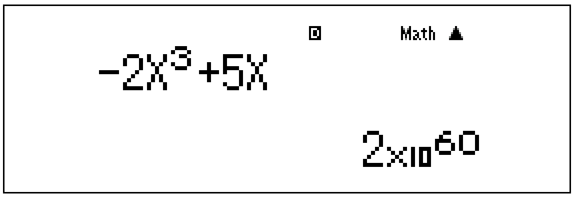
Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giá trị của $f(x) = -2x^3 + 5x$ tại một điểm có giá trị âm rất nhỏ (do ta đang xét giới hạn của hàm số khi $x \to -\infty$), chẳng hạn tại -10^{20}. Máy hiển thị kết quả như hình:



Đó là một giá trị dương rất lớn. Vậy chọn đáp án C , tức $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(-2x^3 + 5x\right) = +\infty$.

Cách 2: Ta có $-2x^3 + 5x = x^3\left(-2 + \dfrac{5}{x^2}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(-2 + \dfrac{5}{x^2}\right) = -2 < 0$ nên $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3\left(-2 + \dfrac{5}{x^2}\right) = +\infty$.

Vậy theo Quy tắc 1, $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(-2x^3 + 5x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3\left(-2 + \dfrac{5}{x^2}\right) = +\infty$. Do đó chọn C.

Lưu ý 1:

- Để hiểu tại sao $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(-2 + \dfrac{5}{x^2}\right) = -2$ xin xem lại phần các giới hạn đặc biệt.

- Bài toán thuộc dạng tính giới hạn hàm số khi x dần tới vô cực, nhưng là khi $x \to -\infty$. Do đó không thể áp dụng ngay các kết quả đã biết về giới hạn dãy số, vì giới hạn dãy số được xét khi $n \to +\infty$. Ta chỉ có thể áp dụng các kĩ thuật đã biết đối với giới hạn dãy số.

Lưu ý 2: Có thể dễ dàng chứng minh được kết quả như sau :

Cho hàm số $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \ (a_k \neq 0)$ là một đa thức bậc k.

x	k	a_k	Giới hạn của $f(x)$
$x \to +\infty$	Tùy ý	$a_k > 0$	$+\infty$
		$a_k < 0$	$-\infty$
$x \to -\infty$	k chẵn	$a_k > 0$	$+\infty$
		$a_k < 0$	$-\infty$

	k lẻ	$a_k > 0$	$-\infty$
		$a_k < 0$	$+\infty$

Thật vậy, ta có $f(x) = x^k\left(a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a_0}{x^k}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a_0}{x^k}\right) = a_k$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k tùy ý, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ nếu k chẵn, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ nếu k lẻ nên ta dễ dàng suy ra bảng kết quả trên.

Ví dụ 5: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4 - 2x^2 + 1\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 3. **D.** 2.

Đáp án A

Lời giải

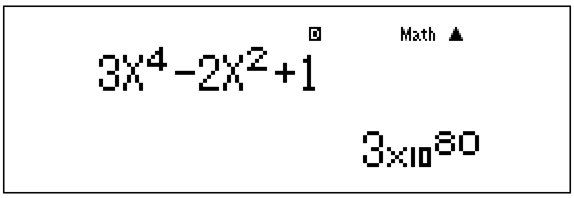
Cách 1: Theo nhận xét trên thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4 - 2x^2 + 1\right) = +\infty$ ($x \to -\infty$, k chẵn và $a_k > 0$). Thật vậy, ta có $3x^4 - 2x^2 + 1 = x^4\left(3 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) = 3 > 0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4 - 2x^2 + 1\right) = +\infty$.

STUDY TIP

- Giới hạn tại vô cực của hàm đa thức là vô cực, chỉ phụ thuộc vào số hạng chứa lũy thừa bậc cao nhất.
- Giới hạn của hàm đa thức tại $+\infty$ phụ thuộc vào hệ số của lũy thừa bậc cao nhất. (Giống với giới hạn của dãy số dạng đa thức).
- Giới hạn của hàm đa thức tại $-\infty$ phụ thuộc vào bậc và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$ tại $x = -10^{20}$, ta được kết quả như hình :



Kết quả là một số dương rất lớn. Do đó chọn đáp án A,

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$. Khẳng định nào dưới đây đúng ?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

B. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.

D. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ không tồn tại.

Đáp án B.

Lời giải

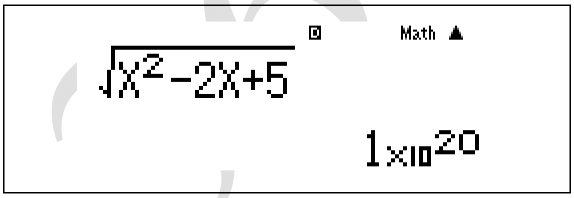
Hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Có thể giải nhanh như sau : Vì x^2-2x+5 là một hàm đa thức của x nên có giới hạn tại vô cực. Mà $\sqrt{x^2-2x+5}>0$ với mọi x nên giới hạn của $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ tại $-\infty$ chắc chắn là $+\infty$.

Thật vậy, ta có $\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=1>0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x+5}=+\infty$.

Hoặc ta có thể sử dụng MTCT để tính giá trị của $f(x)$ tại một giá trị âm rất nhỏ của x, chẳng hạn tại $x=-10^{20}$ ta được kết quả như hình:



Kết quả này là một số dương rất lớn. Do đó ta chọn đáp án B. (Dễ thấy kết quả hiển thị trên máy tính như trên chỉ là kết quả gần đúng do khả năng tính toán hạn chế của MTCT. Tuy nhiên kết quả đó cũng giúp ta lựa chọn được đáp án chính xác).

STUDY TIP

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}|x|=+\infty$.

Khi $x\to-\infty$ thì $x>0$.

Với $x<0$ ta có $\sqrt{x^2}=-x$.

Cần đặc biệt lưu ý các điều trên khi tính giới hạn tại $-\infty$ của hàm chứa căn thức.

Ví dụ 7: Giới hạn của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}$ khi $x\to-\infty$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** 3.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Ta có:

$$\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}-|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}$$

$$=|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)$$

Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)=1-2=-1<0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\right]=-\infty$.

Lưu ý:

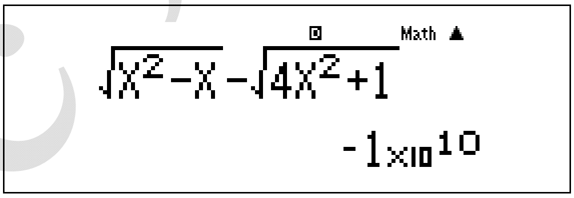
- Độc giả nên đọc lại phần giới hạn dãy số có chứa căn thức để hiểu hơn tại sao lại có định hướng giải như vậy (mà không đi nhân chia với biểu thức liên hợp).

- Có thể thấy như sau: Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+1}=+\infty$.

Mà hệ số của x^2 trong $4x^2+1$ lớn hơn hệ số của x^2 trong x^2-x nên suy ra

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=-\infty.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả như hình.



Vậy chọn đáp án A.

Ví dụ 8: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2017}{3x^3-5x^5}$ bằng:

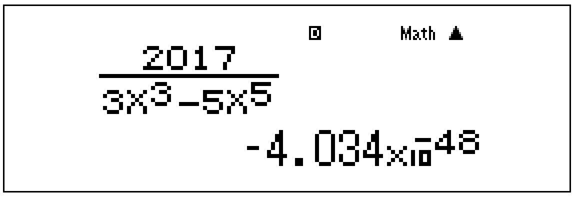
A. $\frac{2017}{3}$. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^3-5x^5\right)=-\infty$ nên theo quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2017}{3x^3-5x^5}=0$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=10^{10}$ ta được kết quả như hình.



Đó là một kết quả rất gần 0. Do đó chọn đáp án D.

STUDY TIP

Khi hàm số không xác định tại x_0 thì ta thử áp dụng các quy tắc về giới hạn vô cực. Đó là các quy tắc áp dụng cho các dạng $L.\infty$; $\frac{L}{\infty}$; $\frac{L}{0}$. Lưu ý cách xác định dấu của giới hạn.

- Dạng $\frac{L}{\infty}$: giới hạn là 0.

- Dạng $L.\infty$ và $\frac{L}{0}$: Giới hạn là vô cực.

Ví dụ 9: Giới hạn bên phải của hàm số $f(x)=\frac{3x-7}{x-2}$ khi $x\to 2$ là

A. $+\infty$.　　**B.** $-\infty$.　　**C.** 3.　　**D.** $\frac{7}{2}$.

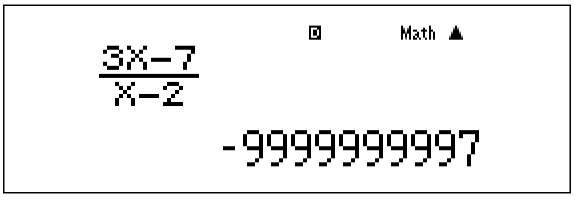
Đáp án B.

Lời giải

Hàm số $f(x)=\frac{3x-7}{x-2}$ xác định trên $(-\infty;+\infty)\setminus\{2\}$.

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0,\ x-2>0$ với mọi $x>2$ và $\lim\limits_{x\to 2^+}(3x-7)=3.2-7=-1<0$. Do đó theo quy tắc 2 thì $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{3x-7}{x-2}=-\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Tính giá trị của $f(x)=\frac{3x-7}{x-2}$ tại $x=2$ ta thấy máy báo lỗi Math Error (do $f(x)$ không xác định tại $x=2$). Quay lại tính giá trị của $f(x)$ tại $x=2+10^{-10}$ (tức $2,0000000001$) là một giá trị của x lớn hơn 2 và rất gần 2. Kết quả là một số âm rất nhỏ.



Do đó chọn đáp án B.

Ví dụ 10: Xét bài toán "Tìm $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}$", bạn Hà đã giải như sau:

Bước 1: Vì $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(2x^2-5x+2\right)=0$.

Bước 2: $2x^2-5x+2>0$ với $x<2$ và x đủ gần 2,

Bước 3: $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(3x^2+x-1\right)=13>0$

Bước 4: nên theo quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}=+\infty$.

Hỏi lời giải trên của bạn Hà đã sai từ bước thứ mấy ?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Đáp án B

Lời giải

Xét dấu biểu thức $g\left(x\right)=2x^2-5x+2$ ta thấy $g\left(x\right)<0$ với mọi $x\in\left(1;2\right)$.

Vậy lời giải sai từ bước 2. (Lời giải đúng cho ra kết quả $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}=-\infty$).

STUDY TIP

$x\to x_0^+$ nghĩa là $x\to x_0$ và $x>x_0$.

$x\to x_0^-$ nghĩa là $x\to x_0$ và $x<x_0$.

Nếu $x\to x_0^+$ thì tính giá trị hàm số tại $x=x_0+10^{-k}$.

Nếu $x\to x_0^-$ thì tính giá trị hàm số tại $x=x_0-10^{-k}$.

Trong đó k là một sô nguyên dương.

Ví dụ 11: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-x}{\left(x-4\right)^2}$ bằng:

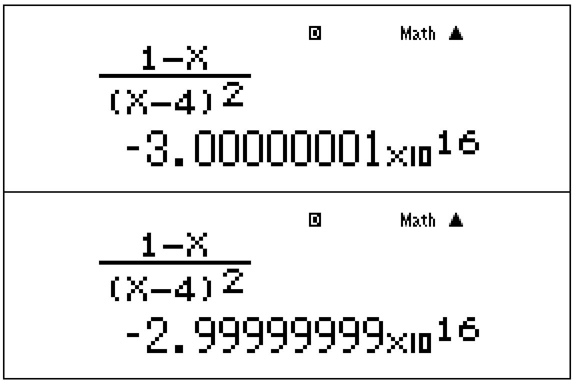
A. 0. **B.** -3. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 4}\left(1-x\right)=-3<0$, $\lim\limits_{x\to 4}\left(x-4\right)^2=0$ và $\left(x-4\right)^2>0$ với mọi $x\neq 4$ nên theo quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-x}{\left(x-4\right)^2}=-\infty$. Vậy chọn đáp án C.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=4+10^{-8}$ hoặc tại $x=4-10^{-8}$ ra được các kết quả như hình



Vậy chọn đáp án C.

Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}5x+2 \text{ khi } x\ge 1\\ x^2-3 \text{ khi } x<1\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=7$.

B. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-2$.

C. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=7$.

D. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=7$.

Đáp án D.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(5x+2)=5.1+2=7$. Vì chỉ có một đáp án đúng nên chọn đáp án D.

STUDY TIP

Cần xác định đúng biểu thức của $f(x)$ khi $x\to x_0^+$ và khi $x\to x_0^-$.

Giải thích thêm : Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-3)=1^2-3=-2$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ không tồn tại.

Các đáp án A, B, C đều sai.

STUDY TIP

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$.

Ví dụ 13: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-5} \text{ khi } x\ge 3 & (1)\\ \dfrac{x^2-5}{x+2} \text{ khi } x<3 & (2)\end{cases}$.

Trong biểu thức (2) ở trên, cần thay số 5 bằng số nào để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \to 3$?

A. 19. **B.** 1.

C. -1. **D.** Không có số nào thỏa mãn.

Đáp án C.

Lời giải

Hàm số đã cho các định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x^2-5} = \sqrt{3^2-5} = 2$.

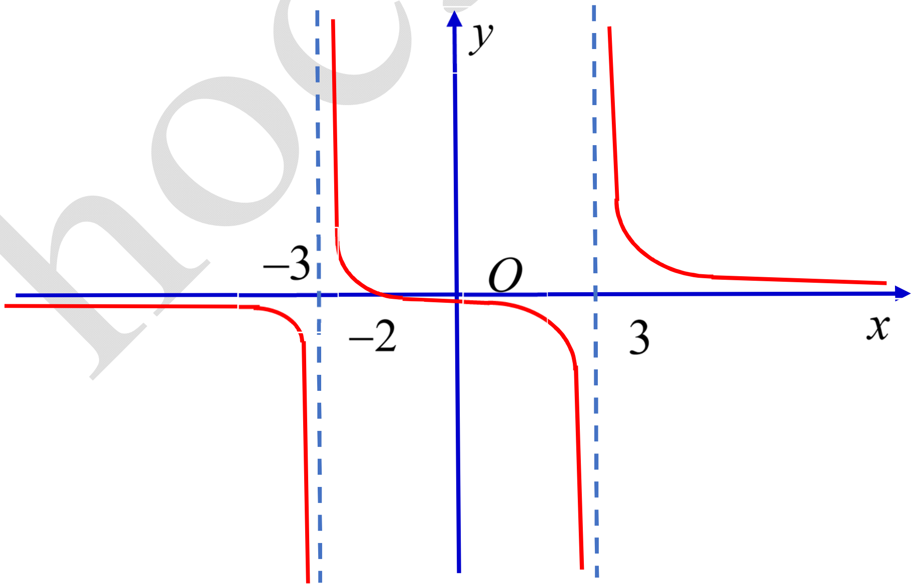
Đặt $f(x) = \dfrac{x^2-m}{x+2}$ khi $x<3$ (m là tham số, $m>0$).

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} = \dfrac{x^2-m}{x+2} = \dfrac{3^2-m}{3+2} = \dfrac{9-m}{5}$.

Để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to 3$ thì $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \Leftrightarrow \dfrac{9-m}{5} = 2 \Leftrightarrow m = -1$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\sqrt{X^2-5}$ khi $X=3$ được kết quả bằng 2. Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\dfrac{X^2-A}{X+2}$ khi $X=3$ và lần lượt nhận các giá trị bằng $19{,}1$ và -1. Ta thấy khi $A=-1$ thì biểu thức nhận giá trị bằng 2. Vậy chọn đáp án C.

Ví dụ 14: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Quan sát đồ thị và cho biết trong các giới hạn sau, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. **C.** $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)$. **D.** $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$.

Đáp án C.

Lời giải

Khi $x\to -3^+$, đồ thị hàm số là một đường cong đi lên từ phải qua trái. Do đó $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)=+\infty$.

Tương tự như vậy ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$.

Do đó chọn đáp án C.

Công phá toán 2 (trang 240 – 244)

DẠNG 2: TÌM GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG $\frac{0}{0}$

STUDY TIP

- Khi tính giới hạn mà không thể áp dụng trực tiếp các định lí về giới hạn hữu hạn hay các quy tắc về giới hạn vô cực đã biết thì ta gọi đó là các dạng vô định.
- Kí hiệu các dạng vô định gồm: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$ và $\infty-\infty$. Để tính giới hạn dạng vô định ta phải biến đổi biểu thức của hàm số về dạng áp dụng được các định lí và quy tắc đã biết. Làm như vậy gọi là *"khử dạng vô định"*.

1. Bài toán:

Tính $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức hoặc căn thức.

Phương pháp giải (tự luận)

✓ Phân tích tử và mẫu thành tích các nhân tử và giản ước. Cụ thể, vì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ nên $f(x)$ và $g(x)$ cùng có nghiệm $x=x_0$. Do đó ta phân tích được $f(x)=(x-x_0)A(x)$ và $g(x)=(x-x_0)B(x)$. Khi đó ta có: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)A(x)}{(x-x_0)B(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}$ và công việc còn lại là đi tính $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}$.

✓ Nếu $f(x)$ và $g(x)$ có chứa căn thức thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp trước khi phân tích chúng thành tích để giản ước.

STUDY TIP

Phân tích đa thức thành nhân tử:

- ✓ Áp dụng hằng đẳng thức đáng nhớ.
- ✓ Khi đã biết $f(x)$ có nghiệm $x = x_0$, ta sử dụng lược đồ Hooc-ne hoặc chia $f(x)$ cho $x = x_0$ được thương $A(x)$. Khi đó $f(x) = (x - x_0)A(x)$.
- ✓ Áp dụng kết quả: nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Tổng quát: nếu phương trình $a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = 0$ có các nghiệm thực $x_1, x_2, ..., x_m$ thì $a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = a_k(x - x_1)...(x - x_m)A(x)$, trong đó $A(x)$ là đa thức bậc $k - m$. Tuy nhiên, trong thực tế, ta dùng kết quả này khi có đủ k nghiệm thực, tức $m = k$. Trường hợp ngược lại nên dùng lược đồ Hooc-ne. (với phương trình bậc hai, bậc ba có thể dùng MTCT để tìm nghiệm)

Ví dụ 1. Tính $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$.

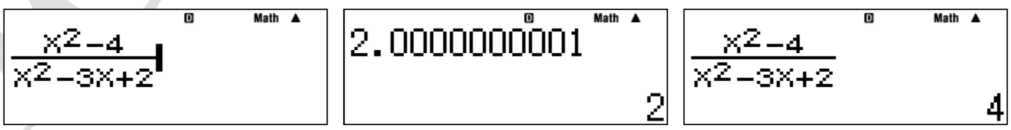
A. 1. **B.** 4. **C.** -2. **D.** -4.

Phân tích: Vì $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 4) = \lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 3x + 2) = 0$ nên đây là giới hạn vô định dạng $\dfrac{0}{0}$. Ta thấy $x^2 - 4$ và $x^2 - 3x + 2$ đều triệt tiêu tại $x = 2$ nên $x = 2$ là nghiệm của $x^2 - 4$ và $x^2 - 3x + 2$. Từ đó ta có cách giải như sau.

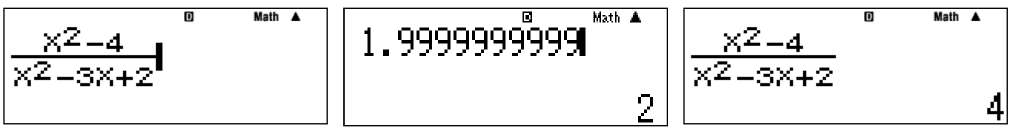
Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{2+2}{2-1} = 4$.

Cách 2: Dử dụng MTCT tính giá trị hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ tại $x = 2$ ta thấy máy báo lỗi Math Error (do hàm số không xác định tại $x = 2$). Quay lại tính giá trị hàm số tại $2,0000000001$ ta được kết quả như sau:



Lại quay lại tính giá trị hàm số tại 1,9999999999 ta được kết quả như sau:



Vậy chọn đáp án B.

Ví dụ 2. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - x^n}{x - 1}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$, ta được kết quả:

A. $+\infty$. **B.** $m-n$. **C.** m. **D.** 1.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-x^n}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^m-1}{x-1}-\dfrac{x^n-1}{x-1}\right)$.

Lại có $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1\right)=m$.

Tương tự: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=n$.

Vậy $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-x^n}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^m-1}{x-1}-\dfrac{x^n-1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x-1}-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=m-n$.

Cách 2: Cho m và n các giá trị cụ thể, chẳng hạn $m=3$ và $m=7$. Sử dụng MTCT tính $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^7}{x-1}$ ta được kết quả $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^7}{x-1}=-4$. Vậy đáp án đúng là B.

STUDY TIP

- $x^m-1=(x-1)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1\right)$
- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x-1}=m$
- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=n$

Ví dụ 3. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}=0$.

B. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}=+\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}=-\infty$.

D. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}$ không tồn tại.

Phân tích: Vì $\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{x+3}-2\right)=0$ và $\lim\limits_{x\to1}\left(x^3-3x+2\right)=0$ nên đây là dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Tuy nhiên ta chưa thể phân tích ngay $\sqrt{x+3}-2$ thành nhân tử mà phải nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp của $\sqrt{x+3}-2$ là $\sqrt{x+3}+2$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}=\dfrac{\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(x^3-3x+2\right)}$

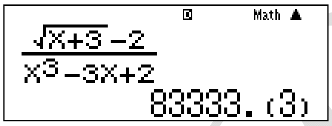
$$=\frac{x-1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)^2(x+2)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)}.$$

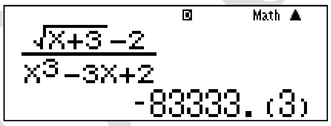
Mà $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)}=+\infty$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)}$ không tồn tại.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}$ không tồn tại. Vậy chọn đáp án D.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}$ tại $x=1$ ta thấy máy báo lỗi Math Error. Quay lại tính giá trị biểu thức tại $x=1,000001$ và tại $x=0,999999$ ta được kết quả:





Hai kết quả trên là một số dương rất lớn, một số âm rất nhỏ. Do đó có thể kết luận $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}$ không tồn tại.

Nhận xét:

- Nếu chỉ tính giá trị biểu thức tại một điểm thì rất dễ chọn đáp án sai.
- Ở đây ta đã chuyển dạng vô định $\frac{0}{0}$ về dạng xác định $\frac{L}{0}$.
- Dùng MTCT tìm nghiệm của phương trình $x^3-3x+2=0$ ta được $x_1=1,\ x_2=-2$. Như vậy phải có một nghiệm là nghiệm kép do là phương trình bậc ba. Trong trường hợp này, theo Tip trên đã nêu, ta nên dùng lược đồ Hooc-ne để phân tích đa thức x^3-3x+2 thành nhân tử.

Ví dụ 4. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$ bằng:

A. 1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Phân tích: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}\right)=0$ và $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ nên đây là dạng vô định $\frac{0}{0}$. Ta chưa thể phân tích $f(x)=\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}$ thành nhân tử. Mà $f(x)$ lại là hiệu của hai căn thức không cùng bậc. Ta để ý thấy $\sqrt{2x-1}$ và $\sqrt[3]{3x-2}$ đều đạt giá trị bằng 1 tại $x=1$ nên ta biến đổi như sau: $f\left(x\right)=\left(\sqrt{2x-1}-1\right)+\left(1-\sqrt[3]{3x-2}\right)$ rồi tiến hành nhân chia với biểu thức liên hợp.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}=\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}+\dfrac{1-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$

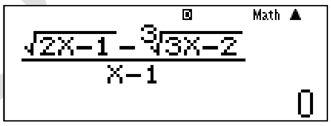
$$=\frac{2x-2}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)\left(x-1\right)}+\frac{3-3x}{\left(1+\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{\left(3x-2^2\right)}\right)\left(x-1\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}-\frac{3}{1+\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{\left(3x-2^2\right)}}.$$

Tac có: $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}-\dfrac{3}{1+\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{\left(3x-2^2\right)}}\right]=0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}=0$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$ tại $x=1$ ta thấy máy báo lỗi Math Error. Quay lại tính giá trị biểu thức tại $x=0,99999999$ và tại $x=1,00000001$ ta được kết quả:



Do đó chọn đáp án B tức là $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}=0$.

STUDY TIP

Cho $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{A\left(x\right)}-\sqrt[3]{B\left(x\right)}}{x-x_0}$ (chứa hai căn khác bậc) trong đó $A\left(x_0\right)=B\left(x_0\right)=m$ thì ta biến đổi như sau: $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{A\left(x\right)}-m+m-\sqrt[3]{B\left(x\right)}}{x-x_0}$.

Ví dụ 5. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{\left(x-1\right)^2}$.

A. 0. **B.** -2. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Cách 1: Đặt $t = x - 1$ thì $x = t + 1$, $\lim\limits_{x\to 1} t = 0$ và

$$\frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2} = \frac{\sqrt[3]{6t+1}-\sqrt{4t+1}}{t^2} = \frac{\sqrt[3]{6t+1}-(2t+1)}{t^2} + \frac{(2t+1)-\sqrt{4t+1}}{t^2}$$

$$= \frac{6t+1-\left(8t^3+12t^2+6t+1\right)}{t^2\left[\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2\right]} + \frac{\left(4t^2+4t+1\right)-(4t+1)}{t^2\left(2t+1+\sqrt{4t+1}\right)}$$

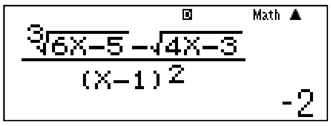
$$= \frac{-8t-12}{\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2} + \frac{4}{2t+1+\sqrt{4t+1}}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2} = \lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{-8t-12}{\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2} + \dfrac{4}{2t+1+\sqrt{4t+1}}\right).$

Mà $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-8t-12}{\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2} = -\dfrac{12}{3} = -4$; $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{4}{2t+1+\sqrt{4t+1}} = \dfrac{4}{2} = 2$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2} = -4+2 = -2$.

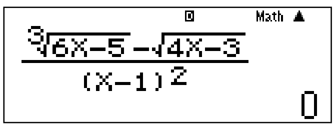
Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}$ tại $x = 0,9999999$ và tại $x = 1,0000001$ ta đều được kết quả:



Do đó chọn đáp án B.

Lưu ý:

- Trong cách thứ 2, nếu ta tính giá trị biểu thức tại $x = 0,999999999$ hoặc tại $x = 1,000000001$ thì ta được kết quả:



Do vượt quá giới hạn tính toán của máy. Do đó nếu không thử lại với cá trị lớn hơn thì có thể ta sẽ chọn đáp án A.

ở bài này có nhiều vấn đề cần phân tích thêm. Nếu làm như ví dụ 4 thì ta sẽ biến đổi $\frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}=\frac{\sqrt[3]{6x-5}-1}{(x-1)^2}+\frac{1-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}$ rồi nhân liên hợp để thu được $\frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}$

$$=\frac{6\left(1+\sqrt{4x-3}\right)-4\left(\sqrt[3]{(6x-5)^2}+\sqrt[3]{6x-5}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(6x-5)^2}+\sqrt[3]{6x-5}+1\right)\left(1+\sqrt{4x-3}\right)}$$

- Ta thấy giới hạn mới thu được vẫn còn là dạng vô định $\frac{0}{0}$ nên vẫn tiếp tục phải khử dạng vô định. Mà việc khử này sẽ rất phức tạp do biểu thức mới thu được khá cồng kềnh. Để giải quyết khó khăn đó ta thấy trong lời giải trình bày ở trên, ta tiến hành đổi biến để cho mẫu gọn lại và không thêm bớt 1 trên tử thức mà thêm bớt nhị thức $2t+1$. Vậy cơ sở nào để tìm ra nhị thức đó?

Ta mong muốn sau khi thêm bớt tử thức với một lượng $A(t)$ nào đó rồi tách ra thành hai phân thức để nhân liên hợp thì trên tử thức xuất hiện nhân tử t^2 để giản ước với t^2 dưới mẫu

$$\frac{\sqrt[3]{6t+1}-\sqrt{4t+1}}{t^2}=\frac{\sqrt[3]{6t+1}-A(t)}{t^2}+\frac{A(t)-\sqrt{4t+1}}{t^2}.$$

Vậy ta phải có $A^2(t)-(4t+1)=kt^2 \Rightarrow A^2(t)=kt^2+4t+1 \Rightarrow k=4$

và $A^2(t)=(2t+1)^2 \Rightarrow A(t)=2t+1$.

- Ở nhiều bài toán giới hạn, ta thấy việc sử dụng MTCT là nhanh hơn giải thông thường. Tuy nhiên chúng tôi vẫn khuyến nghị độc giả nên nắm vững phương pháp giải thông thường (theo hình thức tự luận), vì nhiều bài tập không chỉ đơn thuần là tính giới hạn mà người ra đề có thể hỏi bằng nhiều hình thức khác nhau, đặc biệt có nhiều cách ra đề hạn chế việc sử dụng MTCT để tìm ra đáp án.

STUDY TIP

Trong nhiều bài toán, không nên chỉ tính giá trị hàm số tại một điểm mà nên tính lại một số điểm từ lớn đến nhỏ và từ cả hai phía trái, phải của x_0.

Ví dụ 6. Giới hạn của hàm số $f(x)=\frac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1}$ khi $x\to 1$ bằng

A. $-\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{-a-2}{3}$. **D.** $\frac{2-a}{3}$.

Lời giải

Cách 1: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-a-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-a-1}{x^2+x+1}=-\frac{a}{3}$

Cách 2: (Đặc biệt hóa để sử dụng MTCT) Cho a một giá trị bất kì, chẳng hạn $a=1$, thì $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$. Dùng MTCT ta tìm được $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}=-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{a}{3}$.

Vậy chọn đáp án A.

Giải thích: phương trình $x^2-\left(a+2\right)x+a+1=0$ có tổng các hệ số bằng 0 nên ta có một nghiệm bằng 1, nghiệm còn lại bằng $a+1$. Do đó ta phân tích được $x^2-\left(a+2\right)x+a+1=\left(x-1\right)\left(x-a-1\right)$.

STUDY TIP

- Nếu đa thức có tổng các hệ số bằng 0 thì đa thức có một nghiệm bằng 1.
- Nếu đa thức có tổng các hệ số của các lũy thừa bậc chẵn bằng tổng các hệ số của lũy thừa bậc lẻ thì đa thức có một nghiệm bằng -1.

Ví dụ 7. Giả sử $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{2x}=L$. Hệ số a bằng bao nhiêu để $L=3$?

A. -6. **B.** 6. **C.** -12. **D.** 12.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{2x\left(\sqrt{1+ax}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{2\left(\sqrt{1+ax}+1\right)}=\dfrac{a}{4}$

Vậy $L=\dfrac{a}{4}$. Do đó $L=3\Leftrightarrow\dfrac{a}{4}=3\Leftrightarrow a=12$. Đáp án đúng là D.

Cách 2: Sử dụng MTCT tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{2x}$ lần lượt với a bằng -6, 6, -12, 12. Ta thấy với $a=12$ thì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{2x}$ bằng 3. Vậy chọn đáp án D.

STUDY TIP

Một trong các kĩ thuật giải bài toán trắc nghiệm là thử lần lượt các đáp án và chọn ra đáp án thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. Các bài toán liên quan đến giới hạn đặc biệt

Trong sách giáo khoa đại số và giải tích 11 có nêu một giới hạn đặc biệt dạng $\dfrac{0}{0}$

Đó là $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Sau đây ta xét một số ví dụ áp dụng kết quả này.

Ví dụ 8: Cho a và b là các số thực khác 0. Khi đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{\sin bx}$ bằng

A. a. **B.** b. **C.** $\frac{a}{b}$. **D.** $\frac{b}{a}$.

Lời giải

Đáp án C.

Cách 1: Ta có $\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin bx}.\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.\lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin bx}$

Đổi biến $t=bx$ ta thấy khi $x\to 0$ thì $t\to 0$. Do đó $\lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$

Vậy $\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$.

Cách 2: Cho a và b các giá trị cụ thể, chẳng hạn $a=2, b=3$.

Sử dụng MTCT tìm giới hạn $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x}$ ta được kết quả bằng $\frac{2}{3}$, tức là bằng $\frac{a}{b}$.

Vậy chọn C.

STUDY TIP

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin A(x)}{A(x)}=1$, với điều kiện $\lim_{x\to 0}A(x)=0$

Ví dụ 9: Cho số thực a khác 0. Khi đó $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos ax}$ bằng

A. $\frac{2}{a^2}$. **B.** $\frac{2}{a}$. **C.** $2a^2$. **D.** $2a$.

Lời giải

Đáp án A

Cách 1: Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos ax}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{ax}{2}}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(\frac{ax}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{ax}{2}}.\frac{2}{a^2}\right]=\frac{2}{a^2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{ax}{2}}{\sin\frac{ax}{2}}\right)^2=\frac{2}{a^2}.1^2=\frac{2}{a^2}.$$

Cách 2: Cho a là một giá trị cụ thể, chẳng hạn $a=2$ (không nên lấy $a=1$, vì khi đó giá trị của $\frac{2}{a^2}$ và $\frac{2}{a}$ cũng bằng nhau). Sử dụng MTCT tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}$ ta được kết quả bằng $\frac{1}{2}$, tức là bằng $\frac{2}{a^2}$. Vậy chọn đáp án A.

STUDY TIP

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^k A(x)}{A^k(x)}=1$$

điều kiện $\lim\limits_{x\to 0}A(x)=0$

Ví dụ 10: $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$ bằng

A. $\tan a$. **B.** $\cot a$. **C.** $\sin a$. **D.** $\cos a$.

Lời giải

Đáp án D

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{2.\frac{x-a}{2}}=\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}.\cos\frac{x+a}{2}\right)$

Mà $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=1$ (xem STUDY TIP trên), $\lim\limits_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=\cos a$.

Vậy $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a$. Do đó chọn đáp án D.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin x-\sin 1}{x-1}$ (ứng với $a=1$).

So sánh kết quả với $\tan 1,\cot 1,\sin 1,\cos 1$ ta được $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin x-\sin 1}{x-1}=\cos 1$.

Vậy chọn đáp án D.

3. Đọc thêm

Ví dụ 11: Cho a và b là các số nguyên dương. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{\sin bx}=\frac{5}{3}$. Tích ab có thể nhận giá trị bằng số nào trong các số dưới đây?

A. 15. **B.** 60. **C.** 240. **D.** Cả ba đáp án trên.

Lời giải

Đáp án D

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{ax}-1}{ax}.\dfrac{bx}{\sin bx}.\dfrac{a}{b}\right)=1.1.\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{b}$

Vậy để $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{\sin bx}=\dfrac{5}{3}$ thì $\dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{3}$. Vì a và b là các số nguyên dương nên suy ra $a=5k,b=3k$ với k nguyên dương. Do đó $ab=15k^2$.

+ $15k^2=15\Leftrightarrow k^2=1\Rightarrow k=1\Rightarrow ab=15.$

+ $15k^2=60\Leftrightarrow k^2=4\Rightarrow k=2\Rightarrow ab=60.$

+ $15k^2=240\Leftrightarrow k^2=16\Rightarrow k=4\Rightarrow ab=240$

Vậy cả ba đáp án đều đúng. Do đó chọn đáp án D.

STUDY TIP

Ngoài giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, Sách giáo khoa giải tích 12 nâng cao chương 2, 5 còn giới thiệu thêm các giới hạn:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1,$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^3)-1}{x^k}$, trong đó k là một số nguyên dương. Tìm tất cả các giá trị của k để $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới 0.

A. $k\in\mathbb{Z},k>3$. **B.** $k\in\mathbb{Z},0<k<3$. **C.** $k\in\mathbb{Z},k\ge 3$. **D.** $k\in\mathbb{Z},0<k\le 3$.

Lời giải

Đáp án D

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)-1}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x^3)-1}{x^3}.\dfrac{1}{x^{k-3}}\right)$

Mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)-1}{x^3}=1$ nên để $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới 0 thì hàm số $g(x)=\dfrac{1}{x^{k-3}}$ phải có giới hạn hữu hạn khi x dần tới 0. Muốn vậy thì $k-3\le 0\Leftrightarrow k\le 3$. Vì k nguyên dương nên đáp án là D.

Cách 2: Sử dụng MTTCT tìm giới hạn khi $k=3$, ta được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)-1}{x^3}=1$.

Vậy ta chỉ xét đáp án C hoặc D. Chẳng hạn với đáp án C, ta sử dụng MTCT tìm giới hạn khi $k=4$. Ta được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)-1}{x^3}=-\infty$. Do đó loại đáp án C. Vậy đáp án đúng là D.

*** Trong chương trình lớp 12 sẽ được học khái niệm căn bậc n.

Định nghĩa

Cho số thực b và số nguyên dương n $(n\ge 2)$. Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu

$a^n=b$

Với n chẵn và:

$+b<0$: Không tồn tạo căn bậc n của b.

$+b=0$: Có một căn bậc n của b là số 0.

$+b>0$: Có hai căn trái dấu, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$, còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$

Sau đây ta xét một vài ví dụ liên quan đến căn bậc n.

STUDY TIP

$a=\sqrt[n]{b}\Rightarrow a^n=b$

-Mọi số thực đều có một căn bậc lẻ và chỉ có một căn bậc lẻ

- Chỉ có số không âm mới có căn bậc chẵn.

Số 0 có một căn bậc chẵn là 0.

Các số dương có hai căn bậc chẵn đối nhau.

Ví dụ 13: Cho a là một số thực khác 0 và n là một số nguyên dương, $n\ge 2$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{a}{n}$.

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{n}{a}$.

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{1}{n}$.

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{1}{a}$.

Lời giải

Đáp án A.

Cách 1: Sử dụng MTCT tìm giới hạn với $n=5$ và $a=3$, ta được kết quả $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+3x}-1}{x}=\dfrac{3}{5}$ vậy đáp án đúng là A.

Cách 2: Đổi biến đặt $t=\sqrt[n]{1+ax}\Rightarrow t^n=1+ax\Rightarrow x=\dfrac{t^n-1}{a}$

Ta có khi $x\to 0$ thì $t\to 1$ và

$$\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=a\frac{t-1}{t^n-1}=a\frac{t-1}{(t-1)\left(t^{n-1}+t^{n-2}+\ldots+t+1\right)}=\frac{a}{t^{n-1}+t^{n-2}+\ldots+t+1}$$

Mà $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a}{t^{n-1}+t^{n-2}+..+t+1}=\dfrac{a}{n}$ nên suy ra $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{a}{n}$. Vậy chọn A.

STUDY TIP

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\frac{a}{n}$$

$$a^n-b^n=(a-b)\times\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

$$a^n-1=(a-1)\times\left(a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1\right)$$

Ví dụ 14: Biết $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\frac{a}{b}$ trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, a và b là các số nguyên dương. Tổng $a+b$ bằng

A. 137. **B.** 138. **C.** 139. **D.** 140.

Lời giải

Đáp án C.

Với những bài dạng này, sẽ khó sử dụng MTCT để tìm đáp án đúng.

Đặt $t=x-8$. Suy ra $x=t+8$. $\lim_{x\to 8}t=0$ và

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\frac{\sqrt{t+9}-\sqrt[3]{t+27}}{\sqrt[4]{t+16}-2}=\frac{3\sqrt{1+\frac{t}{9}}-3\sqrt[3]{1+\frac{t}{27}}}{2\sqrt[4]{1+\frac{t}{16}}-2}$$

$$=\frac{3}{2}\frac{\frac{\sqrt{1+\frac{t}{9}}-1}{t}-\frac{\sqrt[3]{1+\frac{t}{27}}-1}{t}}{\frac{\sqrt[4]{1+\frac{t}{16}}-1}{t}}=g(t)$$

Do đó $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\lim_{t\to 0}g(t)$. Áp dụng ví dụ 13 Ta có:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{t}{9}}-1}{t}=\frac{\frac{1}{9}}{2}=\frac{1}{18};\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{t}{27}}-1}{t}=\frac{\frac{1}{27}}{3}=\frac{1}{81};\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+\frac{t}{16}}-1}{t}=\frac{\frac{1}{16}}{4}=\frac{1}{64}$$

Vậy $\lim_{t\to 0}g(t)=\frac{3}{2}.\frac{\frac{1}{18}-\frac{1}{81}}{\frac{1}{64}}=\frac{112}{27}$

Do đó $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\frac{112}{27}$. Vậy $a=112,b=27$ và $a+b=139$

*** Tính giới hạn vô định dạng $\frac{0}{0}$ bằng đạo hàm (Quy tắc L'Hôpital).

STUDY TIP

*Quy tắc L'Hôpital

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)}{g(x_0)}.$$

Trong đó $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$, $x_0\in(a;b)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ (Hoặc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$)

Và $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tồn tại

Trước khi đọc phần này xin đọc chương đạo hàm trong chương trình lớp 11

Ví dụ 15: Ta xét lại ví dụ 9 đã nêu ở trên.

Cho số thực a khác 0. Khi đó $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos ax}$ bằng

A. $\frac{2}{a^2}$. **B.** $\frac{2}{a}$. **C.** $2a^2$. **D.** $2a$.

Lời giải

Đáp án A

Ngoài hai lời giải đã nêu ở trên ta còn một cách áp dụng Quy tắc L'Hopital như sau:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos ax}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{a\sin ax}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{a^2\cos ax}=\frac{2}{a^2}$$

Ở đây ta áp dụng Quy tắc L'Hopital 2 lần. Cách sử dụng Quy tắc này rất hữu dụng khi giải các bài toán trắc nghiệm. Tuy nhiên không áp dụng Quy tắc này cho các bài toán tự luận do Quy tắc L'Hopital không được trình bày trong chương trình THPT.

STUDY TIP

Có thể áp dụng quy tắc L'Hopital nhiều lần để tính giới hạn

Đề nghị: Độc giả hãy vận dụng quy tắc L'Hopital để giải các ví dụ đã nêu ở dạng 2 này.

bài tập dạng trắc nghiệm. Nếu là bài tập dạng tự luận thì các em cần trình bày chi tiết theo phương pháp đã nêu trên. Riêng A và B, ta giải tự luận như sau:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}+\sqrt{5})=+\infty$$

Ví dụ 2: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}$ bằng:

A. 0 **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $+\infty$ **D.** $-\infty$

Đáp án D

Cách 1: Theo kết quả đã nêu ở trên thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=-\infty$

Cách 2: Sử dụng MTCT

Bổ sung: Nếu là bài toán tự luận 'Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}$" thì ta có hai cách giải như sau:

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-3+\frac{1}{x}}{\frac{5}{x}-2}$. Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-3+\frac{1}{x})=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{5}{x}-2)=-2<0$

nên theo qui tắc 2, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-3+\frac{1}{x}}{\frac{5}{x}-2}=-\infty$

Cách 2 : Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x^2}}$. Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3})=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x^2})=0$ và

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x^2}\right)<0$ với mọi $x<0$ nên theo qui tắc 2, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x^2}}=-\infty$

□ STUDY TIP

k	a	$\lim\limits_{x\to-\infty}ax^k$
Chẵn	+	$+\infty$
	-	$-\infty$
Lẻ	+	$-\infty$
	-	$+\infty$

Ví dụ 3 : Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^5+x^3+7}{2x^3-3x^2+1}$ **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3x^2-x^3}{4x^2+1}$ **C.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^4+5}{x-x^3+1}$ **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x^6}{1+x-5x^2}$

Đáp án C

Lời giải

Cách 1 : Theo cách ghi kết quả ở trên thì

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^5+x^3+7}{2x^3-3x^2+1}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3x^2-x^3}{4x^2+1}=-\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^4+5}{x-x^3+1}=3\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x^6}{1+x-5x^5}=\frac{1}{5}\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=+\infty$;

Cách 2 : sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn