos 2x=1 \\ \sin x+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x=1 \\ \sin x=-1 \end{cases}$

+ suy ra (1) xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \cos 2x=-1 \\ \sin x+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x=-1 \\ \sin x=1 \end{cases}$

**Lưu ý:** Đối với phương trình (1) và (2) ta có thể đưa ngay cách giải ngay bằng cách đưa về phương trình bậc 2 đối với $\sin x$ bằng cách sử dụng công thức $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ . Tuy nhiên một số phương trình không đưa về được như vậy. Ví dụ $\sin x+\sin 5x=2$ (bạn đọc tự giải)

**Ví dụ 11.** ***Phương pháp hàm số***

Phương trình $\sqrt{\sin^2 x+1}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sqrt{\cos^2 x+1}$ (*) có tổng các nghiệm trong khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là:

**A.** $0$ . **B.** $\frac{\pi}{2}$ . **C.** $\frac{\pi}{4}$ **D.** $\frac{\pi}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 x+1}=-\text{sinx}+\cos x+\sqrt{\cos^2 x+1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 x+1}+\text{sinx}=\cos x+\sqrt{\cos^2 x+1}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+1}+t$ trên $(0;1)$ .

Với $\forall t_1,t_2\in(0;1)$ $va$ $t_1\neq t_2$ ta xét biểu thức

$$\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}=\frac{\sqrt{t_1^2+1}+t_1-\sqrt{t_2^2+1}-t_2}{t_1-t_2}=\frac{t_1^2-t_2^2}{\left(\sqrt{t_1^2+1}+\sqrt{t_2^2+1}\right)(t_1-t_2)}+\frac{t_1-t_2}{t_1-t_2}=$$

$$=\frac{t_1^2-t_2^2}{\left(\sqrt{t_1^2+1}+\sqrt{t_2^2+1}\right)(t_1-t_2)}+1>0.$$

Suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $(0;1)$, Suy ra phương trình (1) tuuongw đương

$$f(\text{sinx})=f(\cos x)\Leftrightarrow \text{sinx}=\cos x\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$$

Vậy phương trình (*) có 1 nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là $\frac{\pi}{4}$.

***Lưu ý:*** Đối với việc chứng minh hàm số đồng biến trên $(a;b)$ của hàm số

$y=f(x),\begin{cases}\forall x_1,x_2\in(a;b)\\ x_1\neq x_2\end{cases}$, xét tỉ số $\frac{f(\mathrm{x}_1)-f(\mathrm{x}_2)}{x_1-x_2}=m$

+ Nếu $m>0\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(a;b)$.

+ Nếu $m<0\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $(a;b)$.

+ Nếu $=0\Rightarrow$ Hàm số không đổi trên $(a;b)$.

**STUDY TIP**

+ Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì $\forall x_1,x_2\in(a;b)$:

$f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow x_1<x_2$

$f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow x_1<x_2$

$\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2$.

## V. Một số phương trình lượng giác đưa về dạng tích

**Ví dụ 1.** Phương trình $\sin x+4\cos x=2+\sin 2x$ có số nghiệm trên $(0;2\pi)$ là:

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

**Lời giải**

Chọn C.

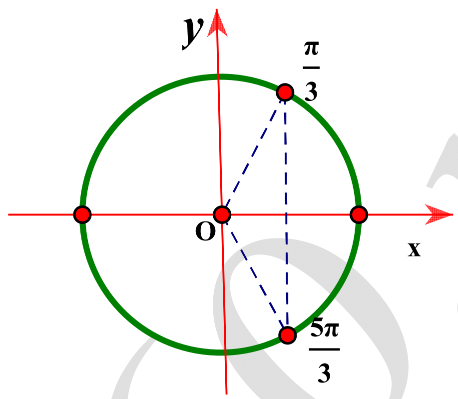
Phương trình $\Leftrightarrow \sin x+4\cos x=2+2\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow \sin x(1-2\cos x)-2(1-2\cos x)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-2)(1-2\cos x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-2=0\\1-2\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=2(VN)\\\cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy phương trình có 2 nghiệm trên $(0;2\pi)$ là $x=\dfrac{\pi}{3}$ và $x=\dfrac{5\pi}{3}$.




**Ví dụ 2.** Phương trình $1+\cos x+\sin x+\cos 2x+\sin 2x=0$ có các nghiệm dạng $x_1=a+k2\pi, x_2=b+k2\pi, x_3=c+k2\pi, x_4=d+k2\pi$. Với $0<a,b,c,d<2\pi$ thì $a+b+c+d$ là:

**A.** $0$. **B.** $\dfrac{7\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{5\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{9\pi}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Phương trình $\Leftrightarrow 1+\sin 2x+\cos x+\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)^2+(\cos x+\sin x)+(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(\cos x+\sin x+1+\cos x-\sin x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=0\\2\cos x+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\\\cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

Nghiệm trên biểu diễn trên đường tròn lượng giác ta viết lại các nghiệm phương trình là:

$x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi \vee x=\dfrac{7\pi}{4}+k2\pi \vee x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \vee x=\dfrac{4\pi}{3}+k2\pi \Rightarrow a+b+c+d=\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{7\pi}{4}+\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{4\pi}{3}=\dfrac{9\pi}{2}$.

**Ví dụ 3.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $a$ để phương trình $\cos^3 2x-\cos^2 2x-a\sin^2 x=0$ có nghiệm $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$?

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$ **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Phương trình $\Leftrightarrow \cos^3 2x - \cos^2 2x - a\dfrac{1-\cos 2x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^3 2x - 2\cos^2 2x + a\cos 2x - a = 0 \Leftrightarrow (\cos 2x - 1)(2\cos^2 2x - a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 (1) \\ \cos^2 2x = -\dfrac{a}{2} (2) \end{array}\right.$

-Giải (1) $\Rightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, các nghiệm này không thuộc $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$.

-Giải (2) có $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 2x \in \left(0;\dfrac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \dfrac{1}{2} < \cos 2x < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{4} < \cos^2 2x < 1$

Suy ra phương trình (2) có nghiệm thuộc $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} < \dfrac{-a}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < a < -\dfrac{1}{2}$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của $a$ là $-1$.

**Ví dụ 4.** Phương trình $(2\sin x + 1)(4\cos 4x + 2\sin x) + 4\cos^3 x = 3$ nhận các giá trị $x = \arccos m + k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ làm nghiệm thì giá trị $m$ là:

**A.** $m = \dfrac{1}{4}$. **B.** $-\dfrac{1}{4}$. **C.** $m = \dfrac{1}{16}$ **D.** $m = -\dfrac{1}{16}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Phương trình $\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(4\cos 4x + 2\sin x) + 4(1 - \sin^2 x) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(4\cos 4x + 2\sin x) + (1 - 2\sin x)(1 + 2\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(4\cos 4x + 1) = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -\dfrac{1}{2} \\ \cos 4x = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{1}{4}\arccos(-\dfrac{1}{4}) + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = -\dfrac{1}{4}\arccos(-\dfrac{1}{4}) + k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy $m = \dfrac{1}{4}$

| STUDY TIP |
|---|
| |

$$\cos^2 x = (1-\sin x)(1+\sin x)$$
$$\sin^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x)$$

**Ví dụ 5.** Phương trình $\sin 2x + 2\cos x = \cos 2x - \sin x$ là phương trình hệ quả của phương trình:

**A.** $\sin(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ **B.** $\sin 2x = 0$ **C.** $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ **D.** $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

**Lời giải**

**Chọn C**

pt $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 2\cos x = -2\sin x^2 - \sin x + 1$

$\Leftrightarrow (\sin x+1)(2\cos x + 2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \cos x + \sin x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$

**Lưu ý:** *Phương trình bậc hai* $at^2 + bt + c = 0 (a \neq 0)$ *có hai nghiệm* $t_1, t_2$ *thì* $at^2 + bt + c = a(t-t_1)(t-t_2)$

## VI. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CHỨA ĐIỀU KIỆN

**Ví dụ 1.** Phương trình $\frac{\sin 5x}{5\sin x} = 1$ có số nghiệm là:

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** vô số

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \pm 1$

$Pt \Leftrightarrow \sin 5x - 5\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin 5x - \sin x - 4\sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 3x.\sin 2x - 4\sin x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 3x.2\sin x\cos x - 4\sin x = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin x(\cos 3x\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0 (l)\\ \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) - 1 = 0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x + \cos 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1\\ \cos 2x = -\frac{3}{2} (VN)\end{array}\right.$

Với $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0$ (loại vì không TMĐK)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

**Ví dụ 2.** Phương trình $3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = (2+3\sqrt{2})\cos x$ có các nghiệm dạng $x = \alpha + k2\pi; x = \beta + k2\pi, k \in Z, 0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ thì $\alpha.\beta$ bằng:

**A.** $\frac{\pi^2}{12}$ **B.** $-\frac{\pi^2}{12}$ **C.** $\frac{7\pi}{12}$ **D.** $\frac{\pi^2}{12^2}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \pm 1$

$$Pt \Leftrightarrow 3\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin^4 x = 2\cos x.\sin^2 x + 3\sqrt{2}\cos x.\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 3\cos x(\cos x - \sqrt{2}\sin^2 x) - 2\sin^2 x(\cos x - \sqrt{2}\sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sqrt{2}\sin^2 x)(3\cos x - 2\sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0(1) \\ 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0(2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = -\sqrt{2}(VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x = -2(VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy $\alpha = \frac{\pi}{4}; \beta = \frac{\pi}{3}; \alpha.\beta = \frac{\pi^2}{12}$

**Ví dụ 3.** Phương trình $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 4x}$ có tổng các nghiệm trên $(0;\pi)$ là:

**A.** $\frac{\pi}{6}$ **B.** $\frac{\pi}{6}$ **C.** $\frac{2\pi}{3}$ **D.** $\pi$

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin x \neq \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq \pm 1 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin x \neq \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$$Pt \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{4\sin x\cos x\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x + \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x(1 - 2\sin^2 x) + 1 - 2\sin^2 x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x(1 - 2\sin^2 x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0(l) \\ 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1(l) \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}$$

=>có 2 nghiệm trên $(0;\pi)$ là x=$\frac{\pi}{6}$ và x=$\frac{5\pi}{6}$

Vậy tổng các nghiệm trên $(0;\pi)$ là: $\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi$

**Ví dụ 4.** Phương trình $\dfrac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0;3\pi)$ ?

**A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}\cos x\neq 0\\ \tan x\neq -\sqrt{3}\end{array}\right.(*)$

$Pt\Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x-\sin x-1=0\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\sin x+2\cos x-1=0$

$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(\sin x+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. k\in\mathbb{Z}$

Kết hợp điều kiện (*)=>Nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$

Vậy có hai nghiệm thuộc $(0;3\pi)$ là $x=\dfrac{\pi}{3}$ và $x=\dfrac{7\pi}{3}$

**Ví dụ 5.** Phương trình $\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin(x+\frac{\pi}{4})}{1+\tan x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ có các nghiệm dạng $x=\alpha+k2\pi; x=\beta+k2\pi,\alpha\neq\beta;k\in Z,-\pi<\alpha,\beta<\pi$ thì $\alpha^2+\beta^2$ là:

**A.** $\dfrac{\pi^2}{36}$ **B.** $\dfrac{35\pi^2}{36}$ **C.** $\dfrac{13\pi^2}{18}$ **D.** $\dfrac{15\pi^2}{18}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l}\cos x\neq 0\\ \tan x\neq -1\end{array}\right.(*)$

$$Pt\Leftrightarrow \frac{(1+\sin x+\cos 2x)\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}=\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+\sin x+1-2\sin^2 x)\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}=1$$

$$\Rightarrow 2+\sin x-2\sin^2 x=1\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện(*) ta có nghiệm của pt là $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2=\dfrac{\pi^2}{36}+\dfrac{25\pi^2}{36}=\dfrac{26\pi^2}{36}=\dfrac{13\pi^2}{18}$

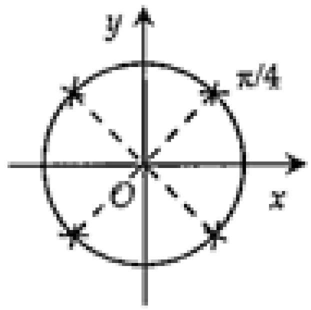
**Ví dụ 6.** Phương trình $\dfrac{\sin^4 2x+\cos^4 2x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}=\cos^4 x\,(1)$ có số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là:

**A.** 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $\begin{cases} \sin(x+\dfrac{\pi}{4})\neq 0 \\ \sin(\dfrac{\pi}{4}-x)\neq 0 \\ \cos(x+\dfrac{\pi}{4})\neq 0 \\ \cos(\dfrac{\pi}{4}-x)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x\neq \dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x\neq \dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x\neq -\dfrac{\pi}{4}+k\pi \end{cases}$




Ta có: $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\dfrac{\pi}{4}\tan x}\cdot\dfrac{4}{1-\tan\dfrac{\pi}{4}\tan x}=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\cdot\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}=1$

$(*)\Leftrightarrow \sin^4 2x+\cos^4 2x=\cos^4 4x \Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2}\sin^2 4x=1-\sin^2 4x \Leftrightarrow \sin^2 4x=0$.

$\Leftrightarrow \sin 4x=0 \Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0 \\ \cos x=0\,(L)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=k\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$.

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow$ nghiệm của phương trình (1) là $x=k\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$

Vậy số điểm biểu diễn cần tìm là 4.

***Lưu ý:*** Ở bài nầy điều kiện bài toán có thể gộp thành $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$

**Bài tập rèn luyện kỹ năng**

**Phương trình lượng giác cơ bản**

**Câu 1.** Phương trình $\sin(x+10^0)=\dfrac{1}{2}\ (0^0<x<180^0)$ có nghiệm là:

**A.** $x=30^0$ và $x=150^0$ **B.** $x=20^0$ và $x=140^0$

**C.** $x = 40^0$ và $x = 160^0$ **D.** $x = 30^0$ và $x = 140^0$

**Câu 2.** Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4}) = 1$ với $0 \le x \le 2\pi$ là:

**A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

**Câu 3.** Phương trình $\sin(5x+\frac{\pi}{2}) = m-2$ có nghiệm khi:

**A.** $m \in [1;3]$ **B.** $m \in [-1;1]$ **C.** $m \in R$ **D.** $m \in (1;3)$

**Câu 4.** Phương trình $\tan(3x+60^0) = m^2$ có nghiệm khi:

**A.** $m \in [-1;1]$ **B.** $m \in [0;1]$ **C.** $m \in R$ **D.** $m \in \varnothing$

**Câu 5.** Phương trình có nghiệm $\tan(x-1) = 2$ là:

**A.** $x = -1 + \arctan(2) + k\pi (k \in Z)$ **B.** $x = 1 + \arctan(2) + k\pi (k \in Z)$

**C.** $x = \arctan(2) + k2\pi (k \in Z)$ **D.** $x = 1 + \arctan(2) + k\frac{\pi}{2} (k \in Z)$

**Câu 6.** Tổng các nghiệm của phương trình $\tan x = 1$ trên khoảng $(0;10)$ là:

**A.** $\frac{15\pi}{4}$ **B.** $\frac{3\pi}{2}$ **C.** $\frac{7\pi}{2}$ **D.** $8\pi$

**Câu 7.** Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình $\cos x = 0$ ?

**A.** $\sin x = 1$ **B.** $\sin x = -1$ **C.** $\tan x = 0$ **D.** $\cot x = 0$

**Câu 8.** Phương trình $\cos(x+\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{6}$ Có các nghiệm dạng $x = \alpha + k2\pi$ và $x = -\beta + k2\pi$ $(0 \le \alpha;\beta \le \pi)$ Khi đó $\alpha + \beta$ bằng

**A.** 0 **B.** $-\frac{\pi}{6}$ **C.** $\frac{2\pi}{3}$ **D.** $-\frac{2\pi}{3}$

**Câu 9.** Phương trình $\cos 2x = -\cos(x+\frac{\pi}{2})$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $(0;10\pi)$

**A.** 14 **B.** 15 **C.** 16 **D.** 17

**Câu 10.** Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cot x = \tan(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})$

**A.** $-\frac{2\pi}{3}$ **B.** $-\frac{\pi}{3}$ **C.** $-\frac{4\pi}{3}$ **D.** 0

**Câu 11.** Trong các phương trình sau, phương trình nào vô nghiệm?

**A.** $\tan x = 99$ **B.** $\cot 2018x = 2017$

**C.** $\sin 2x = -\frac{3}{4}$ **D.** $\cos(2x-\frac{\pi}{2}) = \frac{2\pi}{3}$

**Một số phương trình lượng giác thường gặp**

**Câu 12.** Số nghiệm của phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ Trên đoạn $[0;2\pi]$

**A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

**Câu 13.** Phương trình $m\tan x - \sqrt{3} = 0$ Có nghiệm khi