

Suy ra $M = 2; m = -3$. Do đó $T = 13$.

Câu 29. Đáp án C.

Để chỉ ra được $u_n > 0, \forall n \geq 1$. Từ hệ thức truy hồi của dãy số, ta có

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + 2n + 2, \forall n \geq 1.$$

Suy ra

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_1} + 2(1 + 2 + \dots + n - 1) + 2(n - 1) \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} = 2 + n(n - 1) + 2(n - 1) = n^2 + n \Rightarrow u_n = \frac{1}{n(n + 1)}.$$

$$\text{Do đó } u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}, \forall n \geq 1.$$

$$\text{Vậy } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 - \frac{1}{n + 1} = \frac{n}{n + 1}. \text{ Vì } S_n < \frac{2017}{2018} \text{ nên } \frac{n}{n + 1} < \frac{2017}{2018} \Rightarrow n < 2017.$$

Suy ra số nguyên dương lớn nhất để $S_n < \frac{2017}{2018}$ là $n = 2016$. Vì vậy phương án đúng là

C.

CẤP SỐ CỘNG

A. LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA.

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d .

Số không đổi d được gọi là **công sai** của cấp số cộng.

Đặc biệt, khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một **dãy số không đổi** (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

Nhận xét: Từ định nghĩa, ta có:

1) Nếu (u_n) là một cấp số cộng với công sai d , ta có công thức truy hồi

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + d, n \in \mathbb{N}^*} \quad (1)$$

2) Cấp số cộng (u_n) là một dãy số tăng khi và chỉ khi công sai $d > 0$.

3) Cấp số cộng (u_n) là một dãy số giảm khi và chỉ khi công sai $d < 0$.

STUDY TIP

Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, chúng ta cần chứng minh $u_{n+1} - u_n$ là một hằng số với mọi số nguyên dương n .

Ví dụ 1. Chứng minh rằng dãy số hữu hạn sau là một cấp số cộng:

$-2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19$.

Lời giải

Vi $1 = -2 + 3; \quad 4 = 1 + 3; \quad 7 = 4 + 3; \quad 10 = 7 + 3;$
 $13 = 10 + 3; \quad 16 = 13 + 3; \quad 19 = 16 + 3.$

Nên theo định nghĩa cấp số cộng, dãy số $-2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19$ là một cấp số cộng với công sai $d = 3$.

Ví dụ 2. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng? Tìm số hạng đầu và công sai của nó.

a) Dãy số (a_n) , với $a_n = 4n - 3$;

b) Dãy số (b_n) , với $b_n = \frac{2-3n}{4}$;

c) Dãy số (c_n) , với $c_n = 2018^n$;

d) Dãy số (d_n) , với $d_n = n^2$.

Lời giải

a) Ta có $a_{n+1} = 4(n+1) - 3 = 4n + 1$ nên $a_{n+1} - a_n = (4n + 1) - (4n - 3) = 4, \forall n \geq 1$.

Do đó (a_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $a_1 = 4 \cdot 1 - 3 = 1$ và công sai $d = 4$.

b) Ta có $b_{n+1} = \frac{2-3(n+1)}{4} = \frac{-1-3n}{4}$ nên $b_{n+1} - b_n = \frac{-1-3n}{4} - \frac{2-3n}{4} = -\frac{3}{4}, \forall n \geq 1$

Suy ra (b_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $b_1 = \frac{2-3 \cdot 1}{4} = -\frac{1}{4}$ và công sai $d = -\frac{3}{4}$.

c) Ta có $c_{n+1} = 2018^{n+1}$ nên $c_{n+1} - c_n = 2018^{n+1} - 2018^n = 2017 \cdot 2018^n$ (phụ thuộc vào giá trị của n).

Suy ra (c_n) không phải là một cấp số cộng.

d) Ta có $d_{n+1} = (n+1)^2$ nên $d_{n+1} - d_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$ (phụ thuộc vào giá trị của n).

Suy ra (d_n) không phải là một cấp số cộng.

Ví dụ 3. Cho cấp số cộng (u_n) có 7 số hạng với số hạng đầu $u_1 = \frac{2}{3}$ và công sai $d = -\frac{4}{3}$. Viết dạng khai triển của cấp số cộng đó.

Lời giải

Ta có $u_2 = u_1 + d = -\frac{2}{3}; \quad u_3 = u_2 + d = -2; \quad u_4 = u_3 + d = -\frac{10}{3};$

$u_5 = u_4 + d = -\frac{14}{3}; \quad u_6 = u_5 + d = -6; \quad u_7 = u_6 + d = -\frac{22}{3};$

Vậy dạng khai triển của cấp số cộng (u_n) là $\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -2; -\frac{10}{3}; -\frac{14}{3}; -6; -\frac{22}{3}$.

II. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA CẤP SỐ CỘNG.

Định lý 1.

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \geq 2.} \quad (2)$$

STUDY TIP

Từ kết quả của định lý 1, ta rút ra nhận xét sau:

Cho cấp số cộng (u_n) biết hai số hạng u_p và u_q thì số hạng đầu và công sai được tính theo công thức:

$$(1) : d = \frac{u_p - u_q}{p - q}$$

$$(2) : u_1 = u_p - (p - 1)d.$$

Ví dụ 4. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 2$ và $d = -5$.

a) Tìm u_{20} .

b) Số -2018 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng?

Lời giải

a) Ta có $u_{20} = u_1 + (20 - 1)d = 2 + 19 \cdot (-5) = -93$.

b) Số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = u_1 + (n - 1)d = 7 - 5n$.

Vì $u_n = -2018$ nên $7 - 5n = -2018 \Leftrightarrow n = 405$.

Do $n = 405$ là số nguyên dương nên số -2018 là số hạng thứ 405 của cấp số cộng đã cho.

III. TÍNH CHẤT CÁC SỐ HẠNG CỦA CẤP SỐ CỘNG.

Định lý 2.

Trong một cấp số cộng (u_n) , mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \text{ với } k \geq 2. \quad (3)$$

STUDY TIP

Một cách tổng quát, ta có:

Nếu (u_n) là cấp số cộng thì $u_p = \frac{u_{p-k} + u_{p+k}}{2}, 1 \leq k < p$.

Ví dụ 5.

a) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{99} = 101$ và $u_{101} = 99$. Tìm u_{100} .

b) Cho cấp số cộng $-2, x, 6, y$. Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2$.

Lời giải

a) Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $u_{100} = \frac{u_{99} + u_{101}}{2}$ nên $u_{100} = 100$.

b) Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $x = \frac{-2 + 6}{2} = 2$ và $6 = \frac{x + y}{2}$.

Vì $x = 2$ nên $y = 10$.

Vậy $P = x^2 + y^2 = 2^2 + 10^2 = 104$.

IV. TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA CẤP SỐ CỘNG.

Định lý 3.

Cho một cấp số cộng (u_n) . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Khi đó:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \quad (4) \quad \text{hoặc} \quad S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d. \quad (5)$$

STUDY TIP

- 1) Chúng ta thường sử dụng công thức (4) để tính S_n khi biết số hạng đầu và số hạng thứ n của cấp số cộng.
- 2) Để tính được S_n , thì công thức (5) được sử dụng mọi trường hợp. Cụ thể là, chúng ta cần tìm được số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng.
- 3) Các bài toán về cấp số cộng thường đề cập đến 5 đại lượng u_1, d, n, u_n, S_n . Chúng ta cần biết ba đại lượng trong năm đại lượng là có thể tìm được hai đại lượng còn lại. Tuy nhiên, theo các công thức tính u_n, S_n thì các bài toán về cấp số cộng sẽ quy về việc tính ba đại lượng u_1, d, n .

Ví dụ 6. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$ và $d = 3$.

- a) Tính tổng của 25 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.
- b) Biết $S_n = 6095374$, tìm n .

Lời giải

$$\text{Ta có } S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = -2n + \frac{3(n^2 - n)}{2} = \frac{n(3n-7)}{2}.$$

a) Ta có $S_{25} = \frac{25(3 \cdot 25 - 7)}{2} = 850$.

b) Vì $S_n = 6095374$ nên $\frac{n(3n-7)}{2} = 6095374 \Leftrightarrow 3n^2 - 7n - 12190748 = 0$

Giải phương trình bậc hai trên với n nguyên dương, ta tìm được $n = 2017$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ CẤP SỐ CỘNG

Câu 1. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

- A. Dãy số (a_n) , với $a_n = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- B. Dãy số (b_n) , với $b_1 = 1, b_{n+1} = 2b_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- C. Dãy số (c_n) , với $c_n = (2n-3)^2 - 4n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- D. Dãy số (d_n) , với $d_1 = 1, d_{n+1} = \frac{2018}{d_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Đáp án C.

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

- *Phương án A:* Ba số hạng đầu tiên của dãy số 2, 4, 8.

Ba số này không lập thành cấp số cộng vì $4 - 2 = 2 \neq 4 = 8 - 4$.

- *Phương án B:* Ba số hạng đầu tiên của dãy số 1, 3, 7.

Ba số này không lập thành cấp số cộng vì $3 - 1 = 2 \neq 4 = 7 - 3$.

- *Phương án C:* Ta có $c_n = 9 - 12n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Do đó, $c_{n+1} - c_n = -12, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (c_n) là cấp số cộng.

- *Phương án D:* Ba số hạng đầu tiên của dãy số 1, 1009, $\frac{1009}{505}$.

Ba số này không lập thành cấp số cộng.

STUDY TIP

1) Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, chúng ta cần chứng minh $u_{n+1} - u_n$ là một hằng số với mọi số nguyên dương n .

2) Để chỉ ra dãy số (u_n) không phải là một cấp số cộng, chúng ta cần phải chỉ ra ba số hạng liên tiếp u_k, u_{k+1}, u_{k+2} của dãy số không lập thành một cấp số cộng.

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Tìm số hạng u_{17} .

- A. $u_{17} = 242$. B. $u_{17} = 235$. C. $u_{17} = 11$. D. $u_{17} = 4$.

Lời giải

Đáp án C.

Ta có công sai của cấp số cộng là $d = \frac{u_3 - u_{15}}{3 - 15} = \frac{84}{-12} = -7$.

Suy ra $u_{17} = u_1 + (17 - 1)d = 11$.

Vậy phương án đúng là C.

STUDY TIP

Với việc biết được số hạng đầu và công sai của một cấp số cộng, chúng ta hoàn toàn xác định được các yếu tố còn lại của một cấp số cộng như số hạng tổng quát, thứ tự của số hạng và tổng của n số hạng đầu tiên. Tham khảo các bài tập sau.

Nhận xét: Cụ thể chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi sau đây:

Câu 1: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Số 11 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng đã cho?

- A. 17. B. 16. C. 18. D. 19.

Câu 2: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) .

- A. $u_n = 130 - 7n$. B. $u_n = 116 + 7n$. C. $u_n = 123 - 7n$. D. $u_n = 123 + 7n$.

Câu 3: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Tính tổng S_{2017} của 2017 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

- A. $S_{2017} = 14487102,5$. B. $S_{2017} = -13983861$.
C. $S_{2017} = -13990920,5$. D. $S_{2017} = 14480043$.

Câu 4: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Biết rằng tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng 18, tìm n .

- A. $n = 34$. B. $n = 35$. C. $n = 36$. D. $n = 37$.

Câu 3. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 + 2u_5 = 0$ và $S_4 = 14$. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng.

- A. $u_1 = 8, d = 3$. B. $u_1 = -8, d = 3$. C. $u_1 = -8, d = -3$. D. $u_1 = 8, d = -3$.

Lời giải

Đáp án D.

Ta có $u_1 + 2u_5 = 0 \Leftrightarrow u_1 + 2(u_1 + 4d) = 0 \Leftrightarrow 3u_1 + 8d = 0$.

$$S_4 = 14 \Leftrightarrow \frac{4(2u_1 + 3d)}{2} = 14 \Leftrightarrow 2u_1 + 3d = 7$$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3u_1 + 8d = 0 \\ 2u_1 + 3d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ d = -3 \end{cases}$.

Vậy phương án đúng là D.

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n) . Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề sai?

A. $u_{m+k} + u_{n-k} = u_m + u_n$, với $k < m, k < n$.

B. $u_{m-k} + u_{m+k} = 2u_m$, với $k < m$.

C. $u_m = u_k + (m-k)d$, với $k < m$.

D. $u_{3n} = u_{2n} + u_{n+1}$.

Lời giải

Đáp án D.

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án sai.

+ *Phương án A:* Ta có $u_{m+k} + u_{n-k} = u_1 + (m+k-1)d + u_1 + (n-k-1)d$
 $= u_1 + (m-1)d + u_1 + (n-1)d = u_m + u_n$.

Do đó A là phương án đúng.

+ *Phương án B:* Ta có $u_{m+k} + u_{m-k} = u_1 + (m+k-1)d + u_1 + (m-k-1)d$
 $= 2[u_1 + (m-1)d] = 2u_m$.

Do đó B là phương án đúng.

+ *Phương án C:* Ta có $u_m = u_1 + (m-1)d = u_1 + (k-1)d + (m-k)d = u_k + (m-k)d$

Do đó C là phương án đúng.

+ *Phương án D:* Ta có $u_{2n} + u_{n+1} = u_1 + (2n-1)d + u_1 + nd = u_1 + (3n-1)d + u_1 = u_{3n} + u_1$

Vậy phương án D sai.

STUDY TIP

Qua ví dụ này, chúng ta lưu ý một số tính chất của cấp số cộng như:

1) $u_{m+k} + u_{n-k} = u_m + u_n$, với $k < m, k < n$.

2) $u_{m-k} + u_{m+k} = 2u_m$, với $k < m$.

3) $u_m = u_k + (m-k)d$, với $k < m$.

Do đó C là phương án đúng.

+ *Phương án D:* Ta có $u_{2n} + u_{n+1} = u_1 + (2n-1)d + u_1 + nd = u_1 + (3n-1)d + u_1 = u_{3n} + u_1 \neq u_{3n}$.

Vậy D là phương án sai.

- Câu 5.** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 321$ và $u_{n+1} = u_n - 3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Tính tổng S của 125 số hạng đầu tiên của dãy số đó.
A. $S = 16875$. **B.** $S = 63375$. **C.** $S = 63562,5$. **D.** $S = 16687,5$.

Lời giải

Từ công thức truy hồi của dãy số (u_n) , ta có (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = -3$. Do đó tổng của 125 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là

$$S = \frac{125 \cdot [2u_1 + (125-1)d]}{2} = 16875$$

Vậy chọn phương án A.

- Câu 6.** Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d = -3$ và $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.
A. $S_{100} = -14650$. **B.** $S_{100} = -14400$. **C.** $S_{100} = -14250$. **D.** $S_{100} = -15450$.

Lời giải

Đặt $a = u_1$ thì

$$u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = (a+d)^2 + (a+2d)^2 + (a+3d)^2 = 3a^2 - 36a + 126 = 3(a-6)^2 + 18 \geq 18 \text{ với mọi } a.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a-6=0 \Leftrightarrow a=6$. Suy ra $u_1 = 6$.

Ta có $S_{100} = \frac{100 \cdot [2u_1 + (100-1)d]}{2} = -14250$. Vậy phương án đúng là C.

Nhận xét: Từ kết quả bài tập này, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi sau đây:

- Câu 1.** Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d = -3$ và $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ 2017 của cấp số cộng đó.
A. $u_{2017} = -6042$. **B.** $u_{2017} = -6045$. **C.** $u_{2017} = -6044$. **D.** $u_{2017} = -6054$.
- Câu 2.** Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d = -3$ và $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số -2019 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng đã cho?
A. 676. **B.** 675. **C.** 672. **D.** 674.
- Câu 3.** Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d = -3$ và $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.
A. $u_n = 9 - 3n$. **B.** $u_n = 6 - 3n$. **C.** $u_n = 5 - 3n$. **D.** $u_n = -3 - 3n$.
- Câu 4.** Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d = -3$, trong đó m là tham số. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$.
A. $\min F = 18$. **B.** $\min F = 6$. **C.** $\min F = 99$. **D.** $\min F = 117$.
- Câu 7.** Cho cấp số cộng $3, 8, 13, \dots$. Tính tổng $S = 3 + 8 + 13 + \dots + 2018$.
A. $S = 408422$. **B.** $S = 408242$. **C.** $S = 407231,5$. **D.** $S = 409252,5$.

Lời giải

Cấp số cộng 3,8,13,... có số hạng đầu $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$.

Suy ra 2018 là số hạng thứ $\frac{2018-3}{5} + 1 = 404$ của cấp số cộng.

Do đó $S = S_{404} = \frac{404 \cdot (3 + 2018)}{2} = 408242$. Vậy B là phương án đúng.

Nhận xét: Từ kết quả của bài tập này, chúng ta có thể giải quyết các câu hỏi sau đây:

Câu 1. Cho cấp số cộng 3,8,13,... Số 2018 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng đó?

A. 402. B. 403. C. 404. D. 405.

Câu 2. Cho cấp số cộng 3,8,13,...,x,... Tìm x biết $3+8+13+\dots+x=408242$.

A. $x = 2017$. B. $x = 2016$. C. $x = 2019$. D. $x = 2018$.

Câu 3. Cần viết thêm vào giữa hai số 3 và 2018 bao nhiêu số hạng để thu được một cấp số cộng hữu hạn có tổng các số hạng bằng 408242 ?

A. 402. B. 403. C. 405. D. 404.

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$, $u_k = 2018$ và $S_k = 408242$. Số hạng thứ 2018 của cấp số cộng đó là số nào dưới đây?

A. 10088. B. 10093. C. 10083. D. 10098.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: $x^3 - 3mx^2 + 2m(m-4)x + 9m^2 - m = 0$.

A. $m = 0$. B. $m = \frac{17 + \sqrt{265}}{12}$. C. $m = \frac{17 - \sqrt{265}}{12}$. D. $m = 1$.

Lời giải

Cách 1: Giải bài toán như cách giải tự luận.

- Điều kiện cần: Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng. Theo định lý Vi-ét đối với phương trình bậc ba, ta có $x_1 + x_2 + x_3 = 3m$. Vì x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng nên $x_1 + x_3 = 2x_2$. Suy ra $3x_2 = 3m \Leftrightarrow x_2 = m$. Thay $x_2 = m$ vào phương trình đã cho, ta được

$$m^3 - 3m \cdot m^2 + 2m(m-4) \cdot m + 9m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

- Điều kiện đủ:

+ Với $m = 0$ thì ta có phương trình $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (phương trình có nghiệm duy nhất).

Do đó $m = 0$ không phải giá trị cần tìm.

+ Với $m = 1$, ta có phương trình $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -2; x = 4$.

Ba nghiệm $-2; 1; 4$ lập thành một cấp số cộng nên $m=1$ là giá trị cần tìm.

Cách 2: Kiểm tra từng phương án cho đến khi chọn được phương án đúng.

Trước hết, ta kiểm tra phương án A và D (vì m nguyên).

+ Với $m=0$ thì ta có phương trình $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (phương trình có nghiệm duy nhất).

Do đó $m=0$ không phải giá trị cần tìm.

+ Với $m=1$, ta có phương trình $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -2; x = 4$.

Ba nghiệm $-2; 1; 4$ lập thành một cấp số cộng nên $m=1$ là giá trị cần tìm.

STUDY TIP

Phương trình bậc ba $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$) có ba nghiệm phân biệt lập thành

một cấp số cộng thì điều kiện cần là $x = -\frac{b}{3a}$ là nghiệm của phương trình. Giải điều

kiện này ta có hệ thức liên hệ giữa các hệ số của phương trình là

$2b^3 - 9abc + 27a^3d = 0$. Trong thực hành giải toán, chúng ta cũng chỉ cần ghi nhớ điều

kiện cần là $x = -\frac{b}{3a}$ là nghiệm của phương trình.

Câu 9. Biết rằng tồn tại hai giá trị của tham số m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: $x^4 - 10x^2 + 2m^2 + 7m = 0$, tính tổng lập phương của hai giá trị đó.

A. $-\frac{343}{8}$.

B. $\frac{721}{8}$.

C. $-\frac{721}{8}$.

D. $\frac{343}{8}$.

Lời giải

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Khi đó ta có phương trình: $t^2 - 10t + 2m^2 + 7m = 0$ (*).

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2

nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 5^2 - (2m^2 + 7m) > 0 \\ 2m^2 + 7m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < 2m^2 + 7m < 25$.

(do tổng hai nghiệm bằng $10 > 0$ nên không cần điều kiện này).

+ Với điều kiện trên thì (*) có hai nghiệm dương phân biệt là t_1, t_2 ($t_1 < t_2$).

Khi đó phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt là $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$.

Bốn nghiệm này lập thành một cấp số cộng khi

$$-\sqrt{t_1} - (-\sqrt{t_2}) = \sqrt{t_1} - (-\sqrt{t_1}) = \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1.$$

Theo định lý Vi-ét ta có: $t_1 + t_2 = 10; t_1.t_2 = 2m^2 + 7m$.

$$\text{Suy ra ta có hệ phương trình } \begin{cases} t_2 = 9t_1 \\ t_1 + t_2 = 10 \\ t_1.t_2 = 2m^2 + 7m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 9 \\ 2m^2 + 7m = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{9}{2} \end{cases}.$$

Cả hai giá trị này đều thỏa mãn điều kiện nên đều có thể nhận được.

$$\text{Do đó } 1^3 + \left(\frac{-9}{2}\right)^3 = -\frac{721}{8}.$$

Suy ra phương án đúng là C.

- Câu 10.** Một cơ sở khoan giếng đưa ra định mức giá như sau: Giá từ mét khoan đầu tiên là 100000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 30000 đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó. Một người muốn kí hợp đồng với cơ sở khoan giếng này để khoan một giếng sâu 20 mét lấy nước dùng cho sinh hoạt của gia đình. Hỏi sau khi hoàn thành việc khoan giếng, gia đình đó phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng số tiền bằng bao nhiêu?
- A.** 7700000 đồng. **B.** 15400000 đồng. **C.** 8000000 đồng. **D.** 7400000 đồng.

Lời giải

Gọi u_n là giá của mét khoan thứ n , trong đó $1 \leq n \leq 20$.

Theo giả thiết, ta có $u_1 = 100000$ và $u_{n+1} = u_n + 30000$ với $1 \leq n \leq 19$.

Ta có (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 100000$ và công sai $d = 30000$.

Tổng số tiền gia đình thanh toán cho cơ sở khoan giếng chính là tổng các số hạng của cấp số cộng (u_n) . Suy ra số tiền mà gia đình phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng là

$$S_{20} = u_1 + u_2 + \dots + u_{20} = \frac{20[2u_1 + (20-1)d]}{2} = 7700000 \text{ (đồng)}.$$

Vậy phương án đúng là A.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Dạng 1: Bài tập nhận dạng cấp số cộng

- Câu 1.** Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng?
- A.** $-3, 1, 5, 9, 14$. **B.** $5, 2, -1, -4, -7$. **C.** $\frac{5}{3}, 1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -3$. **D.** $-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.
- Câu 2.** Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** là cấp số cộng?
- A.** Dãy số (a_n) với $a_n = 3n - 5$.
- B.** Dãy số (b_n) với $b_n = \sqrt{3} - \sqrt{5}n$.
- C.** Dãy số (c_n) với $c_n = n^2 - n$.
- D.** Dãy số (d_n) với $d_n = 2017 \cot \frac{(4n-1)\pi}{2} + 2018$.
- Câu 3.** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: Ba số $\frac{1}{x+y}, \frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?
- A.** Ba số x^2, y^2, z^2 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.
- B.** Ba số y^2, z^2, x^2 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

C. Ba số y^2, x^2, z^2 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

D. Ba số z^2, y^2, x^2 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Dạng 2: Bài tập về xác định số hạng và công sai của cấp số cộng.

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n) xác định bởi $u_3 = -2; u_{n+1} = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

A. $u_n = 3n - 11$. B. $u_n = 3n - 8$. C. $u_n = 2n - 8$. D. $u_n = n - 5$.

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 2017; u_5 = 1945$. Tính u_{2018} .

A. $u_{2018} = -46367$. B. $u_{2018} = 50449$. C. $u_{2018} = -46391$. D. $u_{2018} = 50473$.

Câu 6. Cho cấp số cộng (x_n) có $S_n = 3n^2 - 2n$. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng đó.

A. $u_1 = 2; d = 7$. B. $u_1 = 1; d = 6$. C. $u_1 = 1; d = -6$. D. $u_1 = 2; d = 6$.

Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) có $S_n = 7n - 2n^2$. Tính giá trị của biểu thức $P = u_3^2 + u_5^2 + u_7^2$.

A. $P = 491$. B. $P = 419$. C. $P = 1089$. D. $P = 803$.

Câu 8. Cho cấp số cộng (u_n) với $\begin{cases} u_3 + u_5 = 5 \\ u_3 \cdot u_5 = 6 \end{cases}$. Tìm số hạng đầu của cấp số cộng.

A. $u_1 = 1$ hoặc $u_1 = 4$. B. $u_1 = 1$ hoặc $u_1 = -4$. C. $u_1 = -1$ hoặc $u_1 = 4$.
D. $u_1 = -1$ hoặc $u_1 = 1$.

Câu 9. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d = 2$ và $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số 2018 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng (u_n) ?

A. 1012. B. 1011. C. 1014. D. 1013.

Câu 10. Cho cấp số cộng $6, x, -2, y$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x = 2; y = 5$. B. $x = 4; y = 6$. C. $x = 2; y = -6$. D. $x = 4; y = -6$.

Câu 11. Viết sáu số xen giữa 3 và 24 để được một cấp số cộng có tám số hạng. Sáu số hạng cần viết thêm là

A. 6, 9, 12, 15, 18, 21. B. 21, 18, 15, 12, 9, 6.
C. $\frac{13}{2}, 10, \frac{27}{2}, 17, \frac{41}{2}, 24$. D. $\frac{16}{3}, \frac{23}{3}, \frac{37}{3}, \frac{44}{3}, \frac{58}{3}, \frac{65}{3}$.

Câu 12. Cho hai cấp số cộng $(x_n): 4, 7, 10, \dots$ và $(y_n): 1, 6, 11, \dots$. Hỏi trong 2017 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số cộng có bao nhiêu số hạng chung?

A. 404. B. 403. C. 672. D. 673.

Câu 13. Cho cấp số cộng $1, 7, 13, \dots, x$ thỏa mãn điều kiện $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280$. Tính giá trị của x .

A. $x = 53$. B. $x = 55$. C. $x = 57$. D. $x = 59$.

Câu 14. Biết rằng tồn tại các giá trị của $x \in [0; 2\pi]$ để ba số $1 + \sin x, \sin^2 x, 1 + \sin 3x$ lập thành một cấp số cộng, tính tổng S các giá trị đó của x .

- A. $S = 5\pi$. B. $S = 3\pi$. C. $S = \frac{7\pi}{2}$. D. $S = \frac{23\pi}{6}$.

Dạng 3: Bài tập về tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

Câu 15. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -3$ và tổng của 9 số hạng đầu tiên là $S_9 = 45$. Cấp số cộng trên có

- A. $S_{10} = 92$. B. $S_{20} = 980$. C. $S_3 = -56$. D. $S_{16} = 526$.

Câu 16. Cho cấp số cộng (x_n) có $x_3 + x_{13} = 80$. Tính tổng S_{15} của 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

- A. $S_{15} = 600$. B. $S_{15} = 800$. C. $S_{15} = 570$. D. $S_{15} = 630$.

Dạng 4: Bài tập liên quan đến tính chất của cấp số cộng.

Câu 17. Cho cấp số cộng (u_n) . Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

- A. $(n-p)u_m + (p-m)u_n + (m-n)u_p = 0$. B. $(m-n)u_m + (n-p)u_n + (p-m)u_p = 0$.
C. $(m-p)u_m + (n-m)u_n + (p-n)u_p = 0$. D. $(p-n)u_m + (m-p)u_n + (m-n)u_p = 0$.

Câu 18. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. Ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng.
B. Ba số $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ lập thành một cấp số cộng.
C. Ba số a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng.
D. Ba số $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ lập thành một cấp số cộng

Dạng 5: Bài tập liên quan đến cấp số cộng.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 10x^2 + m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

- A. $m = 16$. B. $m = 9$. C. $m = 24$. D. $m = 21$.

Câu 20. Biết rằng tồn tại đúng hai giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng, tính tổng bình phương của hai giá trị đó.

- A. $\frac{1312}{81}$. B. $\frac{1024}{81}$. C. $\frac{32}{9}$. D. $\frac{1600}{81}$.

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - x + m^2 - 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

- A. $m = \pm 16$. B. $m = -2$. C. $m = 2$. D. $m = \pm 2$.