

STUDY TIP

Dùng biến đổi lượng giác thì ta được $f(x) = g(x) + \frac{3}{4}$ do 2 hàm số khác nhau một hằng số nên cùng đạo hàm.

Câu 28: Cho hàm số $y = \cos^2 x + \sin x$. Phương trình $y' = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$

- A. 1 nghiệm. B. 2 nghiệm. C. 3 nghiệm. D. 4 nghiệm.

Đáp án C

Lời giải

$$y' = -2 \cos x \sin x + \cos x = \cos x(1 - 2 \sin x)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}; (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $x \in (0; \pi) \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6} \right\}$. Vậy có 3 nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$

STUDY TIP

Loại bài toán kết hợp giữa tính đạo hàm và giải phương trình lượng giác

Câu 29: Cho hàm số $y = (m+1)\sin x + m\cos x - (m+2)x + 1$. Tìm giá trị của m để $y' = 0$ có nghiệm?

- A. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$. B. $m \geq 2$. C. $-1 \leq m \leq 3$. D. $m \leq -2$.

Đáp án A

Lời giải

$$y' = (m+1)\cos x - m\sin x - (m+2)$$

$$\text{Phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow (m+1)\cos x - m\sin x = (m+2)$$

Điều kiện phương trình có nghiệm là $a^2 + b^2 \geq c^2$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 + m^2 \geq (m+2)^2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$$

STUDY TIP

Phương trình bậc nhất với $\sin x$ và $\cos x$ $a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Dạng 1: Đạo hàm của hàm đa thức – hữu tỷ - căn thức và hàm hợp

Câu 19. Đạo hàm của hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ là:

A. $5x^2 - 11x - 4$. B. $6x^2 - 18x + 12$. C. $6x^2 + 18x - 12$. D. $6x^2 - 9x - 12$.

Câu 20. Đạo hàm của hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$ (với m là tham số) bằng:

A. $-3x^2 + 6mx + 1 - m^2$. B. $-x^2 + 3mx - 1 - 3m$.
C. $3x^2 - 6mx - 3 + 3m^2$. D. $-3x^2 + 6mx + 3 - 3m^2$.

Câu 21. Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 1)^2(3 + 5x^2)$ bằng biểu thức có dạng $ax^5 + bx^3 + cx$. Khi đó $a - b + c$ bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 5.

Câu 22. Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 1)(x^3 + 2)(x^4 + 3)$ bằng biểu thức có dạng $ax^8 + bx^6 + cx^5 + 15x^4 + dx^3 + ex^2 + gx$. Khi đó $a - b + c - d + e - g$ bằng:

A. 0. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 23. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ bằng biểu thức có dạng $\frac{a}{(x-1)^2}$. Khi đó a nhận giá trị nào sau đây?

A. $a = -2$. B. $a = -1$. C. $a = -3$. D. $a = 3$.

Câu 24. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x-1)}$ bằng biểu thức có dạng $\frac{ax^2 + bx}{2(x-1)^2}$. Khi đó ab bằng:

A. -2. B. -1. C. 4. D. 6.

Câu 25. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 - 5x + 2}$ bằng biểu thức có dạng $\frac{ax^2 + bx + c}{(x - 5x + 2)^2}$. Khi đó $a + b + c$ bằng:

A. -1. B. 2. C. 3. D. -2.

Câu 26. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^3 - 2}$ bằng biểu thức có dạng $\frac{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}{(x^3 - 2)^2}$. Khi đó $a + b + c + d + e$ bằng:

A. -12. B. -10. C. 8. D. 5.

Câu 27. Đạo hàm của hàm số $y = (x - 2)\sqrt{x^2 + 1}$ bằng biểu thức có dạng $\frac{ax^2 + bx + c}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Khi đó $a.b.c$ bằng:

A. -2. B. -4. C. -6. D. -8.

Câu 28. Đạo hàm của hàm số $y = (x^6 - 3x^4)^2$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $12x^{11} - 52x^9 + 64x^7$. B. $12x^{11} - 73x^9 + 49x^7$.
C. $12x^{11} - 62x^9 + 70x^7$. D. $12x^{11} - 60x^9 + 72x^7$.

Câu 29. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{5x^2 - 2x + 1}$ biểu thức có dạng $\frac{ax+b}{\sqrt{5x^2 - 2x + 1}}$. Khi đó $T = \frac{a}{b}$ bằng:

- A. $T = -5$. B. $T = 5$. C. $T = -10$. D. $T = 10$.

Câu 30. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$ bằng biểu thức nào sau đây?

- A. $-\frac{1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2}$. B. $\frac{1}{2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-1}}$.
C. $\frac{1}{4\sqrt{x+1}} - \frac{1}{4\sqrt{x-1}}$. D. $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Câu 31. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ biểu thức có dạng $\frac{ax+b}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. Khi đó $P = ab$ bằng:

- A. $P = 1$. B. $P = -1$. C. $P = 2$. D. $P = -2$.

Câu 32. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x + \sqrt{x} - \frac{1}{x}}{x - \sqrt{x}}$ bằng biểu thức nào sau đây?.

- A. $\frac{4\sqrt{x} - 2x^2 - 3}{2\sqrt{x^3}(x - \sqrt{x})^2}$. B. $\frac{4\sqrt{x} + 2x^2 - 3}{x\sqrt{x}(x - \sqrt{x})^2}$. C. $\frac{\sqrt{x} - 2x^2 - 2}{2x\sqrt{x}(x - \sqrt{x})^2}$. D. $\frac{\sqrt{x} + 2x^2 + 1}{2x\sqrt{x}(x - \sqrt{x})^2}$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{2\sqrt{3x^2 + 2x + 1}}$. Giá trị $f'(0)$ là:

- A. 0 . B. 1 . C. $\frac{1}{2}$. D. Không tồn tại.

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = \frac{1-x}{2x+1}$ thì $f'(-\frac{1}{2})$ có giá trị là:

- A. 0 . B. 3 . C. -3 . D. Không tồn tại.

Câu 17: Cho $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)\cdots(x-2017)}$ thì $f'(0)$

- A. $\frac{1}{2017!}$. B. $2017!$. C. $-\frac{1}{2017!}$. D. $-2017!$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x-1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Hãy chọn đáp án sai:

- A. $f'(1) = 1$. B. Hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 1$.
C. Hàm số liên tục tại $x_0 = 1$. D. $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \geq 1 \\ x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$. Tập các giá trị của x để $f'(x) > 0$ là:

- A. $(-\infty; 0)$. B. $[-2; \sqrt{2}]$. C. $(-2; 2]$. D. $(-2; \sqrt{2})$

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{x^3 + 1}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$ là:

- A. $(-\infty; \sqrt{\frac{1}{2}})$. B. $[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty)$. C. $(-\infty; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}]$. D. $[\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; +\infty)$.

Câu 21: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right]$.

B. $\frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right]$.

C. $\frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right]$.

D. $\frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right]$.

Câu 22: Cho $f(x) = x^5 + x^3 - 2x - 3$. Tính $f'(1) + f'(-1) + 4f'(0)$.

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2$. Tính $f'(1)$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 24: Cho hàm số $y = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^3$. Hàm số có đạo hàm $f'(x)$ bằng:

A. $\frac{3}{2} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2\sqrt{x}} \right)$.

B. $x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$.

C. $\frac{3}{2} \left(-\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2\sqrt{x}} \right)$.

D. $\frac{3}{2} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2\sqrt{x}} \right)$.

Câu 25: Đạo hàm của hàm số $y = \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right)^2$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}$.

B. $2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

C. $\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

D. $2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$.

Câu 26: Cho hàm số $y = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3$. Đạo hàm y' bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{3(2x+1)^2}{(x-1)^4}$.

B. $\frac{(2x+1)^2}{(x-1)^4}$.

C. $\frac{-(2x+1)^2}{(x-1)^4}$.

D. $\frac{-9(2x+1)^2}{(x-1)^4}$.

Câu 27: Cho hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m+2)x^2 - 6(m+2)x + 1$. Tập giá trị của m để $y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ là

A. $[3; +\infty)$.

B. $[1; +\infty)$.

C. \emptyset .

D. $[4\sqrt{2}; +\infty)$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x+1}{x+1} & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2+ax+b & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tìm a, b để hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} .

A. $a = 0, b = 11$.

B. $a = 10, b = 11$.

C. $a = 20, b = 21$.

D. $a = 0, b = 1$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x) = -\frac{mx^2}{3} + \frac{mx^2}{2} - (3-m)x + 2$. Tìm m để $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

A. $m \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

B. $m \in (-\infty; 3)$.

C. $m \in \left(\frac{12}{5}; 3\right)$.

D. $m \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x) = \frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}$. Đạo hàm $f'(x)$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\begin{cases} -\frac{1}{x^2} & \text{khi } x < -1, x > 1 \\ 1 & \text{khi } -1 < x < 1 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} \frac{2}{x^2} & \text{khi } x < -1, x > 1 \\ 1 & \text{khi } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{khi } x < -1, x > 1 \\ -1 & \text{khi } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} -\frac{3}{x^2} & \text{khi } x < -1, x > 1 \\ 2 & \text{khi } -1 < x < 1 \end{cases}$.

Dạng 2: Đạo hàm các hàm số lượng giác

Câu 31: Hàm số $y = \cos x \cdot \sin^2 x$ có đạo hàm là biểu thức nào sau đây?

A. $\sin x(3\cos^2 x + 1)$.

B. $\sin x(3\cos^2 x - 1)$.

C. $\sin x(\cos^2 x - 1)$.

D. $\sin x(\cos^2 x + 1)$.

Câu 32: Hàm số $y = \frac{1}{2}(1 + \tan x)^2$ có đạo hàm là biểu thức nào sau đây?

- A. $(1 + \tan x)^2$. B. $1 + \tan^2 x$.
C. $(1 + \tan x)(1 + \tan^2 x)$. D. $1 + \tan x$.

Câu 33: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x}$ là biểu thức nào sau đây?

- A. $-\frac{1 + \sin^2 x}{2\sin^3 x}$. B. $-\frac{1 + \cos^2 x}{2\sin^3 x}$. C. $\frac{1 + \sin^2 x}{2\sin^3 x}$. D. $\frac{1 + \cos^2 x}{2\sin^3 x}$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$. Giá trị của $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) - f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ là

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{4}{9}$. C. $\frac{8}{9}$. D. $\frac{8}{3}$.

Câu 35: Hàm số $y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$ có $y' = \frac{ax^2 + bx + c}{(\cos x + x \sin x)^2}$. Hỏi $T = a + b + c$ bằng:

- A. 1. B. 2. C. 0. D. -1.

Câu 36: Cho hàm số $y = \cos 2x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}$. Xét hai kết quả:

(I) $y' = -2 \sin 2x \cdot \sin^2 \frac{x}{2} + \sin x \cdot \cos 2x$ (II) $y' = 2 \sin 2x \cdot \sin^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cdot \cos 2x$.

Cách nào đúng?

- A. Chỉ (I). B. Chỉ (II). C. Cả 2 đều đúng. D. Không có cách nào.

Câu 37: Đạo hàm của hàm số $y = \cot^2(\cos x) + \sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}$ là biểu thức nào sau đây?

- A. $-2 \cot(\cos x) \frac{1}{\sin^2(\cos x)} + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}$. B. $2 \cot(\cos x) \frac{1}{\sin^2(\cos x)} \sin x + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}$.
C. $-2 \cot(\cos x) \frac{1}{\sin^2(\cos x)} + \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}$. D. $2 \cot(\cos x) \frac{1}{\sin^2(\cos x)} \sin x + \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}$.

Câu 38: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}$ là biểu thức nào sau đây?

- A. $(x \cos x - \sin x) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$. B. $(x \cos x + \sin x) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sin^2 x} \right)$.
C. $(x \sin x - \cos x) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$. D. $(x \sin x + \cos x) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$.

Câu 39: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{|\sin x|}$ là biểu thức nào sau đây?

- A. $\frac{-\cot x}{|\sin x|}$. B. $\frac{\cot x}{|\sin x|}$. C. $\frac{\cot x}{\sin x}$. D. $\frac{-\cot x}{\sin x}$.

Câu 40: Cho hàm số $y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$. Đạo hàm $y' = a \cdot \sin 2x \cdot \cos(\cos 2x)$. Giá trị của a là số nguyên thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(0; 2)$. B. $(-1; 5)$. C. $(-3; 2)$. D. $(4; 7)$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm với mọi x và thỏa mãn $f(2x) = 4 \cos x \cdot f(x) - 2x$. Tính $f'(0)$.

- A. $f'(0) = 0$. B. $f'(0) = 1$. C. $f'(0) = -2$. D. $f'(0) = 3$.

Câu 42: Cho hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x) = 0$ trên đường tròn lượng giác ta được mấy điểm phân biệt?

- A. 1 điểm. B. 2 điểm. C. 4 điểm. D. 6 điểm.

Câu 43: Cho hàm số $y = \cot 2x$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

- A. $y' + 2y^2 + 2 = 0$. B. $y' - 2y^2 - 2 = 0$. C. $y' + 3y^2 + 5 = 0$. D. $y' + 3y^2 + 7 = 0$.

Câu 44: Tìm số nguyên dương n sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^n \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ có đạo hàm trên \mathbb{R} .

- A. $n = 1$. B. $n = 2$. C. $n \geq 2$. D. $n = 3$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x + \sin 2x$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của $f'(x)$ trên \mathbb{R} .

- A. $m = -\sqrt{2}$, $M = \sqrt{2}$. B. $m = -1$, $M = 1$. C. $m = -2$, $M = 2$. D. $m = -\sqrt{5}$, $M = \sqrt{5}$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x) = -\cos x + \sin x - \cos 2x$. Phương trình $f'(x) = 1$ tương đương với phương trình nào sau đây?

- A. $\sin x = 0$. B. $\sin x - 1 = 0$.
C. $(\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0$. D. $\cos x = 0$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x + 3 \cos^2 x$. Tập giá trị của hàm số $f'(x)$ trên \mathbb{R} là:

- A. $[-4; 4]$. B. $[-2; 2]$. C. $[-1; 1]$. D. $[-3; 3]$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x) = 2\frac{\cos^3 x}{3} + \sin^3 x - 2\cos x - 3\sin x$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x)$ trên đường tròn ta được mấy điểm phân biệt?

- A. 1 điểm. B. 2 điểm. C. 4 điểm. D. 6 điểm.

Câu 49: Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có đạo hàm là $\sin^2 x$?

- A. $y = \frac{\sin^3 x}{3}$. B. $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x$. C. $y = x - \frac{\sin^3 x}{3}$. D. $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$.

Câu 50: Hàm số nào sau đây có đạo hàm luôn bằng 0?

- A. $y = 1 - \sin^2 x$. B. $y = \sin^2 x - \cos^2 x$.
C. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$. D. $y = \cos 2x$.

Câu 51: Hàm số nào sau đây có đạo hàm $y' = x \cdot \sin x$?

- A. $y = x \cos x$. B. $y = x \cos x - \sin x$.
C. $y = \sin x - x \cos x$. D. $y = \frac{1}{2}x^2 \cdot \sin x$.

Câu 52: Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{\cos 2x}$. Chọn câu sai:

- A. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. B. $f'(x) = \frac{-2\sin 2x}{3\sqrt[3]{\cos^2 2x}}$.
C. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. D. $3y^2 \cdot y' + 2\sin 2x = 0$.

Câu 53: Cho hàm số $y = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x}}}$ với $x \in (0; \pi)$ có y' là biểu thức có dạng $a \cdot \sin \frac{x}{8}$. Khi đó a nhận giá trị nào sau đây:

- A. $\frac{1}{4}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $-\frac{1}{8}$.

Câu 54: Cho hàm số $f(x) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x$.

Hàm số có $f'(x)$ bằng:

- A. 6. B. $2\sin 2x$. C. 0. D. $2\cos 2x$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Dạng 1: Đạo hàm của hàm đa thức

Câu 1: Đáp án B.

$$y' = 6x^2 - 18x + 12$$

Câu 2: Đáp án D.

$$y' = -3x^2 + 6mx + 3(1 - m^2)$$

Câu 3: Đáp án A.

$$\begin{aligned}y' &= 2(x^2 + 1) + 2x \cdot (3 + 5x^2) + (x^2 + 1)^2 \cdot 10x \\&= (4x^3 + 4x)(3 + 5x^2) + 10x^5 + 20x^3 + 10x \\&= 30x^5 + 52x^3 + 22x \\&\Rightarrow a - b + c = 0.\end{aligned}$$

Câu 4: Đáp án C.

$$\begin{aligned}y' &= 2x(x^3 + 2)(x^4 + 3) + 3x^2(x^2 + 1)(x^4 + 3) + 4x^3(x^2 + 1)(x^3 + 2) \\&= 2x(x^7 + 2x^4 + 3x^3 + 6) + 3x^2(x^6 + x^4 + 3x^2 + 3) + 4x^3(x^5 + x^3 + 2x^2 + 2) \\&= 9x^8 + 7x^6 + 12x^5 + 15x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 12x \\&\Rightarrow a - b + c - d + e - g = 3.\end{aligned}$$

Câu 5: Đáp án C.

Câu 6: Đáp án A.

$$y' = \frac{(-2x + 3)(x - 1) - (-x^2 + 3x - 3)}{2(x - 1)^2} = \frac{-x^2 + 2x}{2(x - 1)^2}$$

Câu 7: Đáp án D.

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(6x^2 + 3)(x^2 - 5x + 2) - (2x^3 + 3x - 1)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 2)^2} = \frac{-13x^2 + 10x + 1}{(x^2 - 5x + 2)^2} \\&\Rightarrow a + b + c = -2.\end{aligned}$$

Câu 8: Đáp án A.

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(-2x + 2)(x^3 - 2) - 3x^2(-x^2 + 2x + 3)}{(x^3 - 2)^2} = \frac{x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 4x - 4}{(x^3 - 2)^2} \\&\Rightarrow a + b + c + d + e = -12\end{aligned}$$

Câu 9: Đáp án B.

$$y' = \sqrt{x^2 + 1} + (x - 2) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Câu 10: Đáp án D.

$$y' = 2(x^6 - 3x^4)(6x^5 - 12x^3) = 12x^{11} - 60x^9 + 72x^7$$

Câu 11: Đáp án A.

$$y' = \frac{10x-2}{2\sqrt{5x^2-2x+1}} = \frac{5x-1}{\sqrt{5x^2-2x+1}} \Rightarrow T = \frac{a}{b} = -5$$

Câu 12: Đáp án C.

Nhân liên hợp ta có: $y = \frac{1}{2}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \Rightarrow y' = \frac{1}{4\sqrt{x+1}} - \frac{1}{4\sqrt{x-1}}$.

Câu 13: Đáp án A.

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x-1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \frac{x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$$\Rightarrow P = a.b = 1$$

Câu 14: Đáp án A.

$$y' = \frac{\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)(x - \sqrt{x}) - \left(x + \sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x - \sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{2x\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x - \sqrt{x})^2} = \frac{4\sqrt{x} - 2x^2 - 3}{2x\sqrt{x}(x - \sqrt{x})^2}$$

Câu 15: Đáp án C.

Cách 1: Tính $f'(x) = \frac{9x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 8x + 4}{4(3x^3 + 2x^2 + 1)\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1}} \Rightarrow f'(0) = 1$.

Cách 2: Dùng MTCT ta được kết quả.

Câu 16: Đáp án D.

Câu 17: Đáp án C.

Ta có: $f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-2017) - x[(x-1)(x-2)\dots(x-2017)]'}{[(x-1)(x-2)\dots(x-2017)]^2}$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{(-1)(-2)\dots(-2017)}{[(-1)(-2)\dots(-2017)]^2} = -\frac{1}{2017!}$$

Câu 18: Đáp án A.

Ta có: $f(1) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x = 1$.

Khi $x > 1$: $f'(x) = 2x$.

$$x < 1: f'(x) = 2.$$

$$\text{Với } x = 1, \text{ ta xét: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2.$$

$$\text{Vậy } f'(1) = 2.$$

Câu 19: Đáp án B.

$$\text{Điều kiện: } x \in [-2; 2].$$

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}; \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} > x \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ 0 \leq x < \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x < \sqrt{2}.$$

Câu 20: Đáp án D.

$$f'(x) = \frac{-2x^3 + 1}{(x^3 + 1)^2} \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^3 + 1 \leq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Câu 21: Đáp án A.

$$\text{Ta có: } y = \sqrt{u} \text{ với } u = x + \sqrt{x + \sqrt{x}}.$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} (x + \sqrt{x})' \right] = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right].$$

Câu 22: Đáp án A.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 5x^4 + 3x^2 - 2 \Rightarrow f'(1) + f'(-1) + 4f'(0) = 4.$$

Câu 23: Đáp án A.

$$\text{Ta có: } f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + 2x \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}.$$

Câu 24: Đáp án D.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 3 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \right) = \frac{3}{2} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2\sqrt{x}} \right).$$

Câu 25: Đáp án B.

$$\text{Ta có: } y = u^2 \text{ với } u = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}.$$

$$y' = 2 \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right)' = 2 \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 - \sqrt{x})}{(1 + \sqrt{x})^2} = 2 \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right) \cdot \frac{-1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}$$

Câu 26: Đáp án D.

Ta có: $y = u^3$, $u = \frac{2x+1}{x-1}$, $u' = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow y' = \frac{-9(2x+1)^2}{(x-1)^4}$.

Câu 27: Đáp án C.

$$y' = 3[(m-1)x^2 - 2(m+2)x - 2(m+2)].$$

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)x^2 - 2(m+2)x - 2(m+2) \geq 0 \quad (1)$$

Với $m = 1$ thì (1) $\Leftrightarrow -6x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \Rightarrow m = 1$ (loại).

Với $m \neq 1 \Rightarrow$ (1) đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m+2)3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m$ vô nghiệm.

Câu 28: Đáp án D.

Với $x \neq 0$ hàm số luôn có đạo hàm.

Để hàm số có đạo hàm trên \mathbb{R} thì hàm số phải có đạo hàm tại $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b \Rightarrow b = 1.$$

Để hàm số liên tục tại $x = 0 \Rightarrow b = 1$.

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^2 + x + 1}{x+1} - 1}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + ax + b - 1}{x} = a.$$

$\Rightarrow a = 0$. Vậy $a = 0$, $b = 1$.

Câu 29: Đáp án C.

$$f'(x) = -mx^2 + mx - (3-m); \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow -mx^2 + mx - (3-m) = 0 \quad (1).$$

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 5m^2 - 12m > 0 \\ \frac{3-m}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{12}{5} < m < 3.$

Câu 30: Đáp án A.

Lập bảng dấu ta được: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{khi } x < -1, x > 1 \\ x & \text{khi } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$.

- Với $x < -1$ hoặc $x > 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

- Với $-1 < x < 1 \Rightarrow f'(x) = 1$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$ nên hàm số liên tục tại $x = -1$.

Xét $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = -1$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = 1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x = -1$.

Bằng cách tương tự ta cũng chỉ ra được hàm số không có đạo hàm tại $x = 1$.

$$\text{Vậy } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{khi } x < -1, x > 1 \\ x & \text{khi } -1 < x < 1 \end{cases}.$$

Dạng 2: Đạo hàm các hàm số lượng giác

Câu 31: Đáp án B.

$$y' = 2 \sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x = \sin x (3 \cos^2 x - 1).$$

Câu 32: Đáp án C.

$$y' = (1 + \tan x)(1 + \tan x)' = (1 + \tan x)(1 + \tan^2 x).$$

Câu 33: Đáp án B.

$$y' = \frac{-\sin^3 x - 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos x}{2 \sin^4 x} = -\frac{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}{2 \sin^3 x} = -\frac{1 + \cos^2 x}{2 \sin^3 x}.$$

Câu 34: Đáp án A.

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1}{1 - \sin x} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) - f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{3}.$$

Câu 35: Đáp án A.

$$y' = \frac{x \sin x (\cos x + x \sin x) - x \cos x (\sin x - x \cos x)}{(\cos x + x \sin x)^2} = \frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2} \Rightarrow a = 1, b = 0, c = 0.$$

Vậy $T = a + b + c = 1$.

Câu 36: Đáp án D.

$$y' = -2 \sin 2x \cdot \sin^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cdot \cos 2x.$$

Câu 37: Đáp án B.

$$y' = 2 \cot(\cos x) [\cot(\cos x)]' + \frac{\left(\sin x - \frac{\pi}{2}\right)'}{2\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}} = 2 \cot(\cos x) \frac{1}{\sin^2(\cos x)} + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \frac{\pi}{2}}}.$$

Câu 38: Đáp án A.

$$y' = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} + \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} = (x \cdot \cos x - \sin x) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right).$$

Câu 39: Đáp án A.

Ta có: $y = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x}}$ nên $y' = \frac{-2 \sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x \cdot \sqrt{\sin^2 x}} = -\frac{\cot x}{|\sin x|}$.

Câu 40: Đáp án C

$$\begin{aligned} y' &= -2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x) - 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \sin(\cos^2 x) \cdot \sin(\sin^2 x) \\ &= -\sin(2x) \cdot \cos(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\sin(2x) \cdot \cos(\cos 2x) \\ &\Rightarrow a = -1. \end{aligned}$$

Câu 41: Đáp án B.

Lấy đạo hàm 2 vế ta có: $2f'(2x) - 4 \sin x \cdot f(x) + 4 \cos x \cdot f'(x) - 2$

Thay $x = 0 \Rightarrow 2 \cdot f'(0) = 4 \cdot f'(0) - 2 \Leftrightarrow f'(0) = 1$.

Câu 42: Đáp án B.

$$f'(x) = \frac{-\sin x \cdot \sqrt{\cos 2x} - \cos x \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}} \cdot (-\sin 2x)}{\cos 2x} = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos 2x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ta biểu diễn được 2 điểm phân biệt trên đường tròn lượng giác.

Câu 43: Đáp án A.

$y' = -2(1 + \cot^2 2x)$. Do đó: $y' + 2y^2 + 2 = -2(1 + \cot^2 2x) + 2 \cot^2 2x + 2 = 0$

Câu 44: Đáp án C.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^n \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^{n-1} \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = f'(0) = 0 \quad (1)$$

Với $n = 1$ thì giới hạn (1) không tồn tại và $n \geq 2$ thì: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^{n-1} \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = 0$.

Vậy hàm số có đạo hàm trên \mathbb{R} khi $n \geq 2$.

Câu 45: Đáp án D.

$$f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x + 2 \cos 2x = \sin 2x + 2 \cos 2x$$

Đặt $t = \sin 2x + 2 \cos x$.

Điều kiện phương trình có nghiệm là: $1^2 + 2^2 \geq t^2 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq t \leq \sqrt{5}$.

Vậy $M = \sqrt{5}, m = -\sqrt{5}$.

Câu 46. Đáp án C.

$$f'(x) = \sin x + \cos x + 2\sin 2x$$

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sin 2x = 1$$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x \quad (|t| \leq \sqrt{2}) \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$$

$$\text{Khi đó phương trình } \Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad (l)$$

$$\text{Với } t = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) .$$

Nghiệm trên cũng là nghiệm của phương trình $(\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0$.

Câu 47. Đáp án B.

$$f'(x) = -2\sin 2x \Rightarrow -2 \leq f'(x) \leq 2$$

Vậy tập giá trị của hàm số $f'(x)$ là $[-2; 2]$.

Câu 48. Đáp án B.

$$f'(x) = 2\sin^3 x - 3\cos^3 x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan^3 x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \tan x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

Vậy có hai điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 49. Đáp án D.

$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x \Rightarrow y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \sin^2 x$$

Câu 50. Đáp án C.

$$y = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow y' = 0 \quad \forall x .$$

Câu 51. Đáp án C.

$$y = \sin x - \cos x \Rightarrow y' = \cos x - (-\sin x) = \sin x + \cos x$$

Câu 52. Đáp án C.

$$f(x) = \sqrt[3]{\cos 2x} \Rightarrow f^3(x) = \cos 2x \Rightarrow 3.f^2(x).f'(x) = (\cos 2x)' \Rightarrow f'(x) = \frac{-2\sin 2x}{3\sqrt[3]{\cos^2 2x}}$$

Nên **B** đúng. Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{\cos \pi} = -1$ nên **C** sai.

Câu 53. Đáp án D.

$$\text{Ta có: } \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x} = \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2}} = \cos \frac{x}{2}$$