Còn 3 em đưa vào nhóm còn lại thì số khả năng xảy ra là 1 cách.

Vậy $|\Omega| = C_9^3 C_6^3 .1 = 1680$

Bước 2: Tìm số kết quả thuận lợi cho A.

Phân 3 nữ vào 3 nhóm trên có $3!$ cách.

Phân 6 nam vào 3 nhóm theo cách như trên có $C_6^2 C_4^2 .1$ cách khác nhau.

$\Rightarrow |\Omega_A| = 3!.C_6^2 C_4^2 .1 = 540.$

Bước 3: Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{540}{1680} = \frac{27}{84}$.

STUDY TIP

Bài toán ở ví dụ 2 liên quan chặt chẽ với phép đếm. Ta cần nắm chắc phần quy tắc cộng, quy tắc nhân để giải quyết các bài toán tính xác suất theo phương pháp cổ điển.

Ví dụ 3. Một hộp chứa 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Chọn 6 viên bi một cách ngẫu nhiên rồi cộng các số trên 6 viên bi được rút ra với nhau. Xác suất để kết quả thu được là số lẻ là

A. $\frac{226}{462}$. **B.** $\frac{118}{231}$. **C.** $\frac{115}{231}$. **D.** $\frac{103}{231}$.

Lời giải

Đáp án B.

Bước 1: Tìm số phần tử không gian mẫu.

Chọn ngẫu nhiên 6 viên bi trong 11 viên bi thì số cách chọn là $n(\Omega) = C_{11}^6 = 462$

Bước 2: Tìm số phần tử thuận lợi cho biến cố.

Gọi A là biến cố : "Chọn 6 viên bi cộng các số trên 6 viên bi đó thu được là số lẻ".

Trong 11 viên bi có 6 viên bi mang số lẻ đó là $\{1;3;5;7;9;11\}$ và 5 viên bi mang số chẵn $\{2;4;6;8;10\}$.

* **Trường hợp 1:** 1 viên bi mang số lẻ và 5 viên bi mang số chẵn.

Số cách chọn trong trường hợp 1 là $C_6^1 .C_5^5$ cách.

* **Trường hợp 2:** 3 viên bi mang số lẻ và 3 viên bi mang số chẵn.

Số cách chọn trong trường hợp 2 là $C_6^3 .C_5^3$ cách.

* **Trường hợp 3:** 5 viên bi mang số lẻ và 1 viên bi mang số chẵn.

Số cách chọn trong trường hợp 3 là $C_6^5 .C_5^1$ cách.

Suy ra $n(A) = C_6^1 .C_5^5 + C_6^3 .C_5^3 + C_6^5 .C_5^1 = 6 + 200 + 30 = 236.$

$\Rightarrow |\Omega_A| = 3!.C_6^2 C_4^2 .1 = 540.$

Bước 3: Tính xác suất $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{236}{462} = \frac{118}{231}$.

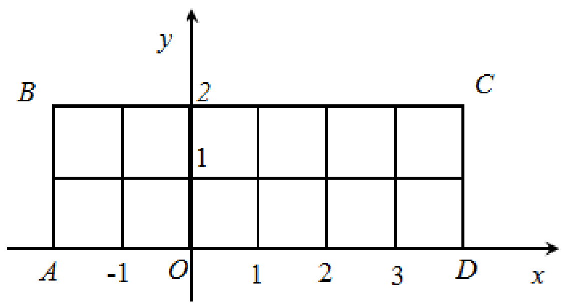
STUDY TIP

Giải thích thực tế: Ta có thể đưa ra các trường hợp như vậy là vì ta có:
Để có được tổng là số lẻ thì ta phải có: lẻ + chẵn = lẻ.
TH1: 5 số chẵn cộng lại với nhau sẽ ra số chẵn. Do đó cộng với 1 lẻ thì ra số lẻ.
TH2: 3 lẻ = (1 lẻ + 1 lẻ) + 1 lẻ = 1 chẵn + 1 lẻ = 1 lẻ.
3 số chẵn cộng lại với nhau ra chẵn. Do đó cộng với 1 lẻ thì ra số lẻ.
…
$\Rightarrow$ số viên bi mang số lẻ phải là số lẻ.

Ví dụ 4. Trong hệ trục tọa độ Oxy cho $A(-2;0), B(-2;2), C(4;2), D(4;0)$. Chọn ngẫu nhiên một điểm có tọa độ $(x;y)$; (với x, y là các số nguyên) nằm trong hình chữ nhật $ABCD$ (kể cả các điểm nằm trên cạnh).
Gọi A là biến cố : “x, y đều chia hết cho 2”. Xác suất của biến cố A là

A. $\frac{7}{21}$. **B.** $\frac{13}{21}$. **C.** 1. **D.** $\frac{8}{21}$.

Lời giải



Ta có $\Omega = \{(x;y), -2 \le x \le 4, 0 \le y \le 2\}$, với $x, y \in \mathbb{Z}$.

Vậy $x \in \{-2;-1;;1;2;3;4\}$ và $y \in \{0;1;2\}$.

Suy ra $n(\Omega) = 7.3 = 21$ (mỗi điểm là một giao điểm trên hình).

Ta có A: “x, y đều chia hết cho 2”. Nên ta có $A = \{(x;y): x \in \{-2;0;2;4\}; y \in \{0;2\}\}$

Theo quy tắc nhân ta có $n(A) = 4.2 = 8 \Rightarrow n(A) = 8 \Rightarrow P(A) = \frac{8}{21}$

STUDY TIP

Với các bài toán có miền giới hạn nhỏ, ta nên liệt kê các phần tử ra tránh sử dụng miền sẽ nhầm lẫn số phần tử.

Ví dụ 5. Một người bỏ ngẫu nhiên 4 lá thư và 4 chiếc phong bì thư đã để sẵn địa chỉ. Xác suất để có ít nhất một lá thư bỏ đúng địa chỉ là.

A. $\frac{5}{8}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Gọi 4 lá thư lần lượt là $A,\ B,\ C,\ D$ và 4 phong bì thư có địa chỉ đúng với các lá thư trên lần lượt
là $1;2;3;4$

Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega)=4!=24$.

Gọi X là biến cố " có ít nhất một lá thư bỏ đúng địa chỉ".
Ta có các trường hợp sau:
***TH1:** Cả 4 lá thư đều bỏ đúng địa chỉ: Chỉ có một trường hợp duy nhất
***TH2:** Có đúng 2 lá thư bỏ đúng địa chỉ. Có 6 trường hợp xảy ra là: $A1-B2-C4-D3$; $A1-B4-C3-D2$; $A4-B2-C3-D1$; $A1-B3-C2-D4$; $A3-B2-C1-D4$; A3 hoặc $A2-B1-C3-D4$.
***TH3:** Có đúng 1 lá thư bỏ đúng địa chỉ: Chỉ có lá thư A bỏ đúng địa chỉ thì có 2 trường hợp $A1-B3-C4-D2$; $A1-B4-C2-D3$

Tương tự với lá thư B có 2 trường hợp.
Lá thư C chỉ có đúng 2 trường hợp.
Lá thư D chỉ có đúng 2 trường hợp.
Suy ra có 8 trường hợp chỉ có đúng 1 lá thư bỏ đúng địa chỉ.
Vậy số phần tử của biến cố X là $n(X)=1+6+8=15$

Nên $P(X)=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$.

STUDY TIP

Giải thích thực tế: có nhiều độc giả sẽ thêm trường hợp có 3 lá thư bỏ đúng địa chỉ, tuy nhiên như vậy là lặp lại trường hợp 4 lá thư bỏ đúng địa chỉ. Do đó nếu 3 lá thư đúng địa chỉ rồi thì lá thư cuối cùng cũng nghiễm nhiên đúng địa chỉ và trùng với TH1.

Ví dụ 1. Một hộp đựng 15 viên bi, trong đó có 7 biên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi (không kể thứ tự) ra khỏi hộp. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất 1 viên màu đỏ.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{418}{455}$. **C.** $\frac{1}{13}$. **D.** $\frac{12}{13}$.

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ 15 viên bi thì số cách chọn là $C_{15}^3=445$.

Gọi A là biến cố "trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất một viên màu đỏ". Số trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

***Trường hợp 1:** Lấy được 1 viên màu đỏ, số cách lấy là: $C_8^1.C_7^2$.

***Trường hợp 2:** Lấy được 2 viên màu đỏ, số cách lấy là: $C_8^2.C_7^1$.

***Trường hợp 3:** Lấy được 3 viên màu đỏ, số cách lấy là: C_8^3.

Số trường hợp thuận lợi cho biến cố A là $n(A)=C_8^1.C_7^2+C_8^2.C_7^1+C_8^3=420$

Vậy $P(A)=\frac{C_8^1.C_7^2+C_8^2.C_7^1+C_8^3}{C_{15}^3}=\frac{12}{13}$.

Bài toán 2: Tính xác suất sử dụng định nghĩa cổ điển bằng phương pháp gián tiếp.

Trong nhiều bài toán tính xác suất, việc tính số phần tử thuận lợi cho biến cố A trở nên khó khăn do có quá nhiều trường hợp, thì ta đi tìm số phần tử thuận lợi cho biến cố đối của biến cố A. Sau đó lấy số phần tử không gian mẫu trừ đi kết quả vừa tìm được thì ta có số phần tử thuận lợi cho biến cố A.

Ta sẽ sử dụng bài toán ở ví dụ 6 như sau:

Ví dụ 2. Một hộp đựng 15 viên bi, trong đó có 7 biên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi (không kể thứ tự) ra khỏi hộp. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất 1 viên màu đỏ.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{418}{455}$. **C.** $\frac{1}{13}$. **D.** $\frac{12}{13}$.

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi từ 15 viên bi thì số cách chọn là $C_{15}^{3}=445$.

Gọi A là biến cố "trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất một viên màu đỏ" thì là biến cố $\overline{A}$ " cả ba viên bi lấy ra đều không có màu đỏ" (tức là lấy ra cả ba viên bi đều màu xanh"

Số cách chọn ra 3 viên bi mà 3 viên bi đó đều màu xanh là $C_7^3=35 \Rightarrow n\left(\overline{A}\right)=35$

$\Rightarrow$ Số cách chọn ra 3 viên bi mà trong đó có ít nhất một viên bi màu đỏ là $455-35=420$ cách

$\Rightarrow n\left(A\right)=420$

$\Rightarrow P\left(A\right)=\frac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\frac{420}{455}=\frac{12}{13}$

STUDY TIP

Giải thích thực tế: Dấu hiệu nhận biết các bài toán thực tế chọn đồ vật mà sử dụng cách tính gián tiếp đó là câu hỏi xuất hiện từ "có ít nhất …" thì thường ta sẽ giải quyết theo cách gián tiếp đó là tìm số cách chọn sao cho "không xuất hiện…" Ta sẽ tìm hiểu kĩ hơn ở ví dụ 8.

Ví dụ 3. Một hộp quà đựng 16 dây buộc tóc cùng chất liệu, cùng kiểu dáng nhưng khác nhau về màu sắc. Cụ thể trong hộp có 8 dây xanh, 5 dây đỏ, và 3 dây vàng. Bạn An được chọn ngẫu nhiên 6 dây từ hộp quà để làm phần thưởng cho mình. Tính xác suất để trong 6 dây bạn An chọn có ít nhất 1 dây vàng và không quá 4 dây đỏ.

A. $\frac{8005}{8008}$. **B.** $\frac{11}{14}$. **C.** $\frac{6289}{8008}$. **D.** $\frac{1719}{8008}$.

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên 6 dây từ 16 dây thì số cách chọn là $n\left(\Omega\right)=C_{16}^{6}=8008$

Gọi A là biến cố " 6 dây bạn An chọn có ít nhất 1 dây vàng và không quá 4 dây đỏ".

Do đó nếu tính trực tiếp sẽ có quá nhiều trường hợp, và từ STUDY TIP ở ví dụ 7, ta sẽ sử dụng biến cố đối để giải quyết bài toán:

Trường hợp 1: Không có dây nào vàng, số cách lấy là: C_{13}^{6}.

Trường hợp 2: Có 1 dây vàng và 5 dây đỏ, số cách lấy là: $C_3^1.C_5^5$.

Suy ra $n\left(A\right)=C_{16}^{6}-C_{13}^{6}-C_3^1.C_5^5=6289$

Nên $P\left(A\right)=\frac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\frac{C_{16}^{6}-C_{13}^{6}-C_3^1.C_5^5}{C_{16}^{6}}=\frac{6289}{8008}$.

Ví dụ 4. Một trường THPT có 18 học sinh giỏi toàn diện, trong đó có 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Chọn ngẫu nhiên 8 học sinh từ 18 học sinh trên để đi dự trại hè. Tính xác suất để mỗi khối có ít nhất 1 học sinh được chọn.

A. $\frac{212}{221}$. **B.** $\frac{9}{221}$. **C.** $\frac{59}{1326}$. **D.** $\frac{1267}{1326}$.

Lời giải

Chọn 8 học sinh bất kì trong 18 học sinh thì số cách chọn là $n(\Omega)=C_{18}^{8}$ cách.

Tương tự với dấu hiệu mà STUDY TIP đưa ra thì ta tìm số trường hợp thuận lợi cho biến cố đối của biến cố cần tìm.

Chọn 8 học sinh mà không có khối 10, có C_{13}^{8} cách.

Chọn 8 học sinh mà không có khối 11, có C_{12}^{8} cách.

Chọn 8 học sinh mà không có khối 12, có C_{11}^{8} cách.

Gọi A là biến cố " 8 học sinh được chọn, mỗi khối có ít nhất 1 học sinh". Số trường hợp thuận lợi cho A là $n(A)=C_{18}^{8}-\left(C_{13}^{8}+C_{12}^{8}+C_{11}^{8}\right)=41811$

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{41811}{C_{18}^{8}}=\frac{1267}{1326}$.

Ví dụ 5. Xét các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ các số 1, 3, 5, 7, 9. Tính xác suất để tìm được một số không bắt đầu bởi 135.

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{1}{60}$. **C.** $\frac{59}{6}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Số phần tử không gian mẫu là: $n(\Omega)=5!$.

Gọi A là biến cố "số tìm được không bắt đầu bởi 135".

Thì biến cố $\overline{A}$ là biến cố "số tìm được bắt đầu bởi 135"

Buộc các số 135 lại thì ta còn 3 phần tử. Số các số tạo thành thỏa mãn số 135 đứng đầu là $1.2.1=2$ cách $\Rightarrow n(A)=120-2=118$ cách

Nên $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{118}{120}=\frac{59}{60}$

STUDY TIP

Phương pháp "buộc" các phần tử được giới thiệu kĩ ở phần quy tắc đếm, được áp dụng khi các phần tử có điều kiện đứng liền kề nhau.

DẠNG 2. SỬ DỤNG QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

Bước 1: Xác định biến cố của các xác suất, có thể gọi tên các biến cố $A;B;C;D$ để biểu diễn.

Bước 2: Tìm mối quan hệ giữa các biến cố vừa đặt tên, biểu diễn biến cố trung gian và quan trọng nhất là biến cố đề bài đang yêu cầu tính xác suất thông qua các biến cố ở bước 1.

Bước 3: Sử dụng các mối quan hệ vừa xác định ở bước 2 để chọn công thức cộng hay công thức nhân phù hợp.