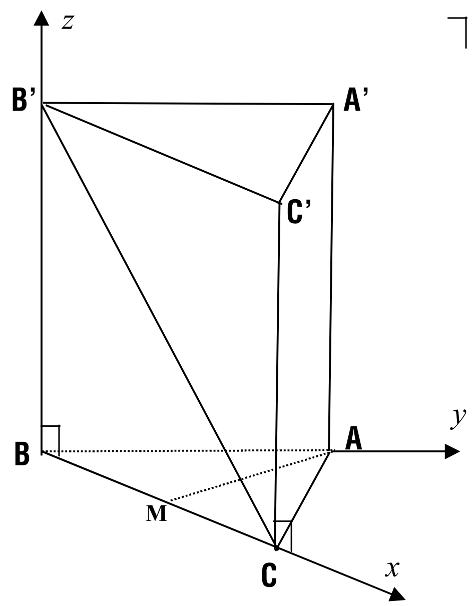
M$\left(\frac{a}{2};0;0\right)$; N$\left(\frac{3a}{2};a;0\right)$ $\overrightarrow{SM}=\left(\frac{a}{2};0;-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ $\overrightarrow{SN}=\left(\frac{3a}{2};a;-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ $\overrightarrow{SB}=\left(\frac{3a}{2};0;-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ $\overrightarrow{SD}=\left(-\frac{a}{2};2a;-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ $\overrightarrow{DN}=\left(2a;-a;0\right)$	$\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right]=\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{2};-\frac{a^2\sqrt{3}}{2};\frac{a^2}{2}\right)$ $\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right]\overrightarrow{SB}=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$; $\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right]\overrightarrow{SD}=\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$ $V_{SMNB}=\frac{1}{6}\left\lvert\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right]\overrightarrow{SB}\right\rvert=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ $V_{SMND}=\frac{1}{6}\left\lvert\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right]\overrightarrow{SD}\right\rvert=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ $V_{S.BMDN}=V_{SMNB}+V_{SMND}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}+\frac{a^3\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

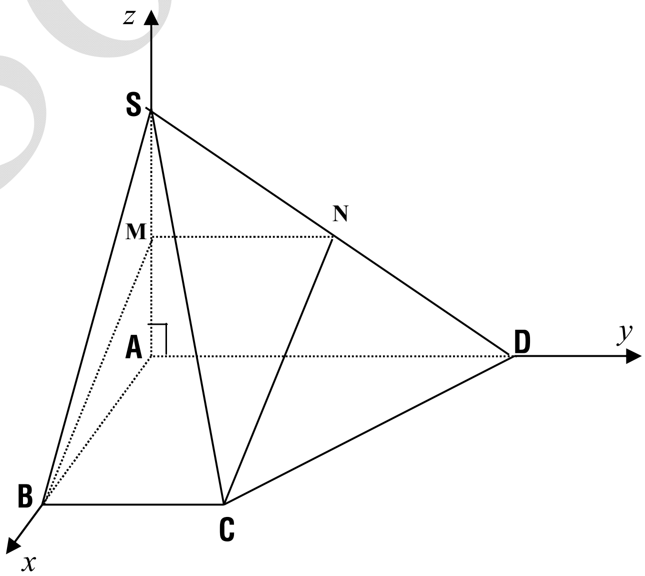
+ Công thức tính góc giữa SM, DN $\cos\left(SM,DN\right)=\frac{\left\lvert\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{DN}\right\rvert}{\left\lvert\overrightarrow{SM}\right\rvert.\left\lvert\overrightarrow{DN}\right\rvert}$	+ Tính cosin của góc giữa SM, DN $\cos\left(SM,DN\right)=\frac{\lvert a^2\rvert}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}}\sqrt{4a^2+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

Bài toán 12 . Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, $AB=BC=a$, cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C (*trích đề thi tuyển sinh ĐH &CĐ khối D năm 2008*)

Hướng dẫn	**Bài giải**
Dựng hình : Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau : $B(0;0;0)$ A$(0;a;0)$; C$(a;0;0)$; B'$(0;0;a\sqrt{2})$ M$\left(\frac{a}{2};0;0\right)$ $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{a}{2};-a;0\right)$; $\overrightarrow{B'C}=\left(a;0;-a\sqrt{2}\right)$ $\overrightarrow{AB'}=\left(0;-a;a\sqrt{2}\right)$ Chứng minh AM và B'C chéo nhau	

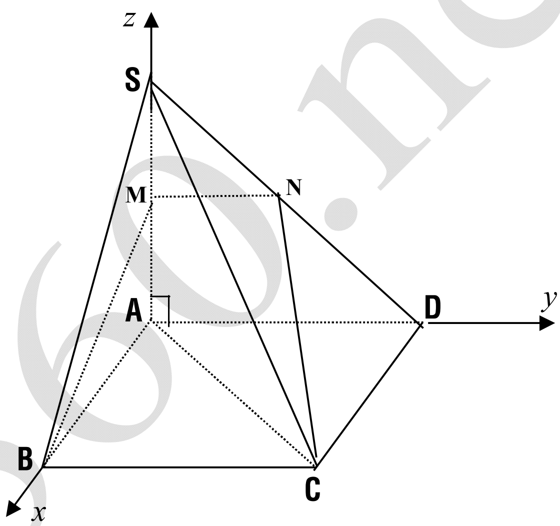
$\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]=\left(a^2\sqrt{2};\dfrac{a^2}{\sqrt{2}};a^2\right)$	+ Thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' $V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}a^3\sqrt{2}$ đvtt + Khoảng cách giữa AM và B'C Vì : $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]\overrightarrow{AB'}=\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ AM và B'C chéo nhau $d\left(AM,B'C\right)=\dfrac{\left\lvert\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]\overrightarrow{AB'}\right\rvert}{\left\lvert\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]\right\rvert}$ $=\dfrac{\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2a^4+\dfrac{1}{2}a^4+a^4}}=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$

Bài toán 13 . Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang , $\widehat{BAD}=\widehat{ABC}=90^0$ $AB=BC=a$, $AD=2a$, SA vuông góc với đáy và $SA=2a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và SD. Chứng minh rằng BCNM là hình chữ nhật và tính thể tích của khối chóp S.BCNM theo a (*trích đề thi tuyển sinh Cao đẳng năm 2008*)

Hướng dẫn	Bài giải
Dựng hình : Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau : $A(0;0;0)$; $B(a;0;0)$; $C(a;a;0)$; $D(0;2a;0)$; $S(0;0;2a)$ $M(0;0;a)$; $N(0;a;a)$	
$\overrightarrow{MN}=(0;a;0)$; $\overrightarrow{BC}=(0;a;0)$ $\overrightarrow{MB}=(a;0;-a)$	+ Chứng minh BCNM là hình chữ nhật $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MB}=0\end{cases}\Rightarrow$ BCNM là hình chữ nhật
$\overrightarrow{SM}=(0;0;-a)$; $\overrightarrow{SC}=(a;a;-a)$	+ Tính thể tích của khối chóp S.BCNM theo a $V_{S.BCNM}=V_{SMCB}+V_{SMCN}$

$\overrightarrow{SB}=(a;0;-2a)$; $\overrightarrow{SN}=(0;a;-a)$ $\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SC}\right]=(a^2;-a^2;0)$ $\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SC}\right]\overrightarrow{SB}=a^3$ $\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SC}\right]\overrightarrow{SN}=-a^3$	$V_{SMCB}=\frac{1}{6}\left\|\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SC}\right]\overrightarrow{SB}\right\|=\frac{a^3}{6}$ $V_{SMCN}=\frac{1}{6}\left\|\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SC}\right]\overrightarrow{SN}\right\|=\frac{a^3}{6}$ $V_{S.BCNM}=V_{SMCB}+V_{SMCN}=\frac{a^3}{3}$ đvtt

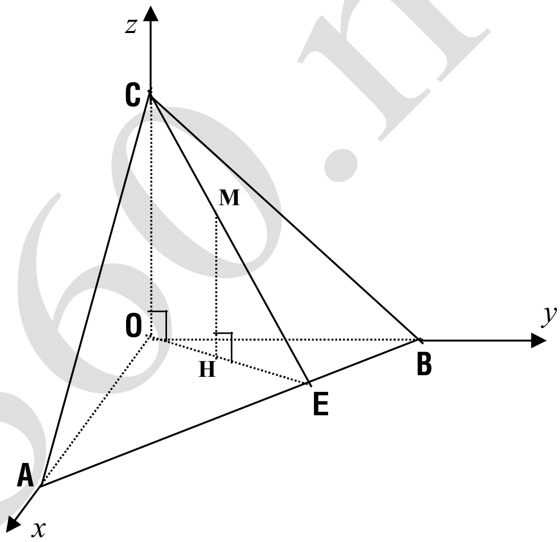
<u>*Bài toán 14*</u> . Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$; $SA=2a$. Mặt phẳng (α) qua BC hợp với AC một góc 30^0 , cắt SA, SD lần lượt tại M, N. Tính diện tích thiết diện BCNM

Hướng dẫn	**Bài giải**
Dựng hình : Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau : $A(0;0;0)$; $B(a;0;0)$; $C(a;a;0)$; $D(0;2a;0)$; $S(0;0;2a)$ Đặt $AM=h$ $(0<h<2a)$ $\Rightarrow M(0;0;h)$ Xác định vị trí điểm M	

$\overrightarrow{BM}=(-a;0;h)$; $\overrightarrow{BC}=(0;a;0)$ $\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC}\right]=(-ah;0;-a^2)=-a(h;0;a)$ $\overrightarrow{AC}=(a;a;0)=a(1;1;0)$ Ta có : $\begin{cases}MN=(\alpha)\cap(SAD)\\BC//AD\end{cases}\Rightarrow MN//BC//AD$ $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp BM$	Pháp vectơ của mặt phẳng (α): $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC}\right]$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{n_\alpha}=(h;0;a)$ Vectơ chỉ phương của đường thẳng AC : $\overrightarrow{AC}=(a;a;0)=a(1;1;0)$ $\Rightarrow\vec{u}=(1;1;0)$ mặt phẳng (α) hợp với AC một góc 30^0 $\Leftrightarrow\sin 30^0=\frac{\left\|\overrightarrow{n_\alpha}.\vec{u}\right\|}{\left\|\overrightarrow{n_\alpha}\right\|\left\|\vec{u}\right\|}=\frac{\|1.h+1.0+0.a\|}{\sqrt{1+1+0}\sqrt{h^2+0+a^2}}$ $\Leftrightarrow\frac{h}{\sqrt{2}\sqrt{h^2+a^2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow h\sqrt{2}=\sqrt{h^2+a^2}$ $\Leftrightarrow h=a\Rightarrow$ M là trung điểm của SA

ΔABM vuông cân tại A $\Rightarrow BM = a\sqrt{2}$ $MN = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$	$+ \begin{cases} MN // BC \\ BM \perp BC \end{cases} \Rightarrow$ BCNM là hình thang vuông + Diện tích thiết diện BCNM : $S_{BCNM} = \frac{1}{2}BM\left(MN + BC\right) = \frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$

Bài toán 15 . Cho hình chóp O.ABC có $OA = a;\ OB = b;\ OC = c$ đôi một vuông góc. Điểm M cố định thuộc tam giác ABC có khoảng cách lần lượt đến các mặt phẳng (OBC); (OCA); (OAB) lá 1; 2; 3. Tính $a;b;c$ để thể tích khối chóp O.ABC nhỏ nhất.

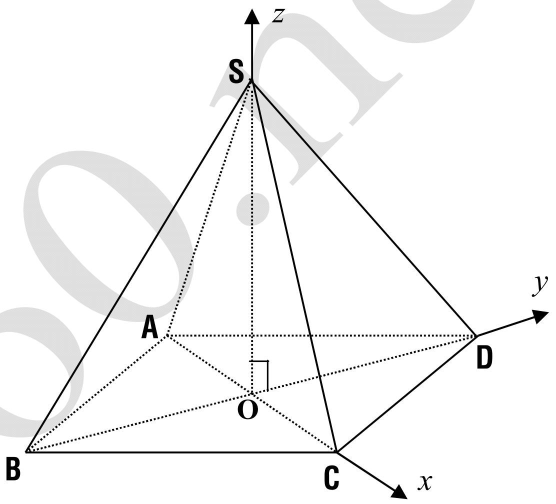
Hướng dẫn	**Bài giải**
Dựng hình : Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau : $O(0;0;0)$ $A\left(a;0;0\right)$; $B\left(0;b;0\right)$; $C\left(0;0;c\right)$ $d\left(M,(OBC)\right) = 1 \Rightarrow x_M = 1$ $d\left(M,(OCA)\right) = 2 \Rightarrow y_M = 2$ $d\left(M,(OAB)\right) = 3 \Rightarrow z_M = 3$ $\Rightarrow M\left(1;2;3\right)$ $A\left(a;0;0\right) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (a;0;0)$ $B\left(0;b;0\right) \Rightarrow \overrightarrow{OB} = (0;b;0)$ $C\left(0;0;c\right) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = (0;0;c)$	 +Thể tích khối chóp O.ABC $V_{O.ABC} = \frac{1}{6}\left\|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\overrightarrow{OC}\right\| = \frac{1}{6}abc$

Giải hệ : $\begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$	+ Phương trình mặt phẳng (ABC) : (ABC) : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ $M \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$ Áp dụng bất đẳng thức Côsi : $1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{2}{b}.\frac{3}{c}} = 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}$

	$\Rightarrow \frac{1}{6}abc \geq 27$ $MinV_{O.ABC} = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$

<u>Bài toán 16</u> . Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các cạnh đều bằng a.

a. Tính thể tích khối chóp S.ABCD
b. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD)
c. Tính góc giữa SB và mặt phẳng (SCD)

Hướng dẫn	Bài giải
Dựng hình : Gọi $O = AC \cap BD$ $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$ $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau : $O(0;0;0)$; S$\left(0;0;\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$; A$\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$; C$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$ D$\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$; B$\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$ Phương trình mặt phẳng (SCD) (SCD): $\frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \frac{y}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \frac{z}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = 1$ $\Leftrightarrow x + y + z - \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0$	 a.Tính thể tích khối chóp S.ABCD $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a}{\sqrt{2}}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ b. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) Phương trình mặt phẳng (SCD) (SCD): $x + y + z - \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0$ $d\left(A,(SCD)\right) = \frac{\left\lvert -\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} \right\rvert}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

<u>Bài toán 17</u> . Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang , $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$ $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Chứng minh tam

giác SCD vuông và tính theo a khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) (*trích đề thi tuyển sinh ĐH &CĐ khối D năm 2007*)

<table>
<tr><th>Hướng dẫn</th><th>Bài giải</th></tr>
<tr><td>

Dựng hình :

Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau :

$A(0;0;0)$; $B(a;0;0)$; $C(a;a;0)$;
$D(0;2a;0)$; $S(0;0;2a)$

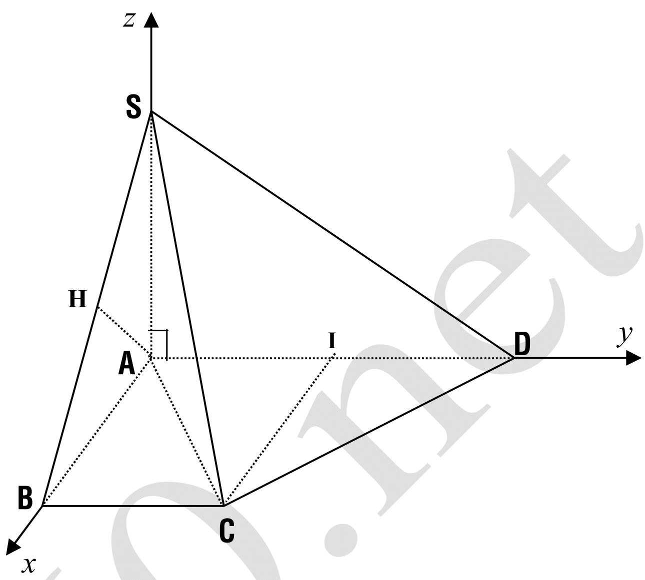
$\overrightarrow{SB}=\left(a;0;-a\sqrt{2}\right)$
$\overrightarrow{SC}=\left(a;a;-a\sqrt{2}\right)$
$\overrightarrow{SD}=\left(0;2a;-a\sqrt{2}\right)$
$\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]=\left(a^2\sqrt{2};a^2\sqrt{2};2a^2\right)$
$=a^2\sqrt{2}\left(1;1;\sqrt{2}\right)$

+ Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A trên SB
Phương trình tham số của SB :

SB : $\begin{cases} x=a+at \\ y=0 \\ z=a\sqrt{2}t \end{cases} \quad (t\in R)$

+ Viết phương trình mặt phẳng (SCD)
(SCD) đi qua điểm S và nhận vectơ $\vec{n}=\left(1;1;\sqrt{2}\right)$ làm pháp vectơ
(SCD) : $1(x-0)+1(y-0)+\sqrt{2}(z-a\sqrt{2})=0$

</td><td>



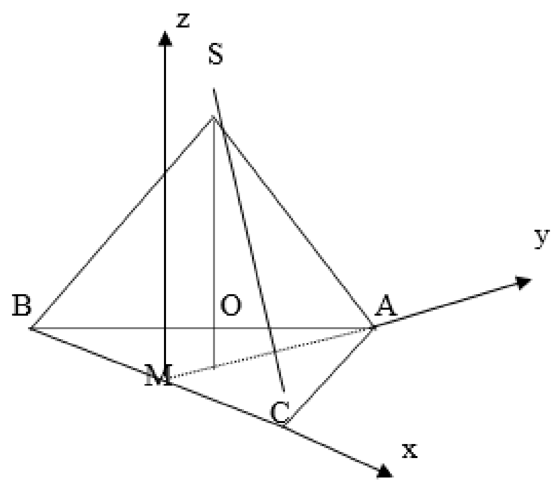
+ Chứng minh tam giác SCD vuông
$\overrightarrow{SC}=(a;a;-2a)$; $\overrightarrow{CD}=(-a;a;0)$
$\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{CD}=0 \Rightarrow SC\perp CD$
$\Rightarrow$ Tam giác SCD vuông tại C

+ Tính (theo a) khoảng cách từ H đến (SCD)
Tọa độ điểm H :
$H(x;y;z)\in SB \Rightarrow H\left(a+at;0;a\sqrt{2}t\right)$
$\overrightarrow{AH}=(a+at;0;a\sqrt{2}t)$
$AH\perp SB \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{SB}=0$
$\Leftrightarrow 3a^2t+a^2=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{3}$
$\Rightarrow H\left(\frac{2a}{3};0;\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$

+ Khoảng cách từ H đến (SCD)

Phương trình mặt phẳng (SCD)
(SCD) : $x+y+\sqrt{2}z-2a=0$
$d\left(H,(SCD)\right)=\frac{\left|\frac{2a}{3}+\frac{2a}{3}-2a\right|}{2}=\frac{a}{3}$

</td></tr>
</table>



Dựng hệ trục tọa độ như hình vẽ, gốc tọa độ tại M.

$$MO = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$$

$$M(0;0;0); B\left(\frac{-a}{2};0;0\right); C\left(\frac{a}{2};0;0\right); A\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right); S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a\sqrt{33}}{3}\right)$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}].\overrightarrow{SC}\right| = \ldots$$

$$d(AM,SB) = \frac{\left|[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{SB}].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{SB}]\right|} = \ldots$$