Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} C_n^1 ax = 24x \\ C_n^2 a^2x^2 = 252x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} na = 24 \\ \dfrac{n(n-1)}{2}a^2 = 252 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2a^2 = 576 \\ \dfrac{n(n-1)}{2}a^2 = 252 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} na = 24 \\ \dfrac{2n^2}{n(n-1)} = \dfrac{16}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} na = 24 \\ 14n = 16(n-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \\ a = 3 \end{cases}$

Vậy $a = 3; n = 8$ là các số cần tìm.

Câu 3. **Đáp án C.**

Số hạng tổng quát sau khi khai triển $T_{k+1} = C_{10}^k x^k$

Số hạng chứa x^5 trong khai triển là $C_{10}^5 x^5$. Đề bài hỏi hệ số nên ta chọn C.

Câu 4. **Đáp án D.**

Ta có $\left(\dfrac{4}{x} - 3x^3\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (ax)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k \left(\dfrac{4}{x}\right)^k (-3x^3)^{15-k} = \sum_{k=0}^{15} (-3)^{15-k} 4^k C_{15}^k x^{45-4k}$

Số hạng chứa x^9 tương ứng với $45 - 4k = 9 \Leftrightarrow k = 9$ nên hệ số của x^9 trong khai triển trên là $(-3)^6 4^9 C_{15}^9 = 3^6 4^9 C_{15}^9$.

Câu 5. **Đáp án C.**

Ta có $\left(2\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \left(2\sqrt{x}\right)^k \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20-k} = \sum_{k=0}^{20} 2^k C_{20}^k \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^k \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{20-k} = \sum_{k=0}^{20} 2^k C_{20}^k x^{\frac{5k-40}{6}}$

Số hạng không chứa x tương ứng với $\dfrac{5k-40}{6} = 0 \Leftrightarrow k = 8$. Do vậy số hạng đó là $2^8 C_{20}^8$.

Câu 6. **Đáp án A.**

Từ lý thuyết ta có công thức tổng quát như sau: Với $0 \le q \le p \le n$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $\left(x^2 + \dfrac{1}{x} - 1\right)^{10}$ là $T_p = C_{10}^p C_p^q (x^2)^{10-p} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{p-q} (-1)^q = C_{10}^p C_p^q (-1)^q x^{20+q-3p}$

Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với $20 + q - 3p = 0 \Leftrightarrow 3p - q = 20$. Mà $0 \le q \le p \le n$ và $q, p, n \in \mathbb{N}$ nên $(p;q) \in \{(7;1),(8;4)(9;7),(10;10)\}$. Lúc này số hạng không chứa x trong khai triển là $(-1)^1 C_{10}^7 C_7^1 + (-1)^4 C_{10}^8 C_8^4 + (-1)^{10} C_{10}^{10} C_{10}^{10} + (-1)^7 C_{10}^9 C_9^7 = 1951$

Câu 7. **Đáp án C.**

Từ lý thuyết ta có công thức tổng quát như sau: Với $0 \le q \le p \le n$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $(x^3 - x^2 - 1)^8$ là $T_p = C_8^p C_p^q (x^3)^{8-p} (-x^2)^{p-q} (-1)^q = C_8^p C_p^q x^{24-3p} x^{2p-2q} (-1)^p$

Ta có: $24 - 3p + 2p - 2q = 8 \Leftrightarrow 24 - p - 2q = 8 \Leftrightarrow p + 2q = 16$. Suy ra $(p;q) \in \{(8;4)(6;5)\}$. Lúc này hệ số của x^8 trong khai triển là $C_8^8 C_8^4 (-1)^8 + C_{10}^6 C_6^5 (-1)^6 = 238$

Câu 8. **Đáp án A.**

Theo giả thiết ta có:

$$C_n^1+C_n^3=13n \Leftrightarrow n+\frac{n!}{3!(n-3)!}=13n \Leftrightarrow n+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=13n \Leftrightarrow n(n^2-3n-70)=0 \Leftrightarrow n=10$$

Khi đó ta có $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^n=\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\left(x^2\right)^k\left(\frac{1}{x^3}\right)^{10-k}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k x^{5k-30}$

Số hạng không chứa x tương ứng với $5k-30=0 \Leftrightarrow k=6$. Vậy số hạng không chứa x trong khai triển đã cho là $C_{10}^6=210$.

Câu 9. **Đáp án B.**

Ta cần biết công thức tổng quát của a_k để thay vào điều kiện $a_0+a_1+a_2=71$, rồi sau đó giải ra để tìm n. Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n=(1-2x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-2x)^k=\sum_{k=0}^{n}(-2)^k C_n^k x^k.$$

Do đó $a_k=(-2)^k C_n^k, \forall k\in\{0,1,2,...,n\}$.. Khi đó theo giả thiết ta có

$$71=a_0+a_1+a_2=(-2)^0C_n^0+(-2)^1C_n^1+(-2)^2C_n^2=1-2n+2n(n-1)\Leftrightarrow n^2-2n-35=0\Leftrightarrow n=7.$$

Như vậy $a_5=(-2)^5C_7^5=-672$..

Câu 10. **Đáp án D.**

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$3^nC_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2-...+(-1)^nC_n^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k3^{n-k}C_n^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k3^{n-k}=(-1+3)^n=2^n.$$

Do đó $2^n=2048=2^{11}\Leftrightarrow n=11$. Như vậy ta có $(x+2)^n=(x+2)^{11}=\sum_{k=0}^{11}C_{11}^k x^k 2^{11-k}$, suy ra hệ số của x^{10} ứng với $k=10$ và đó là số $C_{11}^{10}.2=22$

Câu 11. **Đáp án A.**

Ta có $A_n^2-C_{n+1}^{n-2}=14-14n \Leftrightarrow n(n-1)-\frac{(n-1)n(n+1)}{6}=14-14\text{n}$

$$\Leftrightarrow(n-1)\left[n-\frac{n(n+1)}{6}+14\right]=0\Leftrightarrow(n-1)(n^2-5n-84)=0\Leftrightarrow n=12 \text{ vì } n\ge 2.$$

Lúc này ta có $\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^n=\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^{12}$

Từ công thức tổng quát tam thức Newton ta có với $0\le q\le p\le 12$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^{12}$ là $T_p=C_{12}^pC_p^q1^{12-p}(x)^{p-q}\left(\frac{1}{x}\right)^q=C_{12}^pC_p^qx^{p-q-q}=C_{12}^pC_p^qx^{p-2q}$

Ta có: $p-2q=0\Leftrightarrow p=2q$. Kết hợp với điều kiện ở trên ta có:

$(p;q)\in\{(0;0),(2;1)(4;2),(6;3),(8;4),(10;5),(12;6)\}$. Suy ra số hạng không chứa x là

$$C_{12}^0C_0^0+C_{12}^2C_2^1+C_{12}^4C_4^2+C_{12}^6C_6^3+C_{12}^8C_8^4+C_{12}^{10}C_{10}^5+C_{12}^{12}C_{12}^6=73789$$

Câu 12. Đáp án A.

Theo giả thiết ta có: $P(x)=\left(1+x+x^2\right)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}$

Thay $x=1$ ta được $S=a_0+a_1+a_2+...+a_{2n}=P(1)=3^n$. Như vậy ta chỉ cần xác định được n

Với $0\le q\le p\le n$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $\left(1+x+x^2\right)^n$ là

$T_p=C_n^pC_p^q1^{n-p}x^{p-q}\left(x^2\right)^q=C_n^pC_p^qx^{p+q}$

Hệ số của x^3 ứng với: $\begin{cases}p+q=3\\0\le q\le p\le n\end{cases}\Rightarrow (p;q)\in\{(3;0),(2;1)\}$.

Suy ra $a_3=C_n^3C_3^0+C_n^2C_2^1=C_n^3+2C_n^2$.

Hệ số của x^4 ứng với: $\begin{cases}p+q=4\\0\le q\le p\le n\end{cases}\Rightarrow (p;q)\in\{(4;0),(3;1),(2;2)\}$.

Suy ra $a_4=C_n^4C_4^0+C_n^3C_3^1+C_n^2C_2^2=C_n^4+3C_n^3+C_n^2$.

$$\frac{a_3}{14}=\frac{a_4}{41}\Leftrightarrow\frac{1}{14}\frac{n(n-1)(n+4)}{6}=\frac{1}{41}\left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{14}\frac{(n+4)}{3}=\frac{1}{41}\left(\frac{n^2-5n+6}{12}+n-1\right)\Leftrightarrow 7n^2-33n-370=0\Leftrightarrow n=10.$$

Vậy $S=a_0+a_1+a_2+...+a_{2n}=3^{10}$

Câu 13. Đáp án D.

Vì $C_n^k=C_n^{n-k}$ nên ta có $\left\{C_{16}^0,C_{16}^1,...,C_{16}^8\right\}=\left\{C_{16}^{16},C_{16}^{15},...,C_{16}^8\right\}$, suy ra ta chỉ cần tìm số lớn nhất trong các số $C_{16}^0,C_{16}^1,...,C_{16}^7,C_{16}^8$. Bằng tính toán trực tiếp, ta có

$C_{16}^0=1,C_{16}^1=16,C_{16}^2=120,C_{16}^3=560,C_{16}^4=1820,C_{16}^5=4368,C_{16}^6=8008,C_{16}^7=11440,C_{16}^8=12870$

Như vậy $C_{16}^0<C_{16}^1<C_{16}^2<...<C_{16}^7<C_{16}^8$

Do đó: $C_{16}^8=\max\left\{C_{16}^0;C_{16}^1;C_{16}^2;...;C_{16}^{15};C_{16}^{16}\right\}$

Câu 14. Đáp án C.

Ta có $a_k=2^{10-k}C_{10}^k$ với $k=0,1,2,...,10$. Bài toán tương đương với tìm $k\in\{0,1,2,...,10\}$ sao cho a_k lớn nhất. Xét bất phương trình sau:

$$a_k\le a_{k+1}\Leftrightarrow 2^{10-k}C_{10}^k\le 2^{9-k}C_{10}^{k+1}\Leftrightarrow 2\frac{10!}{k!(10-k)!}\le\frac{10!}{(k+1)!(9-k)!}$$

$$\Leftrightarrow 2(k+1)\le 10-k\Leftrightarrow k\le\frac{8}{3}\Leftrightarrow k\in\{0,1,2\}$$

Từ đây ta có: $\begin{cases} a_k \le a_{k+1} \forall k \in \{0;1;2\} \\ a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = \dfrac{8}{3}, k \notin N \\ a_k > a_{k+1} \forall k \in \{3;4;....10\} \end{cases}$

Do đó: $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5 > ... > a_{10}$ hay a_3 là hệ số lớn nhất cần tìm.

$a_3 = C_{10}^3.2^7 = 15360.$

Câu 15. Đáp án B.

$A_n^2 - 3.C_n^{n-1} = 11n \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!} - 3n = 11n.$

$\Leftrightarrow n(n-1) - 3n = 11n \Leftrightarrow n = 15.$

$(x+2)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^k.2^{15-k}$

Xét bất phương trình: $a_k \le a_{k+1} \Leftrightarrow C_{15}^k.2^{15-k} \le C_{15}^{k+1}.2^{14-k} \Leftrightarrow$

$2\dfrac{15!}{k!.(15-k)!} \le 2\dfrac{15!}{(k+1)!.(14-k)!} \Leftrightarrow \dfrac{2}{15-k} \le \dfrac{1}{k+1} \Leftrightarrow k \le \dfrac{13}{3}, k \in N \Rightarrow k \in \{0,1,2,3,4\}$

Từ đây ta có: $\begin{cases} a_k \le a_{k+1} \forall k \in \{0,1,2,3,4\} \\ a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = \dfrac{13}{3}, k \notin N \\ a_k > a_{k+1} \forall k \in \{5;6;....15\} \end{cases}$

Do đó: $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 > a_6 > a_7 > ... > a_{15}$

Vậy $a_5 = max\left\{a_i \middle| i = \overline{0,15}\right\} = C_{15}^5.2^{10}$

Câu 16. Đáp án A

$2^{12} = a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{2^2} + ... + \dfrac{a^n}{2^n} = a_0 + a_1\left(\dfrac{1}{2}\right) + a_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + ... + a_n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$= P\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(1 + 2.\dfrac{1}{2}\right)^n = 2^n$

$\Rightarrow n = 12$

$(2x+1)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (2x)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k.x^k 2^k.$

$\Rightarrow a_k = C_{12}^k.2^k \forall k\overline{0,12} \Rightarrow a_k \le a_{k+1} \Leftrightarrow C_{12}^k.2^k \le C_{12}^{k+1}.2^{k+1}$

$$\frac{12!}{k!.(12-k)!} \le \frac{12!}{(k+1)!.(11-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{12-k} \le \frac{2}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow k \le \frac{23}{3}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \{0,1,2,3,...7\}$$

Từ đây ta có: $\begin{cases} a_k \le a_{k+1} \forall k \in \{0,1,2,3,...7\} \\ a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = \dfrac{23}{3}, k \notin N \\ a_k > a_{k+1} \forall k \in \{8;9;....11\} \end{cases}$

Do đó: $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < ..... < a_8 > a_9 > .... > a_{12}$

Vậy $a_5 = max\left\{a_i \middle| i = \overline{0,12}\right\} = C_{12}^8.2^8$

Câu 17. Đáp án A

Giả sử n là số nguyên dương sao cho:

$max\{a_0, a_1, ...a_n\} = a_{10}$

Theo công thức khai triển newton ta có:

$$P(x) = (x+2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k.x^k 2^k.$$

$$\Rightarrow a_k = C_n^k.2^{n-k} \forall k \overline{0,n}$$

Ta có: $a_{10} = max\{a_0, a_1, ...a_n\} \Leftrightarrow \begin{cases} a_9 \le a_{10} \\ a_{10} \ge a_{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_n^9.2^{n-9} \le C_n^{10}.2^{n-10} \\ C_n^{10}.2^{n-10} \ge C_n^{11}.2^{n-11} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{n-9} \le \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{1}{11} \le \dfrac{2}{n-10} \end{cases} \Leftrightarrow 29 \le n \le 32$$

Các phép biến đổi trên là đương tương nên ta không cần phải thử lại các giá trị trên.

Vậy $n \in \{29, 30, 31, 32\}$ là tất cả các giá trị thỏa mãn bài toán (thử lại thấy thở mãn).

Câu 18. Đáp án D

Theo công thức khai triển Newton ta có:

$$(x^2+1)^n (x+2)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2k}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i 2^{n-i}\right).$$

Số hạng chứa 3^{3n-3} tương ứng với cặp (k,i) thỏa mãn:

$$\begin{cases} 2k + i = 3n - 3 \\ 0 \le k; i \le n \end{cases} \Rightarrow (k;i) \in \{(n, n-3); (n-1, n-1)\}$$

Do đó hệ số của 3^{3n-3} là: $a_{3n-3} = C_n^n.2^3.C_n^{n-3} + C_n^{n-1}.2^1.C_n^{n-1} = 8C_n^3 + 2n^2 = 26n$

$$\Leftrightarrow 8\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 2n^2 = 26n \Rightarrow 2n^2 - 3n - 35 = 0 \Rightarrow n = 5$$

Câu 19. **Đáp án A.**

Ta có: $G(x) = (ax+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k x^k$.

Từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} C_n^1 ax = 24 \\ C_n^2 a^2 x^2 = 252x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} na = 24 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} a^2 = 252 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2a^2 = 576 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} a^2 = 252 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} na = 24 \\ \dfrac{2n^2}{n(n-1)} = \dfrac{16}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} na = 24 \\ 14n = 16(n-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \\ a = 3 \end{cases}$$

Vậy $a = 3, n = 8$ là các số cần tìm.

Câu 20. **Đáp án C**

Các số hạng của tổng vế trái có dạng:

$$(-1)^{k-1}\frac{kC_n^k}{2^k} = (-1)^{k-1}\frac{nC_{n-1}^{k-1}}{2^k} = \frac{n}{2}C_{n-1}^{k-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Do đó ta có:

$$\frac{C_n^1}{2} - \frac{2C_n^2}{2^2} + \frac{3C_n^3}{2^3} - ... + (-1)^{n-2}\frac{(n-1)C_n^{n-1}}{2^{n-1}} + (-1)^{n-1}\frac{nC_n^n}{2^n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{kC_n^k}{2^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{2}C_{n-1}^{k-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{n}{2}\sum_{k=1}^{n-1}C_{n-1}^{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{n}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)^{n-1} = \frac{n}{2^n}.$$

Như vậy ta cần dùng số nguyên dương n thỏa mãn: $\frac{n}{2^n} = \frac{1}{32} \Leftrightarrow 2^{n-5} = n \Leftrightarrow n = 8$.

Câu 21. **Đáp án A**

Cách 1: Ta có

$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

$C_{n-1}^k = C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-1}$

$C_{n-2}^k = C_{n-3}^k + C_{n-3}^{k-1}$

....

$C_{k+1}^k = C_k^k + C_k^{k-1}$

$C_k^k = C_{k-1}^k + C_{k-1}^{k-1}$

Cộng các dẳng thức trên vế theo vế ta được:

$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + ... + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1}$ $(*)$

Ta có: $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + n(n+1)(n+2) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+2)!}{(k-1)!}=6\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+2)!}{3!(k-1)!}=6\sum_{k=1}^{n}C_{k+2}^{3}=6\left(C_3^3+C_4^3+...+C_{n+1}^3+C_{n+2}^3\right)$.

Áp dụng câu $(*)$ với $k=4$, thay n bởi $n+3$ ta được:

$C_3^3+C_4^3+...+C_{n+1}^3+C_{n+2}^3=C_{n+3}^4$

Vậy $1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+n(n+1)(n+2)=6C_{n+3}^4=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Cách 2: Với bài toán này ta có thể dùng máy tính để thử trường hợp riêng.

Câu 22. Đáp án D

Xét khai triển:

$(a+b)^n=C_n^0b^n+C_n^1a^1b^{n-1}+...+C_n^{n-2}a^{n-2}b^2+C_n^{n-1}a^{n-1}b^1+C_n^na^n$.

Chọn $a=b=1$ ta được $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n$

Câu 23. Đáp án C

Xét khai triển: $(a+b)^n=C_n^0b^n+C_n^1a^1b^{n-1}+...+C_n^{n-2}a^{n-2}b^2+C_n^{n-1}a^{n-1}b^1+C_n^na^n$.

Chọn $a=2,b=1$ ta được:

$3^n=(2+1)^n=C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+...+2^nC_n^n=243\Rightarrow n=5$

Câu 24. Đáp án A

Các số hạng của S có dạng:

$\frac{1}{(2k)!(2019-2k)!}=\frac{1}{2019!}\frac{2019!}{(2k)!(2019-2k)!}=\frac{1}{2019!}C_{2019}^{2k}$.

Do đó $\Rightarrow 2019!S=C_{2019}^2+C_{2019}^4+...+C_{2019}^{2016}+C_{2019}^{2018}$.

Nhận thấy C_{2019}^{2k} là hệ số của x^{2k} trong khai triển $(x+1)^{2019}$.

Vì vậy xét $P(x)=(x+1)^{2019}$, theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$P(x)=(x+1)^{2019}=C_{2019}^0+C_{2019}^1x+C_{2019}^2x^2+...+C_{2019}^{2019}x^{2019}$

Từ đó ta có:

$P(1)=C_{2019}^0+C_{2019}^1+C_{2019}^2+...+C_{2019}^{2019}$.

$P(-1)=C_{2019}^0-C_{2019}^1+C_{2019}^2-...+C_{2019}^{2018}-C_{2019}^{2019}$

Suy ra: $2019!S+1=C_{2019}^0+C_{2019}^2+C_{2019}^4+...+C_{2019}^{2018}=\frac{P(1)+P(-1)}{2}=2^{2018}$

$\Leftrightarrow S=\frac{2^{2018}-1}{2019!}$

Câu 25. Đáp án D

Theo giả thiết ta có:

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}$.

Khi đó $P(1)=a_0+a_1+a_2+...+a_{2n}$ và $P(-1)=a_0-a_1+a_2-...+a_{2n}$.

Suy ra $T=a_0+a_2+...+a_{2n}=\frac{P(1)+P(-1)}{2}=\frac{2^{2n-1}+2^{2n}}{2}=3.2^{2n-2}$

$\Rightarrow 768 = 3.2^{2n-2} \Leftrightarrow n = 5$

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$P(x) = (x-1)^{2n} + x(x+1)^{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k x^k (-1)^{2n-k} + x\sum_{k=1}^{2n-1} C_{2n-k}^k x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k x^k (-1)^{2n-k} + \sum_{k=1}^{2n} C_{2n-k}^{k-1} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{2n}\left(C_{2n}^k (-1)^k + C_{2n-1}^{k-1}\right)x^k = 1 + \sum_{k=1}^{10}\left(C_{10}^k (-1)^k + C_9^{k-1}\right)x^k.$$

Vậy $a_5 = C_{10}^5 (-1)^5 + C_9^4 = -126.$

Câu 26. Đáp án B.

Xét khai triển $(a+b)^{2n} = C_{2n}^0 b^{2n} + C_{2n}^1 a^1 b^{2n-1} + ... + C_{2n}^{2n-1} a^{2n-2} b^1 + C_{2n}^{2n} a^{2n}$

Chọn $a = b = 1$, ta được:

$2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$

Chọn $a = 1, b = -1$, ta được:

$0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + ... - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$

Trừ hai đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$2^{2n} = 2\left(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1}\right) = 2.2048 = 2^{12} \Leftrightarrow n = 6$

Câu 27. Đáp án A.

Nhận thấy rằng:

$3S = 3a_1 + 3^3 a_3 + ... + 3^{2011} a_{2011} + 3^{2013} a_{2013}$

Lần lượt thay $x = 3, x = -3$ vào khai triển đã cho ta được:

$P(3) = 7^{2014} = a_0 + 3a_1 + 3^2 a_2 + ... + 3^{2013} a_{2013} + 3^{2014} a_{2014}$

$P(-3) = 5^{2014} = a_0 - 3a_1 + 3^2 a_2 - ... - 3^{2013} a_{2013} + 3^{2014} a_{2014}$

Trừ hai đẳng thức này vế theo vế, ta được:

$2\left(3a_1 + 3^3 a_3 ... + 3^{2011} a_{2011} + 3^{2013} a_{2013}\right) = 7^{2014} - 5^{2014}$

$$\Leftrightarrow 3S = \frac{7^{2014} - 5^{2014}}{2} \Leftrightarrow S = \frac{7^{2014} - 5^{2014}}{6}$$

Vậy $S = a_1 + 3^2 a_3 + ... + 3^{2010} a_{2011} + 3^{2012} a_{2013} = \dfrac{7^{2014} - 5^{2014}}{6}$

Câu 28. Đáp án B.

Nhận thấy $(-5)^k C_{100}^k$ là hệ số của x^k trong khai triển $(1-5x)^{100}$

Vì thế xét $P(x) = (1-5x)^{100}$, theo khai triển nhị thức NewTon, ta có:

$P(x) = (1-5x)^{100} = C_{100}^0 - C_{100}^1 5x + C_{100}^2 (5x)^2 - ... + C_{100}^{100} (5x)^{100}$

Thay $x = 1$ vào ta được:

$P(x) = (4)^{100} = C_{100}^0 - C_{100}^1 5 + C_{100}^2 5^2 - ... + C_{100}^{100} 5^{100}$

Chú ý: Ta cũng có thể xét khai triển $(1+5x)^{100}$ rồi sau đó thay $x=-1$ vào.

Câu 29. Đáp án C.

Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$

Cho $x=1$ thì A đúng.

Cho $x=-1$ thì B đúng.

Cho $x=2$ thì D đúng.

Cho $x=-2$ thì $(-1)^n = C_n^0 - 2C_n^1 + C_n^2 2^2 - ... + C_n^n(-2)^n$.

Vậy C sai.

Câu 30. Đáp án B.

$(2x+y)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4 y + 10(2x)^3 y^2 + 10(2x)^2 y^3 + 5(2x)y^4 + y^5$

$= 32x^5 + 80x^4 y + 80x^3 y^2 + 40x^2 y^3 + 10xy^4 + y^5$.