= $(1+x)^2+(1+y)^2+(1-x-y)^2+(1+x)(1+y)+(1+y)(1-x-y)+(1-x-y)(1+x)$

= x^2+xy+y^2+6 = $\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2+6\ge 6$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ y = 0 và $x+\frac{1}{2}y=0 \Leftrightarrow$ x = y = 0 hay a = b = c =1. Vậy A $\ge$ 6.

Ví dụ 4: Cho $a+b=c+d$. Chứng minh rằng: D = $a^2+b^2+ab\ge 3cd$.

Nhận xét: Dự đoán dấu "=" xảy ra khi a = b = c = d.

Giải:

Đặt: $a=c+x$, với x $\in$ R. Từ giả thiết suy ra $b=d-x$.

Ta có: D = $(c+x)^2+(d-x)^2+(c+x)(d-x)$ = $c^2+d^2+x^2+cd+cx-dx$

= $\left(c^2+d^2+\frac{1}{4}x^2-2cd+cx-dx\right)+3cd+\frac{3}{4}x^2$ = $\left(c-d+\frac{1}{2}x\right)^2+\frac{3}{4}x^2+3cd\ge 3cd$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 0 và $c-d+\frac{1}{2}x=0$ $\Leftrightarrow$ x = 0 và c = d hay a = b = c = d.

Vậy D $\ge$ 3cd.

Ví dụ 5: Cho ab $\ge$ 1. Chứng minh rằng: $a^2+b^2\ge a+b$.

Nhận xét: Dự đoán dấu "=" xảy ra khi a = b = 1.

Giải:

Đặt $a=1+x;\ b=1+y$.

Ta có: ab $\ge$ 1 $\Leftrightarrow$ $(1+x)(1+y)\ge 1 \Leftrightarrow x+y+xy\ge 0$ và $x^2+y^2\ge 2xy,\ \forall x,y\in R$

Do đó $a^2+b^2-(a+b)=(1+x)^2+(1+y)^2-(1+x)-(1+y)=x^2+y^2+x+y$

$=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+xy+x+y\ge 0$ (Đúng vì xy + x + y $\ge$ 0)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x = y = 0 hay a = b = 1. Vậy BĐT được chứng minh.

Ví dụ 6: Cho a $\le$ 1; a + b $\ge$ 3. Chứng minh rằng: F = $3a^2+b^2+3ab-\frac{27}{4}\ge 0$

Nhận xét: Dự đoán dấu "=" xảy ra khi $a=-\frac{3}{2}, b=\frac{9}{2}$.

Giải:

Đặt a = 1– *x* và a + b = 3 + *y*. Từ giả thiết suy ra *x*, *y* $\ge$ 0 nên ta có: b = 2 + *x* + *y*.

Từ đó : F = $3(1-x)^2+(2+x+y)^2+3(1-x)(2+x+y)-\frac{27}{4}$ = $x^2+y^2-5x+7y-xy+\frac{25}{4}$

$$= \left(x-\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2+\frac{9}{2}y\ge 0$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$ và y = 0 hay a = $-\frac{3}{2}$ và b = $\frac{9}{2}$.

Vậy bất đẳng thức F $\ge$ 0 được chứng minh.

Bài tập tương tự

1) Cho a, b > 0 thoả mãn a + b = 1. Chứng minh: $\frac{2}{ab}+\frac{3}{a^2+b^2}\ge 14$.

2) Cho a + b + c + d = 1. Chứng minh: $(a+c)(b+d)+2(ac+bd)\le\frac{1}{2}$.

3) Cho a + b + c $\ge$ 3. Chứng minh: $a^4+b^4+c^4\ge a^3+b^3+c^3$.

4) Cho a + b > 8 và b $\ge$ 3. Chứng minh: $27a^2+10b^3>945$.

5) Cho $a+b\ge 2$. Chứng minh rằng: $a^3+b^3\le a^4+b^4$.

6) Cho a $\le$ 4. Chứng minh rằng: $a^2(2-a)+32\ge 0$.

Vai trò như nhau giữa các biến

Ý tưởng chính của kỹ thuật này là dựa vào các mối liên hệ giữa các biến trong bài toán để có thể thêm biến phụ. Lưu ý ta có tính chất: " ***với mọi số thực a,b thì luôn tồn tại số thực k sao cho*** $a=b+k$ ***".***

Kỹ thuật này thường áp dụng cho những bất đẳng thức đồng bậc, đối xứng, hoán vị, có chứa trị tuyệt đối...

Ví dụ 7: Chứng ming rằng với mọi $a,b,c\geq 0$, ta có bất đẳng thức $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$.

Giải

Do vai trò của a, b, c là như nhau, nên giả sử $a=\min\{a,b,c\}$.

Đặt $b=a+x,\quad c=a+y\ \Rightarrow x,y\geq 0.$ Thay vào bất đẳng thức cần chứng minh, ta có

$$a^3+(a+x)^3+(a+y)^3\geq 3a(a+x)(a+y)$$

$\Leftrightarrow 3ax^2+3ay^2+x^3+y^3-3axy\geq 0 \Leftrightarrow 3a(x-y)^2+3axy+x^3+y^3\geq 0$ (luôn đúng)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=0\Rightarrow a=b=c$

Ví dụ 8: Cho các số thực không âm a, b, c. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3\geq 3abc+\frac{9}{4}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|$$

Giải:

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\leq b\leq c$. Khi đó tồn tại $x,y\geq 0$ sao cho

$$b=a+x,\ c=a+y,\ y\geq x$$

Thay vào bất đẳng thức cần chứng minh, ta được

$$a^3+(a+x)^3+(a+y)^3-3a(a+x)(a+y)-\frac{9}{4}xy(y-x)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3ay^2-3axy\right)+3ax^2+x^3+y^3-\frac{9}{4}xy^2+\frac{9}{4}x^2y\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3ay(y-x)+3ax^2+(y-x)^3+\frac{3}{4}xy(y-x)+2x^3\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $x,y\geq 0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=0\Rightarrow a=b=c$.

Ví dụ 9: Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh $(a-b)(b-c)(c-a)\le\frac{\sqrt{3}}{8}$

Nhận xét: Hai ví dụ 1 và ví dụ 2 là bất đẳng thức đối xứng, nhưng ví dụ này thì không đối xứng. Tuy nhiên lưu ý rằng $A\le|A|,\forall A\in R$, ta có thể chuyển VT thành dạng đối xứng.

Giải:

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn $|(a-b)(b-c)(c-a)|\le\frac{\sqrt{3}}{8}$

Vì đây là bất đẳng thức đối xứng, nên ta có thể giả sử $a\le b\le c$.

Khi đó tồn tại $x,y\ge 0$ sao cho $b=a+x,\ c=a+y,\ y\ge x$

Thay vào bất đẳng thức cần chứng minh, ta được : $xy(y-x)\le\frac{\sqrt{3}}{8}\ (1)$

Do $a+b+c=1$ nên $3a+x+y=1\Rightarrow x+y\le 1$. Mà $x,y\ge 0\Rightarrow 0\le x\le\frac{1}{2},\ x\le y\le 1-x$

Suy ra $VT(1)=xy(y-x)\le x(1-x)(1-2x)=2x^3-3x^2+x\qquad(2)$

Xét hàm số $f(x)=2x^3-3x^2+x,\quad x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Ta có $f'(x)=6x^2-6x+1$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-6x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{3}}{6}\qquad do\ x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$$

Suy ra $f(x)\le\max\left\{f(0),f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right),f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}=f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{18}\qquad(3)$

Kết hợp $(1),(2),(3)$ ta suy ra điều cần chứng minh.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{3}}{6},\ y=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$, tức là $a=0,\ b=\frac{3-\sqrt{3}}{6},\ c=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ (vì $a\le b\le c$).

Vậy $(a-b)(b-c)(c-a)\le|(a-b)(b-c)(c-a)|\le\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=0,\ b=\frac{3-\sqrt{3}}{6},\ c=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ và các hoán vị của nó.

Ví dụ 10: Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)\min\{a,b,c\} \le 2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2$$

Giải:

Do tính đối xứng nên ta có thể giả sử $a=\min\{a,b,c\}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(a+b+c)a \le 2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2 \Leftrightarrow 2a^2+b^2+c^2 \le ab+ac+2bc$$

Đặt $b=a+x,\ c=a+y$ với $x,y\ge 0$. Thay vào trên, ta được

$$\begin{aligned}&2a^2+(a+x)^2+(a+y)^2 \le a(a+x)+a(a+y)+2(a+x)(a+y)\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2 \le x(a+y)+y(a+x) \qquad (1)\end{aligned}$$

Vì $a+b>c \Rightarrow a+x>y, \quad a+c>b \Rightarrow a+y>x$

Do đó (1) luôn đúng. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=0 \Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 11: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\max\{a,b,c\}-\min\{a,b,c\}\le 1$. Chứng minh

$$1+a^3+b^3+c^3+6abc \ge 3a^2b+3b^2c+3c^2a. \qquad (1)$$

Giải:

Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\{a,b,c\}$. Đặt $b=a+x,\ c=a+y$ với $x,y\ge 0$. Ta có:

$$1+a^3+b^3+c^3+6abc \ge 3a^2b+3b^2c+3c^2a \Leftrightarrow 1+a^3+b^3+c^3-3abc \ge 3\left(a^2b+b^2c+c^2a-3abc\right)$$

Và $\begin{cases} a^3+b^3+c^3-3abc=3a\left(x^2-xy+y^2\right)+x^3+y^3 \\ a^2b+b^2c+c^2a-3abc=a\left(x^2-xy+y^2\right)+x^2y \end{cases}$

Do đó $(1) \Leftrightarrow 1+x^3+y^3 \ge 3x^2y$

Mặt khác từ giả thiết, ta có $0\le x,y\le 1 \Rightarrow 1+x^3+y^3 \ge 3\sqrt[3]{1.x^3.y^3}=3xy\ge 3x^2y$.

Vậy bài toán được chứng minh xong và dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1 \Leftrightarrow b=c=a+1$.

Ví dụ 12: Cho các số thực a, b với a + b $\neq$ 0. Chứng minh: $a^2+b^2+\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2 \geq 2$.

Giải:

Đặt $c=-\frac{1+ab}{a+b}$. Ta có: *ab + bc + ca* = –1 và lúc này BĐT cần chứng minh trở thành:

$a^2+b^2+c^2 \geq 2 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq -2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 13: Cho a, b, c $\in$ [1; 3] và a + b + c = 6. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2 \leq 14$

Giải:

Đặt a = *x* + 1; b = *y* + 1; c = *z* + 1. Khi đó *x, y, z* $\in$ [0; 2] và *x* + *y* + *z* = 3

Giả sử *x* = max{*x*; y; z}, suy ra: *x* + *y*+ *z* = 3 $\leq$ 3*x*$\Rightarrow$1$\leq$ *x* $\leq$ 2 $\Rightarrow$ (*x* –1)(*x* –2) $\leq$ 0

Nên: $x^2+y^2+z^2 \leq x^2+(y+z)^2 = x^2+(3-x)^2 = 5+2(x-1)(x-2) \leq 5$

Suy ra $x^2+y^2+z^2 \leq 5$

Ta có: $a^2+b^2+c^2 = (x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2 = x^2+y^2+z^2+2(x+y+z)+3 \leq 14$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=z \\ x+y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1 \Rightarrow a=b=c=2$

hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=z \\ x+y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=z=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=c=\frac{3}{2} \end{cases}$

Bài tập tương tự

1. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng
   $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \geq 0$
2. Cho a, b, c, r là các số thực không âm. Chứng minh rằng
   $a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b) \geq 0$
3. Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $(a-b)(b-c)(c-a) \geq -\frac{\sqrt{3}}{8}$

4. Cho các số thực phân biệt a, b, c. Chứng minh $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right]\geq\frac{9}{2}$
5. Chứng minh rằng với mọi $a,b,c>0$, ta đều có $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\geq 3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)$.
6. Cho a, b, c $\in$ [1; 3] và a + b + c = 6. Chứng minh rằng: $a^3+b^3+c^3\leq 36$.

III-PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN ĐẠI SỐ

Ý tưởng chính của phương pháp là làm cho bài toán trở nên đơn giản hơn, hạ bậc, mất căn thức hoặc triệt tiêu mẫu.

Sau đây là một số tính chất (dấu hiệu nhận biết) cần biết khi sử dụng phương pháp này. Bạn đọc quan tâm có thể chứng minh dễ dàng. Những tính chất này áp dụng cho trường hợp ba biến và có thể áp dụng tương tự cho n biến.

Tính chất 1: Nếu ba số dương a, b, c thỏa $abc = 1$, thì

i) Tồn tại các số dương x, y, z sao cho $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ hoặc $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}, c = \frac{x}{z}$.

ii) Tồn tại các số dương m, n, p sao cho $a = \frac{m^2}{np}, b = \frac{n^2}{mp}, c = \frac{p^2}{mn}$ hoặc $a = \frac{np}{m^2}, b = \frac{mp}{n^2}, c = \frac{mn}{p^2}$.

Tính chất 2: Nếu ba số dương a, b, c thỏa $a + b + c = k$ thì tồn tại các số dương x, y, z sao cho

$$a = \frac{kx}{x+y+z}, \quad b = \frac{ky}{x+y+z}, \quad c = \frac{kz}{x+y+z}$$

Tính chất 3: Nếu $x, y, z > 0$ thỏa điều kiện $xyz = x + y + z + 2$ thì tồn tại $a, b, c > 0$ sao cho

$$x = \frac{b+c}{a}, \quad y = \frac{c+a}{b}, \quad z = \frac{a+b}{c}$$

Tính chất 4: Nếu $x, y, z > 0$ thỏa điều kiện $xy + yz + zx + 2xyz = 1$ thì tồn tại $a, b, c > 0$ sao cho

$$x = \frac{a}{b+c}, \quad y = \frac{b}{c+a}, \quad \frac{c}{a+b}$$

Tính chất 5: (Phép thế Ravi) Các số thực a, b, c là ba cạnh của một tam giác khi và chỉ khi tồn tại các số dương x, y, z sao cho $a = y + z, b = z + x, c = x + y$.

Nhận xét : *Phép thế Ravi giúp ta chuyển một bài toán BĐT với ba số dương về một BĐT trong tam giác và ngược lại.*

Ví dụ 1: Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn *abc* = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\ge\frac{3}{2}$$

<u>*Giải:*</u>

Đặt $a=\frac{x}{y};\ b=\frac{y}{z};\ c=\frac{z}{x}$, với *x, y, z* là các số thực dương.

Ta có: $\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\ge\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\frac{x}{y}\left(\frac{y}{z}+1\right)}+\frac{1}{\frac{y}{z}\left(\frac{z}{x}+1\right)}+\frac{1}{\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}+1\right)}\ge\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{yz}{xy+zx}+\frac{zx}{yz+xy}+\frac{xy}{zx+yz}\ge\frac{3}{2}\qquad(*)$$

Tới đây ta chứng minh $(*)$ dễ dàng (xem như bài tập)

Ví dụ 2: (Ôlimpic quốc tế 2000) Cho *a, b, c* là các số thực dương thoả mãn *abc* = 1. Chứng minh rằng: $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1$.

<u>*Giải:*</u>

Đặt $a=\frac{x}{y};\ b=\frac{y}{z};\ c=\frac{z}{x}$, với *x, y, z* là các số thực dương.

Ta có: $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1\Leftrightarrow\frac{(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)}{xyz}\le 1$

$$\Leftrightarrow(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)\le xyz\qquad(*)$$

Do vai trò *x, y, z* có vai trò như nhau, không mất tính tổng quát nên giả sử : *x* ≥ y ≥ z > 0. Như vậy *x – y +z* > 0 và y – z + *x* > 0.

+ Nếu z – *x* + y ≤ 0 thì $(*)$ hiển nhiên đúng.

+ Nếu z – *x* + y > 0, áp dụng BĐT Cô–si cho hai số dương ta có:

$\sqrt{(x-y+z)(y-z+x)} \le x$; $\sqrt{(y-z+x)(z-x+y)} \le y$; $\sqrt{(z-x+y)(x-y+z)} \le z$

Nhân vế theo vế các bất đẳng thức trên, suy ra (*).

Vậy $(*)$ đúng cho mọi *x, y, z* là các số thực dương, suy ra bài toán được chứng minh.

Ví dụ 3: Cho $x, y, z > 0 : xyz = 1$.

Tìm GTLN của biểu thức: $P = \dfrac{1}{x^2+2y^2+3} + \dfrac{1}{y^2+2z^2+3} + \dfrac{1}{z^2+2x^2+3}$

Nhận xét: *Vì P là biểu thức đối xứng với x, y, z nên maxP tại x=y=z= 1.*

Giải:

Áp dụng BĐT Cô-si, ta có:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2 \ge 2xy \\ y^2+1 \ge 2y \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+2y^2+3 \ge 2xy+2y+2 \Rightarrow \frac{1}{x^2+2y^2+3} \le \frac{1}{2xy+2y+2}.$$

Tương tự: $\dfrac{1}{y^2+2z^2+3} \le \dfrac{1}{2yz+2z+2}$, $\dfrac{1}{z^2+2x^2+3} \le \dfrac{1}{2zx+2x+2}$.

Do đó: $P \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{xy+y+1} + \dfrac{1}{yz+z+1} + \dfrac{1}{zx+x+1}\right)$.

Vì $x, y, z > 0 : xyz = 1$ nên tồn tại các số dương a, b, c sao cho: $x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{b}{c}, z = \dfrac{c}{a}$.

Suy ra: $P \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{xy+y+1} + \dfrac{1}{yz+z+1} + \dfrac{1}{zx+x+1}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1} + \dfrac{1}{\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+1} + \dfrac{1}{\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+1}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Vậy: $MaxP = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Lưu ý:

Ngược lại, đối với một số bài toán chứng minh bất đẳng thức mà các biểu thức (hoặc biến đổi của nó) có chứa các biểu thức có dạng: $\frac{a}{b};\frac{b}{c};\frac{c}{a}$, với $a,b,c\neq 0$. Lúc này việc đặt $x=\frac{a}{b};\ y=\frac{b}{c};z=\frac{c}{a}$, với *xyz* = 1 là một phương pháp hữu hiệu.

Ví dụ 4: Cho các số thực dương *a, b, c*. Chứng minh rằng: $\frac{b}{a+2b}+\frac{c}{b+2c}+\frac{a}{c+2a}\leq 1$

__Giải:__

BĐT $\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{a}{b}+2}+\frac{1}{\frac{b}{c}+2}+\frac{1}{\frac{c}{a}+2}\leq 1$.

Đặt $x=\frac{a}{b};\ y=\frac{b}{c};\ z=\frac{c}{a}$. Ta có *x*, y, z là các số thực dương có tích *xyz* = 1.

Suy ra: $\frac{1}{\frac{a}{b}+2}+\frac{1}{\frac{b}{c}+2}+\frac{1}{\frac{c}{a}+2}\leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}\leq 1$

$\Leftrightarrow$ (*x* + 2)(y + 2) + (y + 2)(z + 2) + (z + 2)(*x* + 2) $\leq$ (*x* + 2)(y + 2)(z + 2)

$\Leftrightarrow$ (*xy* + *yz* + *zx*) + 4(*x* + *y* + *z*) + 12 $\leq$ *xyz* + 2(*xy* + *yz* + *zx*) + 4(*x* + *y* + *z*) + 8

$\Leftrightarrow$ 4 $\leq$ *xyz* + *xy* + *yz* + *zx* $\Leftrightarrow$ 3 $\leq$ *xy* + *yz* + *zx*.

Đây là bất đẳng thức đúng vì áp dụng bất đẳng thức Cô–si cho ba số dương ta có:

$xy+yz+zx\geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}=3$. Suy ra điều phải chứng minh.

***Bài tập tương tự:* Cho các số thực dương *a, b, c*. Chứng minh $\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}\geq 1$.**

Ví dụ 5: Cho các số dương a, b, c thỏa $abc\leq 1$. Chứng minh $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq a+b+c$.

__Giải:__

Đặt $abc=1-k$ với $0\leq k<1$. Khi đó $\frac{a}{\sqrt[3]{1-k}}.\frac{b}{\sqrt[3]{1-k}}.\frac{c}{\sqrt[3]{1-k}}=1$. Do vậy tồn tại $x,y,z>0$ sao cho $a=\sqrt[3]{1-k}.\frac{x}{y}$, $b=\sqrt[3]{1-k}.\frac{y}{z}$, $c=\sqrt[3]{1-k}.\frac{z}{x}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành: $\frac{xz}{y^2}+\frac{yx}{z^2}+\frac{zy}{x^2}\ge\sqrt[3]{1-k}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)$ (1)

Do $\sqrt[3]{1-k}\le 1$, nên $(1)\Leftrightarrow\frac{xz}{y^2}+\frac{yx}{z^2}+\frac{zy}{x^2}\ge\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)$

$$\Leftrightarrow x^3z^3+y^3x^3+z^3y^3\ge xyz\left(x^2z+y^2x+z^2y\right) \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, Ta có

$$x^3z^3+x^3z^3+y^3x^3\ge 3x^3yz^2,\quad y^3x^3+y^3x^3+z^3y^3\ge 3x^2y^3z,\quad z^3y^3+z^3y^3+x^3z^3\ge 3xy^2z^3$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo từng vế, ta được (2).

Ví dụ 6: Cho $x,y,z>1$ thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\le\sqrt{x+y+z} \quad (1)$$

Giải:

Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2\Leftrightarrow-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+3=-2+3\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{x}\right)+\left(1-\frac{1}{y}\right)+\left(1-\frac{1}{z}\right)=1$

Đặt: $1-\frac{1}{x}=\frac{a}{a+b+c}\Rightarrow x=\frac{a+b+c}{b+c}$, $1-\frac{1}{y}=\frac{b}{a+b+c}\Rightarrow y=\frac{a+b+c}{c+a}$, $1-\frac{1}{z}=\frac{c}{a+b+c}\Rightarrow z=\frac{a+b+c}{a+b}$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\le\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)}$

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}=\sqrt{a}.\sqrt{\frac{1}{b+c}}+\sqrt{b}.\sqrt{\frac{1}{c+a}}+\sqrt{c}.\sqrt{\frac{1}{a+b}}\le\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)}$$

Ví dụ 7: Cho $a,b,c>0$ thỏa điều kiện $\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1$.

Chứng minh rằng $abcd\ge 3$.

<u>*Giải:*</u>

Đặt $\frac{1}{1+a^4}=\frac{x}{x+y+z+t}$, $\frac{1}{1+b^4}=\frac{y}{x+y+z+t}$, $\frac{1}{1+c^4}=\frac{z}{x+y+z+t}$, $\frac{1}{1+d^4}=\frac{t}{x+y+z+t}$

Suy ra $a=\sqrt[4]{\frac{y+z+t}{x}}$, $b=\sqrt[4]{\frac{z+t+x}{y}}$, $c=\sqrt[4]{\frac{t+x+y}{z}}$, $d=\sqrt[4]{\frac{x+y+z}{t}}$

Bất đẳng thức trở thành $\sqrt[4]{\frac{y+z+t}{x}}.\sqrt[4]{\frac{z+t+x}{y}}.\sqrt[4]{\frac{t+x+y}{z}}.\sqrt[4]{\frac{x+y+z}{t}}\geq 3$

$$\Leftrightarrow (y+z+t)(z+t+x)(t+x+y)(x+y+z)\geq 81xyzt$$

Bất đẳng thức này chứng minh dễ dàng !

Ví dụ 8: Cho $a,b,c>0$ thỏa $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq 3$.

<u>*Giải:*</u>

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq 3abc \qquad (1)$

Đặt $a^2=\frac{3x}{x+y+z}$, $b^2=\frac{3y}{x+y+z}$, $c^2=\frac{3z}{x+y+z}$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow \frac{9xy}{(x+y+z)^2}+\frac{9yz}{(x+y+z)^2}+\frac{9zx}{(x+y+z)^2}\geq 3\sqrt{\frac{27xyz}{(x+y+z)^2}}$

$$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)^2\geq 3xyz(x+y+z)$$

Chứng minh BĐT này dành cho bạn đọc.

Ví dụ 9: Cho $x,y,z>0$ thỏa $xy+yz+zx+2xyz=1$. Chứng minh $\sqrt[2]{yz}+\sqrt[3]{2}\leq\sqrt[3]{3(y+1)(z+1)}$.

<u>*Giải:*</u>

Đặt $x=\frac{a}{b+c}$, $y=\frac{b}{c+a}$, $z=\frac{c}{a+b}$ với $a,b,c>0$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\sqrt[3]{\frac{b}{c+a}.\frac{c}{a+b}}+\sqrt[3]{2}\leq\sqrt[3]{3.\frac{(a+b+c)^2}{(c+a)(a+b)}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{b}{a+b+c}.\frac{c}{a+b+c}}+\sqrt[3]{2.\frac{a+b}{a+b+c}.\frac{a+c}{a+b+c}}\le \sqrt[3]{3}$$

Áp dụng BĐT Côsi cho ba số, ta có:

$$\sqrt[3]{\frac{b}{a+b+c}.\frac{c}{a+b+c}.\frac{1}{3}}\le \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}+\frac{1}{3}\right)$$
$$\sqrt[3]{\frac{a+b}{a+b+c}.\frac{a+c}{a+b+c}.\frac{2}{3}}\le \frac{1}{3}\left(\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{2}{3}\right)$$

Suy ra $\sqrt[3]{\frac{b}{a+b+c}.\frac{c}{a+b+c}.\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{\frac{a+b}{a+b+c}.\frac{a+c}{a+b+c}.\frac{2}{3}}\le 1$ (Chứng minh xong)

Ví dụ 10: Cho $x,y,z>0$ thỏa $xyz=x+y+z+2$. Chứng minh rằng $2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)\le x+y+z+6$

Giải:

Ta có $2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2-\left(x+y+z\right)$.

Do đó BĐT cần chứng minh trở thành : $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le \sqrt{2\left(x+y+z+3\right)}$

Từ giả thiết, đặt $x=\frac{b+c}{a}$, $y=\frac{c+a}{b}$, $z=\frac{a+b}{c}$

Như vậy ta phải chứng minh

`
$$\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}\le \sqrt{2\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có điều phải chứng minh

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}=\sqrt{\frac{1}{a}}.\sqrt{b+c}+\sqrt{\frac{1}{b}}.\sqrt{c+a}+\sqrt{\frac{1}{c}}.\sqrt{a+b}\le \sqrt{2\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}.$$

Ví dụ 11: Chứng minh rằng a, b, c là độ dài của một tam giác thì $a\left(b+c-a\right)<2bc$.

Giải:

Theo tính chất 5, đặt $a=y+z,\ \ b=z+x,\ \ c=x+y$ với $x,y,z>0$.

BĐT trở thành $x\left(y+z\right)<\left(x+y\right)\left(z+x\right)$

Áp dụng bất đẳng thức BCS, ta có

$$(x+y)(z+x)\geq\left(\sqrt{xz}+\sqrt{yx}\right)^2=xy+xz+2x\sqrt{yz}>xy+xz=x(y+z)$$

Ví dụ 12: Cho $x,y,z>0$ thỏa điều kiện $xyz(x+y+z)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(x+y)(x+z)$$

Giải:

Đặt $a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y$, khi đó a, b, c là ba cạnh của một tam giác ABC nào đó. Và ta có

$$x=\frac{b+c-a}{2}=p-a,\quad y=\frac{c+a-b}{2}=p-b,\quad z=\frac{a+b-c}{2}=p-c$$ với $p=\frac{a+b+c}{2}$

Điều kiện bài toán trở thành $(p-a)(p-b)(p-c)p=1=S^2_{\Delta ABC}=S^2\Rightarrow S=1$

Do đó ta có $P=bc\geq bcSinA=2S=2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}SinA=1\\bc=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2+c^2=a^2\\bc=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(y+z)=yz\\(x+y)(x+z)=2\end{cases}$

Vậy $\min P=2$.

Ví dụ 13: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có diện tích S. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

Giải:

Đặt $a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y$ với $x,y,z>0$. Khi đó ta có

$$p=x+y+z,\quad x=p-a,\quad y=p-b,\quad z=p-c,\quad S=\sqrt{xyz(x+y+z)}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2\geq 4\sqrt{3xyz(x+y+z)}+(y-x)^2+(z-y)^2+(x-z)^2$$

$$\Leftrightarrow xy + yz + zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)}$$
$$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)^2 \geq 3(xy.yz + yz.zx + zx.xy)$$
$$\Leftrightarrow (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 \geq xy.yz + yz.zx + zx.xy$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một kết quả quen thuộc.

Ví dụ 14: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

Giải:

Đặt $a = y+z,\ b = z+x,\ c = x+y$ với $x,y,z > 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^3z + y^3x + z^3y \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\frac{x^2}{y} + y \geq 2x, \quad \frac{y^2}{z} + z \geq 2y, \quad \frac{z^2}{x} + x \geq 2z$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 15: Cho $a,b,c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{5c}{a+b}$.

Giải:

Đặt $x = b+c,\ \ y = c+a,\ z = a+b$, khi đó x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác và

$$a = \frac{y+z-x}{2}, \quad b = \frac{z+x-y}{2}, \quad c = \frac{x+y-z}{2}$$

Khi đó

$$P = \frac{3(y+z-x)}{2x} + \frac{2(z+x-y)}{y} + \frac{5(x+y-z)}{2z}$$

$$= \left(\frac{2x}{y} + \frac{3y}{2x}\right) + \left(\frac{5y}{2z} + \frac{2z}{y}\right) + \left(\frac{3z}{2x} + \frac{5x}{2z}\right) - 6 \geq 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{15} - 6$$