Vấn đề đặt ra: Người thiết kế muốn nhà máy chọn bản thiết kế của mình thì ngoài tính thẩm mỹ của bao bì thì cần tính đến chi phí về kinh tế sao cho nguyên vật liệu làm bao bì là ít tốn nhất

Theo cách thông thường ta làm bao bì dạng hình hộp chữ nhật hoặc hình trụ. Như vậy cần xác định xem hai dạng trên thì dạng nào sẽ ớt tốn vật liệu hơn.

Các phương án giải quyết :

Phương án 1: **Làm bao bì theo hình hộp đáy hình vuông cạnh x**

Thể tích: $V = S_d \times h = x^2 h$; $V = hx^2 = 1 \Rightarrow h = \dfrac{1}{x^2}$

Để ít tốn vật liệu nhất thì diện tích toàn phần phải nhỏ nhất.

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{2day} = 4xh + 2x^2 = 4x\frac{1}{x^2} + 2x^2 = \frac{2}{x} + \frac{2}{x} + 2x^2 \geq 3.\sqrt[3]{\frac{2}{x}.\frac{2}{x}.2x^2} = 6$$

Vậy Min $S_{tp} = 6$ xảy ra khi: $\dfrac{2}{x} = 2x^2 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow h = 1$

Nếu ta làm theo dạng hình hộp thỡ nhà thiết kế cần làm hình lập phương có cạnh 1dm

$$V=\pi x^2 h=1$$
$$\Rightarrow h=\frac{1}{\pi x^2}$$
$$S_{tp}=S_{xq}+S_{2day}=2\pi xh+2\pi x^2$$
$$=2\pi x\frac{1}{\pi x^2}+2\pi x^2$$
$$=\frac{2}{x}+2\pi x^2$$
$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+2\pi x^2\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{x}.\frac{1}{x}.2\pi x^2}=3\sqrt[3]{2\pi}=5,54$$

Min $S_{tp}=5,54$

Đẳng thức xảy ra khi:

$$\frac{1}{x}=2\Pi x^2\Leftrightarrow x^3=\frac{1}{2\Pi}\Rightarrow x=0,54dm$$
$$\Rightarrow h=1,084$$

Nhận thấy h = 2x

Nếu làm bao bì dạng hình trụ thì người thiết kế phải làm hộp sao cho đường cao bằng đường kính đáy.

Theo tính toán ở trên cả hai hộp đều có thể tích là 1dm^3 nhưng diện tích toàn phần của hộp lập phương lớn hơn hộp hình trụ do vậy chi phí vật liệu để làm hộp dạng lập hình lập phương là tốn kém hơn. Vì thế để nhà máy chọn bản thiết kế của mình thì người thiết kế nên chọn dạng hình trụ để làm hộp. Tuy nhiên trên thị trường hiện nay vẫn có dạng hộp sửa hình hộp chữ nhật, hình lập phương… là do những tính năng ưu việt khác của các dạng hộp đó.

3. Chủ đề Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Trong chủ đề này có thể khai thác được nhiều dạng toán gần gũi với đời sống thực tiễn như: Bài toán vận tải, Bài toán sản xuất đồng bộ, Bài toán thực đơn, Bài toán lập kế hoạch sản xuất trong điều kiện tài nguyên hạn chế, Bài toán vốn đầu tư nhỏ nhất, Bài toán pha trộn, ...

Chẳng hạn, ta có thể lấy thêm một số ví dụ sau:

Ví dụ 1:

Một công ty TNHH trong một đợt quảng cáo và bán khuyến mói hàng hoá (1 sản phẩm mới của công ty) cần thuê xe để chở 140 người và 9 tấn hàng. Nơi thuê chỉ có hai loại xe A và B. Trong đó xe loại A có 10chiếc , xe loại B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu , loại B giá 3triệu. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí vận chuyển là thấp nhất. Biết rằng xe A chỉ chở tối đa 20 người và 0,6 tấn hàng; xe B chở tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng.

Vấn đề đặt ra:

Cần phải tớnh số xe loại A, loại B cần dựng sao cho chi phớ là thấp nhất.

Nếu chỉ sử dụng 1 loại xe thì không đáp ứng yêu cầu . Thật vậy

Nếu dùng cả 9 xe B thì chở được 90 người và vận chuyển được 13,5 tấn hàng như vậy sẽ thừa 50 người và thiếu 4,5 tấn.

Nếu dùng cả 10 xe A chở được 200 người và 6 tấn hàng như vậy sẽ hiếu 60 người và thừa 3 tấn hàng.

Do vậy ta phải thuê hai loại xe .

Phương án giải quyết :

Gọi x, y lần lược là số xe loại A, B cần dùng .

Theo đề bài thì cần tìm x, y sao cho A(x,y) = 4x+3y đạt giá trị nhỏ nhất.

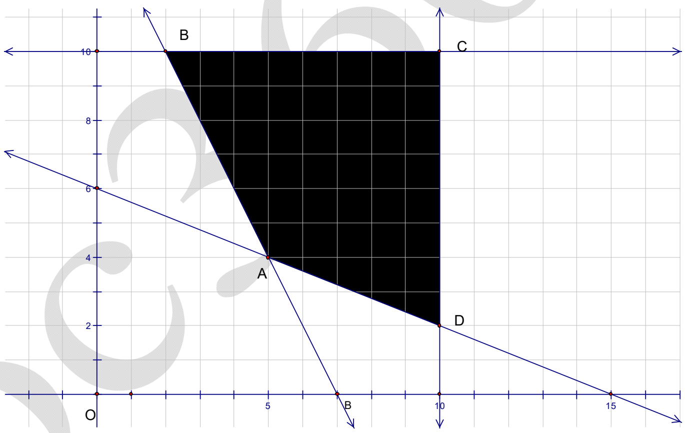
Ta có: $\begin{cases} 20x+10y \geq 140 \\ 0{,}6x+1{,}5y \geq 9 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1y \geq 14 \\ 2x+15y \geq 30 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases} (II)$

Để giải bài toán này ta lần lược giải quyết các vấn đề sau đây:

+ xác định tập (S) các điểm có có toạ độ (x,y) thoả mãn hệ bất pt (II) (1)

+ khi (x,y) lấy giá trị trên (S) tìm giá trị nhỏ nhất của T(x,y) = 4x + 3y (2)

Miền nghiệm (S) của hệ (II) được biểu diễn bằng tứ giác ABCD kể cả biên như hình vẽ :



(2) Có nghĩa là tìm tất cả các điểm M(x,y) thuộc tứ giác ABCD sao cho A(x,y) nhỏ nhất

Ta biết rằng A nhỏ nhất đạt tại các giá trị biên của tứ giác ABCD, nên ta cần tìm các toạ độ các đỉnh S

A(x,y) là nghiệm hệ: $\begin{cases} 2x+y=14 \\ 2x+5y=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow A(5,4)$

B(x,y) là nghiệm hệ $\begin{cases} x=10 \\ 2x+5y=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow B(10,2)$

C(x,y) là nghiệm hệ $\begin{cases} x=10 \\ y=9 \end{cases} \Rightarrow C(10,9)$

D(x,y) là nghiệm hệ $\begin{cases} 2x+5y=14 \\ y=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=9 \end{cases} \Rightarrow D(\frac{5}{2},9)$

Tính giá tri T(x, y) tại các điểm biên:

$$T(A) = 4.5+3.4 = 32(\text{triệu})$$

$$T(B) = 4.10+3.2 = 46(\text{triệu})$$

$$T(C) = 4.10+3.9 = 67(\text{triệu})$$

$$T(D) = 4.\frac{5}{2}+3.9 = 37(\text{triệu})$$

Vậy T(A) = 32 triệu là nhỏ nhất vậy ít tốn tiền vận chuyển nhất nên chọn 5 xe A và 4 xe B.

Ví dụ 2:

Trong một cuộc thi về " bữa ăn dinh dưỡng", ban tổ chức yêu cầu để đảm bảo lượng dinh dưỡng hằng ngày thì mỗi gia đình có 4 thành viên cần ít nhất 900 đơn vị prôtêin và 400 đơn vị Lipít trong thức ăn hằng ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800đơn vị prôtêin và 200đơn vị Lipit, 1kg thịt heo chứa 600đơn vị prôtêin và 400đơn vị Lipit. Biết rằng người nội trợ chỉ được mua tối đa 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt heo. Biết rằng 1 kg thịt bò giá 100.000đ, 1kg thịt heo giá 70.000đ

Phần thắng sẽ thuộc về gia đình nào trong khẩu phần thức ăn đảm bảo chất dinh dưỡng và chi phí bỏ ra là ít nhất.

Vấn đề đặt ra:

Xác định lượng thịt heo và thịt bò cần mua để vừa đảm bảo dinh dưỡng vừa ít tốn nhất.

Rỏ ràng đối với trường hợp này nếu ta chỉ mua một loại thịt thì không đáp ứng yêu cầu. Thật vậy:

+ Nếu chỉ mua thịt heo thì ta mua được tối đa 1,1 kg. Khi đó chi phí bỏ ra là: 1,1x70.000 = 77000đ

Với lượng thịt trên thì cung cấp 1,1 x 600 = 660 đơn vị Prôtêin và 1,1 x 400 = 440 đơn vị Lipit. Như vậy lượng Lipit thừa mà lượng Prôtêin thiếu.

+ Nếu chỉ mua thịt bò thì rỏ ràng chi phí sẽ rất cao.

Do vậy ta phải mua hai loại thịt

Phương án giải quyết :

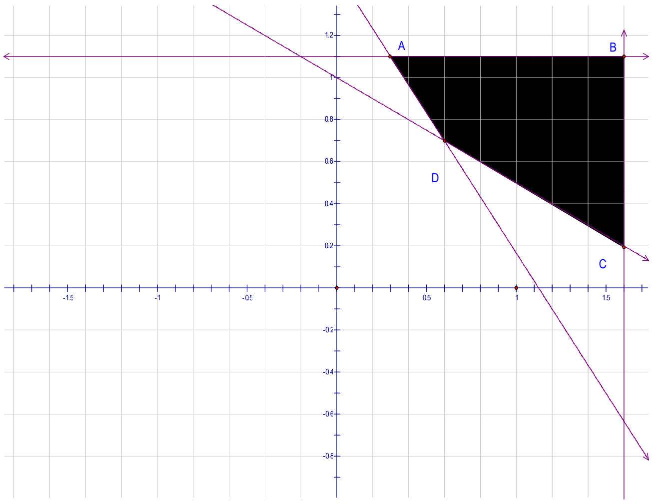
Gọi x,y lần lược là khối lượng thịt bò và thịt heo mà người nội trợ mua

Bài toán đặt ra **T=100.000x+70.000y** đạt giá trị nhỏ nhất.

Điều kiện

$$\begin{cases} 800x+600y \geq 900 \\ 200x+400y \geq 400 \\ 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+6y \geq 9 \quad (1) \\ x+2y \geq 2 \quad (2) \\ 0 \leq x \leq 1,6 \quad (3) \\ 0 \leq y \leq 1,1 \quad (4) \end{cases}$$

Miền giới hạn chính là tứ giác ABCD



A(0,3;1,1), B(1,6;1,1), C(1,6;0,2), D(0,6; 0,7)

T(A)=107.000đ.

T(B)=237.000đ

T(C)=174000đ

T(D)=109.000đ

Vậy Tmin = 107.000đ khi mua 0.3kg thịt bò và 1,1 kg thịt heo.

Ví dụ 3

Một cửa hàng bán áo sơ mi, quần âu nam. Vì khi bán chị bán hàng quên ghi chép vào sổ để chủ cửa hàng kiểm tra. Chiều ngày thứ 3 người chủ buộc chị phải nộp sổ để theo dõi nhưng chị không biết rỏ ba ngày qua đã bán được những gì ? Chỉ nhớ rằng ngày thứ nhất bán được 5160.000đ, ngày thứ 2 bán được 6.080.000đ, ngày thứ 3 bán được 4.920.000 đ. Vậy bạn có cách nào giúp chị ấy không?

Vấn đề đặt ra: Phải tính được số hàng bán từng ngày. Do vậy phải tính được ngày thứ nhất bán được bao nhiêu áo sơ mi , quần âu nam, tương tự các ngày sau.

Phương án giải quyết:

a.Phương án 1 : chị ấy đếm số quần áo còn lại rồi so sánh với số quần áo khi nhập vào sau đó chia đều cho ba ngày. Cách tính này rất nhanh, chính xác nhưng khó có thể thuyết phục .

b. Phương án 2: Tính số hàng bán từng ngày

Khi hỏi chị bán hàng cho biết thêm thông tin : ngày thứ ba bán được 15 quần âu nam, tổng số áo và quần bán được trong ba ngày lần lược là 52 và 60.

Từ giả thuyết ta gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số áo sơ mi bán ở ngày thứ nhất, thứ hai, thứ ba. y_1, y_2, y_3 lần lược là số quần âu nam bán ở ngày thứ nhất, thứ hai, thứ ba.

Theo đề ta có:

$$\begin{cases} 80.000x_1 + 200.000y_1 = 5160.00 \\ 80.000x_2 + 200.000y_2 = 6.080.000 \\ 80.000x_3 + 200.000y_3 = 4.920.000 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 52 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 60 \\ y_3 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x_1 + 20y_1 = 516 \\ 8x_2 + 20y_2 = 608 \\ 8x_3 + 20y_3 = 492 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 52 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 60 \\ y_3 = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{x}_1 = 12, x_2 = 16, x_3 = 24 \\ y_1 = 21, y_2 = 24, y_3 = 15 \end{cases}$$

Vậy: Ngày thứ nhất chị ấy bán được 12 áo sơ mi, 21 quần âu nam

Ngày thứ hai bán được 16 áo sơ mi và 24 quần âu nam

Ngày thứ ba bán được 24 áo sơ mi và 15 quần âu nam.

Ví dụ 4

Trong một xưởng cơ khí có những thanh sắt dài 7,4m. Người chủ muốn các thợ của mình cắt mỗi thanh sắt thành các đoạn dài 0,7m và 0,5m để tiện

sử dụng. Bây giờ người chủ muốn có 1000 đoạn 0,7m và 2000 đoạn 0,5m. Bạn hãy ước lượng xem cần dùng ít nhất bao nhiêu thanh sắt 7,4m để làm.

Vấn đề đặt ra:

Cắt đủ số đoạn theo yêu cầu và phải dùng thanh sắt 7,4m ít nhất . Do vậy ta cần tìm cách cắt theo yêu cầu và chọn cách cắt tiết kiệm nhất.

Phương án giải quyết (đề nghị): Ta thấy rằng muốn tiết kiệm vật liệu thì cần phải cắt mỗi thanh 7,4 m thành a đoạn 0,7m, b đoạn 0,5m không dư. Tức là cần giải phương trình:

$$\begin{aligned}&74 = 7a + 5b \geq 7a\\ &\Rightarrow 0 < a \leq 10\\ &b = \frac{74-7a}{5} = 15 - a - \frac{1+2a}{5}\end{aligned}$$

Và $b \in Z$ thì (1+2a) $\vdots 5$

Ta có: $74 \geq 5b \Rightarrow 0 < b \leq 14$, $0 < 1+2a \leq 21$ và 1+2a là số lẻ nên ta suy ra:

$$\begin{aligned}&0,7a + 0,5b = 7,4 \;\; khi \;\; a,b \in Z\\ &\Leftrightarrow 7a + 5b = 74\\ &\left[\begin{array}{l}1+2a=5\\ 1+2a=15\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=2 \Rightarrow b=12\\ a=7 \Rightarrow b=5\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy ta có hai cách cắt một thanh 7,4 m tiết kiệm

Cắt thành 2 đoạn 0,7m và 12 đoạn 0,5m

Cắt thành 7 đoạn 0,7 và 5 đoạn 0,5 m.

Bây giờ ta chọn các tiết kiệm nhất trong hai cách trên

Gọi x thanh cắt theo kiểu thứ nhất , y thanh cắt theo kiểu thứ hai.

Như vậy số đoạn 0,7m là: $2x + 7y$

Số đoạn 0,5m là: $12x+5y$

Để có 1000 đoạn 0,7m và 2000 đoạn 0,5m nên x, y là nghiệm hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x+7y=1000 \\ 12x+5y=2000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=121 \\ y=108 \end{cases}$$

Vậy đã cắt được $2x+7y=998$ đoạn 0,7m

Và $12x+5y=1992$ đoạn 0,5 m

Ta chỉ cần cắt thêm một thanh theo kiểu thứ nhất

Vậy đó dựng tất cả $121+108+1=230$ thanh 7,4m

Điều quan trọng lúc này chúng ta cần chỉ ra rằng cách cắt này là tiết kiệm nhất.

Thật vậy, ta thấy tổng số độ dài của 1000 đoạn 0,7m và 2000 đoạn 0,5m là:

$$0,7.1000+0,5.2000=1700m \; 0,7.1000+0,5.2000=1700m$$

Vậy phải dựng ítt nhất $1700:7,4\approx 230$ thanh

Tóm lại chỉ cần cắt 122 thanh theo kiểu thứ nhất, 108 thanh theo kiểu thứ hai.

Vớ dụ 5

Hai công nhân được giao nhiệm vụ sơn một bức tường. Sau khi người thứ nhất làm được 7h và người thứ hai làm được 4h thì họ sơn được $\frac{5}{9}$ bức tường. Sau đó họ bắt tay làm chung trong 4h thì chỉ còn $\frac{1}{18}$ bức tường chưa sơn. Vì cả hai người này đều bận nên nhờ người công nhân thứ ba sơn tiếp bức tường còn lại. Bây giờ phải chia tiền công như thế nào cho công bằng. Biết rằng người chủ khoán tiền công sơn bức tường này là 360.000đ.

Vấn đề đặt ra:

Tính số tiền mà mỗi người nhận được khi sơn xong bức tường. Để giải quyết vấn đề này ta quan tâm đến thời gian và số phần việc đó làm.

Các phương án giải quyết (đề nghị):

a. Phương án 1: **tính theo số giờ làm việc**

Công việc còn lại người công nhân thứ ba làm nên nhận được số tiền làm trong giai đoạn này là 360.000: 18=20.000đ

Số tiền tổng cộng của hai nguời công nhân đầu tiên là:

360.000-20.000=340.000đ

Số giờ tổng cộng mà hai người làm là: $t = 7 + 4 + 2.4 = 19$

Thời gian người thứ nhất làm là: $t_1 = 7 + 4 = 11$

Số tiền người thứ nhất có thể nhận được là $\frac{340000}{19}.11 = 197000$ đ

Số tiền nguời thứ hai nhận được $T = 340000 - 197000 = 143000$ đ

Ta thấy rằng điều này vẫn chưa thoả mãn vì tiền công phụ thuộc vào kết quả công việc. Mâu thuẫn này đó dẫn đến việc đề xuất phương án giải quyết tiếp theo.

b. Phương án 2: **tính theo phần công việc đó làm**.

Tiền công của người thứ ba là 20.000đ

Ta chỉ quan tâm đến tiền công mà người công nhân thứ nhất và thứ hai có thể nhận được.

Giả sử công suất của mỗi người không đổi khi làm việc

Gọi: x là phần bức tường người thứ nhất làm trong 1h

y là phần công việc người thứ hai làm trong 1 giờ

Theo đề ta có

$$\begin{cases} 7x+4y=\dfrac{5}{9} \\ 4x++4y=\dfrac{7}{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{18} \\ y=\dfrac{1}{24} \end{cases}$$

Như vậy trong quá trình làm việc của mình người thứ nhất làm được $\frac{11}{18}$ công việc

Số tiền mà người thứ nhất nhận được là $\frac{11}{18}.360000 = 220.000$đ

Trong quá trình làm việc người thứ hai làm được $8.\frac{1}{24} = \frac{1}{3}$ công việc

Số tiền mà người thứ hai nhận được là $\frac{1}{3}.360000 = 120.000$đ.

Vậy trong công việc này thì số tiền mà người công nhân thứ nhất , thứ hai và thứ ba nhận được lần lược là: 220.000đ, 120.000đ, 20.000đ

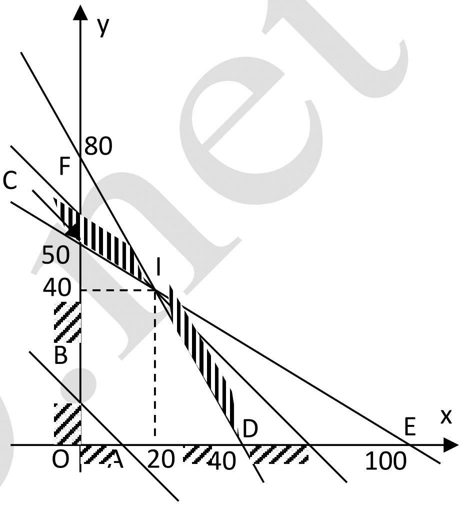
***Ví dụ 6*: Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm, mỗi kg sản phẩm loại I cần 2kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40000 đồng. Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4kg nguyên liệu và 15giờ, đem lại mức lời 30000 đồng.**

Xưởng có 200kg nguyên liệu và 120 giờ làm việc. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

Thực chất của bài toán này là phải tìm $x \geq 0$, $y \geq 0$ thoả mãn hệ $\begin{cases} 2x + 4y \leq 200 \\ 30x + 13y \leq 1200 \end{cases}$ sao cho $L = 40000x + 30000y$ đạt giá trị lớn nhất.

Một cách tương đương là, tìm x, y thoả mãn hệ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 100 \\ 2x + y \leq 80 \end{cases}$

sao cho $4x + 3y$ đạt giá trị lớn nhất.



Trên Hình vẽ ta ký hiệu C(0; 50), D(40; 0), E(100; 0), F(0; 80), I là giao điểm của CE và DF.

Dễ thấy toạ độ của I là (20; 40), miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác OCID (kể cả biên).

Với mỗi L xác định, ta nhận thấy có vô số điểm M(x; y) sao cho 4x + 3y = L, những điểm M như thế nằm trên đường thẳng AB với A(L/4; 0), B(0; L/3). Hệ số góc của đường thẳng AB là - 4/3. Cho L lớn dần lớn lên thì đường thẳng AB sẽ "tĩnh tiến dần lên" phía trên. Nhìn vào Hình vẽ ta nhận thấy rằng: Trong những đường thẳng có hệ số góc - 4/3, thì đường thẳng đi qua I là đường thẳng ở vị trí "cao nhất" đang còn có điểm chung với tứ giác OCID. Chưa đạt tới vị trí này thì L chưa phải là lớn nhất. Vượt quá "ngưỡng" này thì toạ độ của mọi điểm trên đường thẳng sẽ không còn thoả mãn hệ điều kiện ràng buộc nữa.

Từ đó dễ dàng đi đến kết luận là khi x = 20, y = 40 thì L đạt giá trị lớn nhất.

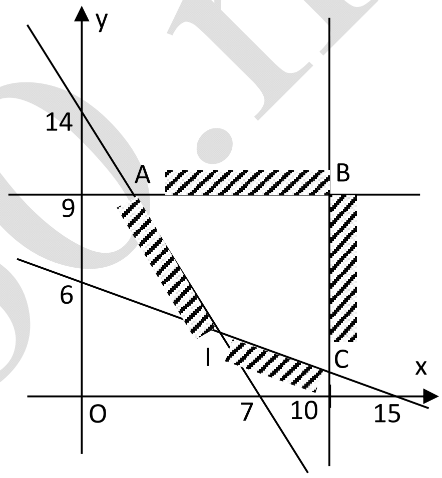
Ví dụ 7: **Một công ty cần thuê xe vận chuyển 140 người và 9 tấn hàng hóa. Nơi cho thuê xe chỉ có 10 xe hiệu MITSUBISHI và 9 xe hiệu FORD. Một chiếc xe hiệu MITSUBISHI có thể chở 20 người và 0,6 tấn hàng. Một chiếc xe hiệu FORD có thể chở 10 người và 1,5 tấn hàng. Tiền thuê một xe hiệu MITSUBISHI là 4 triệu đồng, một xe hiệu FORD là 3 triệu đồng. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí thấp nhất?**

Trước hết ta hãy đặt Bài toán thành hệ bất phương trình

Gọi x, y ($x, y \in N$) lần lượt là số xe loại MITSUBISHI, loại FORD cần thuê

Từ bài toán ta được hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 20x + 10y \ge 140 \\ 0{,}6x + 1{,}5y \ge 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 2x + y \ge 14 \\ 2x + 5y \ge 30 \end{cases} \quad (*)$$



Tổng chi phí $T(x, y) = 4x + 3y$ (triệu đồng)

Thực chất của Bài toán này là tìm x, y nguyên không âm thoả mãn hệ (*) sao cho T(x, y) nhỏ nhất.

Bước tiếp theo là ta tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình

Miền nghiệm là miền tứ giác lồi IABC.

Ta cần xác định toạ độ (x, y) của một điểm thuộc miền tứ giác IABC (kể cả biên) sao cho $T(x, y) = 4x + 3y$ đạt cực tiểu. Xét họ đường thẳng cho bởi phương trình: $4x + 3y = T$ ($T \in R$) hay $y = -\frac{4}{3}x + \frac{T}{3}$, ta thấy đường thẳng này song song với đường thẳng $y = -\frac{4}{3}x$ $(T \neq 0)$. Khi T tăng, đường thẳng này tịnh tiến song song lên phía trên. Khi T giảm, đường thẳng này tịnh tiến song song xuống phía dưới. Giá trị nhỏ nhất của T đạt được tại đỉnh I của tứ giác IABC là giao điểm của hai đường thẳng 2x + 5y = 30 và 2x + y = 14. Toạ độ của I là (x_I = 5; y_I = 4).

Như vậy: thuê 5 xe hiệu MITSUBISHI và 4 xe hiệu FORD thì chi phí vận tải là thấp nhất.

4. Chủ đề dãy số, cấp số cộng, cấp số nhân

Ví dụ 1: **Đầu mùa thu hoạch xoài, một bác nông dân đã bán cho người thứ nhất, nửa số xoài thu hoạch được và nửa quả, bán cho người thứ hai nửa số còn lại và nửa quả, bán cho người thứ ba nửa số xoài còn lại và nửa quả v.v... Đến lượt người thứ bảy bác cũng bán nửa số xoài còn lại và nửa quả thì không còn quả nào nữa.**

Hỏi bác nông dân đã thu hoạch được bao nhiêu quả xoài đầu mùa?

Gọi x là số quả Xoài thu hoạch được đầu mùa của người nông dân.

Người khách hàng thứ nhất đã mua: $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2}$ quả; người thứ 2 mua: $\frac{1}{2}(x-\frac{x+1}{2})+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^2}$ quả; người khách hàng thứ 3 mua: $\frac{1}{2}(x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+1}{2^2})+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^3}$ quả; ... và người khách hàng thứ 7 mua: $\frac{x+1}{2^7}$ quả. Ta có phương trình:

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2^2}+\ldots+\frac{x+1}{2^7}=x$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^7})=x \ (*)$$

Tính tổng các số hạng của cấp số nhân trong ngoặc ta được:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^7}=\frac{1}{2}\,\frac{1-\frac{1}{2^7}}{\frac{1}{2}}=\frac{127}{128}$$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow (x+1)\frac{127}{128}=x \Leftrightarrow x=127$

Vậy bác nông dân đã thu hoạch được 127 quả Xoài đầu mùa.

Ví dụ 2: **Qua điều tra chăn nuôi bò ở huyện X cho thấy ở đây trong nhiều năm qua, tỉ lệ tăng đàn hàng năm là 2%.**

Tính xem, sau một kế hoạch 3 năm, với số lượng đàn bò thống kê được ở huyện này vào ngày 1/1/2006 là 18.000 con, thì với tỉ lệ tăng đàn trên đây, đàn bò sẽ đạt tới bao nhiêu con?

Thông thường bài toán trên được giải như sau:

Sau một năm đàn bò ở huyên này tăng được: 18.000 × 2% = 360 (con).

Nên tổng số đàn bò sau năm thứ nhất (cuối năm 2006) là:

18.000 + 360 = 18.360 (con).

Sau 2 năm đàn bò lại tăng thêm: 18.360 × 2% = 367 (con).

Nên tổng số bò sau năm thứ 2(cuối năm 2007) là:

18.360 + 367 = 18.727 (con).

Sau 3 năm đàn bò lại tăng thêm: 18.727 ×2% = 375 (con).

Như vậy tổng đàn bò cuối năm thứ 3 (cuối 2008) là:

18.727 + 375 = 19.102 (con).

Bài toán đã được giải quyết xong. ***Tuy nhiên ta nhận thấy nếu yêu cầu tính số đàn bò sau nhiều năm hơn thì cách tính đi từng bước như trên sẽ rất vất vả, chậm và có thể nhầm lẫn. Bằng kiến thức về cấp số nhân ta sẽ tìm ra cách tính tổng quát hơn.***

Gọi S_0 là tổng số đàn gia súc theo thống kê ban đầu; q là tỉ lệ tăng hàng năm; n là số năm phát triển $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ và S_i (i = 1…n) là tổng số đàn gia súc sau i năm.