Câu 33. Một đoàn tàu có bốn toa đỗ ở sân ga. Có bốn hành khách bước lên tàu. Số trường hợp có thể xảy ra về cách chọn toa của bốn khách là:

A. 24. **B.** 256. **C.** 232. **D.** 1.

Câu 34. Trong một túi đựng 10 viên bi đỏ, 20 viên bi xanh, 15 viên bi vàng. Các viên bi có cùng kích cỡ. Số cách lấy ra 5 viên bi và sắp xếp chúng vào 5 ô sao cho 5 ô bi đó có ít nhất một viên bi đỏ.

A. 146611080. **B.** 38955840. **C.** 897127. **D.** 107655240.

Câu 35. Một bộ bài có 52 lá, có 4 loại: cơ, rô, chuồn, bích mỗi loại có 13 lá. Muốn lấy ra 8 lá bài phải có đúng 1 lá cơ, đúng 3 lá rô và không quá 2 lá bích. Hỏi có mấy cách chọn?

A. 39102206. **B.** 22620312. **C.** 36443836. **D.** 16481894.

Câu 36. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số trong đó các chữ số cách đều chữ số đứng giữa thì giống nhau?

A. 900. **B.** 9000. **C.** 90000. **D.** 27216.

Câu 37. Một lớp có n học sinh ($n>3$). Thầy chủ nhiệm cần chọn ra một nhóm và cần cử ra một học sinh làm nhóm trưởng. Số học sinh trong mỗi nhóm phải lớn hơn 1 và nhỏ hơn n. Gọi T là số cách chọn, lúc này:

A. $T=\sum_{k=2}^{n-1} kC_n^k$. **B.** $T=n\left(2^{n-1}-1\right)$. **C.** $T=n2^{n-1}$. **D.** $T=\sum_{k=1}^{n} kC_n^k$.

Câu 38. Trong một căn phòng có 36 người trong đó có 25 người họ Nguyễn, 11 người họ Trần. Trong số những người họ Nguyễn có 8 cặp là anh em ruột (anh trai và em gái), 9 người còn lại (gồm 4 nam và 5 nữ) không có quan hệ họ hàng với nhau. Trong 11 người họ Trần, có 3 cặp là anh em ruột (anh trai và em gái), 5 người còn lại (gồm 2 nam và 3 nữ) không có quan hệ họ hàng với nhau. Chọn ngẫu nhiên 2 người.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai người cùng họ và khác giới tính?

A. 156. **B.** 30. **C.** 186. **D.** 126.

b) Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai người sao cho không có cặp anh em ruột nào?

A. 619. **B.** 630. **C.** 11. **D.** 25.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Đáp án A.

a) Bước 1: Chọn bạn nam có 17 cách. Bước 2: Chọn bạn nữ có 11 cách. Theo quy tắc nhân ta có $17.11=187$ cách

b) Số cách để chọn ra 1 bạn nam làm lớp trưởng là 17. Số cách để chọn ra 1 bạn nữ làm lớp trưởng là 11. Vậy có $11+17=28$ cách.

Câu 2. Đáp án C.

Đi từ A đến D có $4.2.3=24$ cách.

Đi từ D về B có $3.2=6$ cách.

Vậy đi từ A đến D rồi quay lại B có $6.24=144$ cách.

Câu 3. Đáp án B.

Gọi A là tập các học sinh khá môn Toán, B là tập các học sinh khá môn Ngữ Văn. Theo đề ta có: $|A|=25;|B|=24;|A\cap B|=10$.

Theo quy tắc tính số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn bất kì ta có: $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=25+24-10=39$

Vậy lớp học có $39+3=42$ học sinh.

Câu 4. Đáp án A.

Kí hiệu A, B, C tương ứng là tập hợp các thí sinh đạt điểm giỏi ở ít nhất một trong ba môn là Toán, Vật lý, Hóa học. $|A|=51; |B|=73; |C|=64; |A\cap B|=32; |B\cap C|=45; |A\cap C|=21; |A\cap B\cap C|=10.$

Lúc này ta có $A\cup B\cup C$ là tập hợp các học sinh đạt điểm giỏi ở ít nhất một trong ba môn là Toán, Vật lý, Hóa học. Ta có:

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|=51+73+64-32-45-21+10=100.$

Vậy số thí sinh dự tuyển vào công ty VEDU là $100+767=867$.

Câu 5. Đáp án B.

Theo quy tắc tính số phần tử của ba tập hợp hữu hạn bất kì, ta có số người xem ít nhất một bộ phim là $28+26+14-8-4-3+2=55$ người.

Vậy số người không xem bất cứ bộ phim nào là $100-55=45$ người**.**

Câu 6. Đáp án B.

Chọn 1 vở kịch có 2 cách. Chọn 1 điệu múa có 3 cách. Chọn 1 bài hát có 6 cách.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $2.3.6=36$ cách**.**

Câu 7. Đáp án A.

Nhận xét: Bài toán là sự kết hợp giữa quy tắc cộng và quy tắc nhân.

Do hai viên bi cùng màu không được ớ cạnh nhau nên ta có trường hợp sau:

Phương án 1: Các bi đỏ *ở* vị trí lẻ. Có 8 cách chọn bi đỏ ở vị trí số 1.

Có 7 cách chọn bi đỏ ờ vị trí số 3.

….

Có 1 cách chọn bi đỏ ờ vị trí số 15.

Suy ra có $8.7.6...3.2.1$ cách xếp 8 bi đỏ.Tương tự có $8.7.6...3.2.1$ cách xếp 8 bi xanh.

Vậy có $(8.7...3.2.1)^2$ cách xếp.

Phương án 2: Các bi đỏ *ở* vị trí chẵn ta cũng có cách xếp tương tự.

Vậy theo quy tắc cộng ta có $(8!)^2+(8!)^2=3251404800$.

Câu 8. Đáp án C.

Cách 1:

Bước 1: Học sinh đầu tiên, giả sử đó là học sinh lớp A có 10 cách chọn ghế.

Bước 2: Có 5 cách chọn ra một học sinh lớp B ngồi vào ghế đối diện.

Bước 3: Có 8 cách chọn ra một học sinh lớp A vào ghế tiếp theo.

Bước 4: Có 4 cách chọn ra học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Bước 5: Có 6 cách chọn ra học sinh lớp A.

Bước 6: Có 3 cách chọn học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Bước 7: Có 4 cách chọn học sinh lớp A vào ghế tiếp.

Bước 8: Có 2 cách chọn học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Bước 9: Có 2 cách chọn học sinh lớp A vào ghế kế tiếp.

Bước 10: Có 1 cách chọn học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Theo quy tắc nhân thì có $10.5.8.4.6.3.4.2.2.1=(5!)^2.2^5=460800$ cách.

Cách 2:

Vì 2 học sinh ngồi đối diện nhau thì khác lớp nên mỗi cặp ghế đối diện nhau sẽ được xếp bởi 1 học sinh lớp A và 1 học sinh lớp B.

Số cách xếp 5 học sinh lớp A vào 5 cặp ghế là $5!$ cách. Số cách xếp 5 học sinh lớp B vào 5 cặp ghế là $5!$ cách. Số cách xếp chỗ ở mỗi cặp ghế là 2 cách.

Theo quy tắc nhân thì có $(5!)^2.2^5 = 460800$ cách.

Câu 9. Đáp án A.

Bước 1: Có 20 cách chọn người đàn ông đầu tiên.

Bước 2: Sau đó chỉ có 1 cách chọn vợ của anh ta.

Bước 3: Có 19 cách chọn người đàn ông tiếp theo.

Bước 4: Sau đó chỉ có 1 cách chọn vợ của anh ta.

Vậy theo quy tắc nhân thì có $20.1.19.1 = 380$ cách**.**

Câu 10. Đáp án A.

TH1: Số có 10 chữ số 5 : chỉ có 1 số duy nhất.

TH2: Số có 9 chữ số 5 và 1 chữ số 2.

Xếp 9 số 5 thành hàng có 1 cách. Khi đó tạo nên 10 "vách ngăn" để xếp số 2.

Xếp số 2 có C_{10}^1 cách. Vậy có C_{10}^1 số.

TH3: Số có 8 chữ số 5 và 2 chữ số 2.

Tương tự sử dụng phương pháp tạo vách ngăn như TH2 thì tìm được C_9^2 số.

TH4: Số có 7 chữ số 5 và 3 chữ số 2 : có C_8^3 số.

TH5: Số có 6 chữ số 5 và 4 chữ số 2 : có C_7^4 số.

TH6: Có 5 chữ số 5 và 5 chữ số 2 : có C_6^5 số.

Vậy theo quy tắc cộng thì có $1 + C_{10}^1 + C_9^2 + C^3 + C_7^4 + C_6^5 = 144$ số.

Câu 11. Đáp án A.

Ta sử dụng phương pháp tạo "vách ngăn" được giới thiệu ở phần lí thuyết.

Bước 1: Xếp vị trí cho 6 học sinh có $6!$ cách.

Bước 2: Do đề yêu cầu mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh nên ta chỉ tính 5 vách ngăn được tạo ra giữa 6 học sinh. Số cách xếp 3 thầy giáo vào 5 vị trí là A_5^3 cách.

Vậy theo quy tắc nhân thì có $6!.A_5^3 = 43200$ cách**.**

Câu 12. Đáp án C.

Do ở đây việc tìm trực tiếp sẽ có nhiều trường hợp nên ta sẽ giải bài toán bằng cách gián tiếp. Ta sẽ đi tìm bài toán đối.

Ta đi tìm số cách chọn ra 5 bạn mà trong đó có cả hai bạn Thùy và Thiện.

Bước 1: Chọn nhóm 3 em trong 13 em, trừ Thùy và Thiện thì có $C_{13}^3 = 286$ cách.

Bước 2: Ghép 2 em Thùy và Thiện có 1 cách.

Vậy theo quy tắc nhân thì có 286 cách chọn 5 em trong đó cả Thùy hoặc Thiện đều được chọn.

- Chọn 5 em bất kì trong số 15 em có $C_{15}^5 = 3003$ cách. Vậy theo yêu cầu đề bài thì có tất cả $3003 - 286 = 2717$ cách chọn mà trong đó có ít nhất một trong hai em Thùy và Thiện không được chọn.

Câu 13. Đáp án A.

Do ở đây xuất hiện dấu hiệu cúa phương pháp "buộc" phần từ đó là các phần tử được xếp cạnh nhau nên ta áp dụng như sau:

Bước 1: Buộc 3 em nữ thành một buộc thì số cách đổi vị trí các em nữ trong buộc đó là $3!$ cách.

Bước 2: Sau khi buộc 3 em nữ thì ta chỉ còn 8 phần tử. Số cách xếp 8 phần tử này là $8!$ cách.

Theo quy tắc nhân thì có $3!.8! = 241920$ cách.

Câu 14. Đáp án D.

Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số cần lập. Theo giả thiết $a_3 + a_4 + a_5 = 8$. Suy ra $a_3; a_4; a_5 \in \{1;2;5\}$ hoặc $a_3; a_4; a_5 \in \{1;3;4\}$

TH1: $a_3; a_4; a_5 \in \{1;2;5\}$

Có $3!$ cách chọn $\overline{a_3a_4a_5}$. Xếp $a_1; a_2; a_6$ có A_6^3 cách. Vậy theo quy tắc nhân thì có $3!A_6^3 = 720$ số.

TH2: $a_3; a_4; a_5 \in \{1;3;4\}$

Tương tự ta cũng tìm được 720 số.

Vậy có tất cả $720 + 720 = 1440$ số.

Câu 15. Đáp án C.

Số tam giác có 3 đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$ là C_{2n}^3.

Ứng với hai đường chéo đi qua tâm của đa giác $A_1A_2...A_{2n}$ cho tương ứng một hình chữ nhật có 4 đỉnh là 4 điểm trong $2n$ điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$ và ngược lại mỗi hình chữ nhật như vậy sẽ cho ra 2 đường chéo đi qua tâm O của đa giác.

Mà số đường chéo đi qua tâm của đa giác đều $2n$ đỉnh là n nên số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong $2n$ điểm là C_n^2

Theo đề bài ta có: $C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \dfrac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} = \dfrac{20n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n = 8$.

Câu 16. Đáp án C.

Số cách chọn ra 3 màu trong 5 màu mà không có màu nào trùng nhau là $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!.2!}$.

Câu 17. Đáp án B.

Bước 1: Xếp chỗ cho hai ông bà An có 2 cách.

Bước 2: xếp chỗ cho 6 người con có $6!$ cách.

Theo quy tắc nhân thì có $2.6! = 1440$ cách

Câu 18. Đáp án A.

Xét các trường hợp:

THI: Đề gồm 2 câu dễ, 2 câu khó, 1 câu trung bình thì có $C_{15}^2C_5^2C_{10}^1 = 10500$ đề.

TH2: Đề gồm 2 câu dễ, 1 câu khó và 2 câu trung bình thì có $C_{15}^2C_5^1C_{10}^2 = 23625$ đề.

TH3: Đề gồm 3 câu dễ, 1 câu khó và 1 câu trung bình thì có $C_{15}^3C_5^1C_{10}^1 = 22750$ đề.

Theo quy tắc cộng thì có $10500 + 23625 + 22750 = 56875$ đề.

Câu 19. Đáp án A.

Theo quy tắc nhân ta thực hiện từng bước. Chữ cái đầu tiên có 24 cách chọn. Chữ cái tiếp theo cũng có 24 cách chọn.

Chữ số đầu tiên có 9 cách chọn

Chữ số thứ hai có 10 cách chọn.

Chữ số thứ ba có 10 cách chọn

Chữ số thứ bốn có 10 cách chọn

Chữ số thứ năm có 10 cách chọn

Chữ số thứ sáu có 10 cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $24.24.9.10^5 = 5184.10^5$ là số ô tô nhiều nhất có thể đăng ký.

Câu 20. Đáp án A.

Có $C_4^2 = 6$ cách chọn 2 trong 4 tiêu chuẩn.

Với hai tiêu chuẩn "chất liệu, cỡ" thì có $1.2 = 2$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Với hai tiêu chuẩn "chất liệu, màu" thì có $1.3 = 3$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Với hai tiêu chuẩn "chất liệu, dạng" thì có $1.3 = 3$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Với hai tiêu chuẩn "cỡ, dạng" thì có $2.3 = 6$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Với hai tiêu chuẩn "cỡ, màu" thì có $3.3 = 9$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Tóm lại có $2 + 3 + 3 + 6 + 6 + 9 = 29$ miếng.

Câu 21. Đáp án A.

Ta thấy điều kiện xếp là hai bi cùng màu không nằm cạnh nhau nên ta phải xếp xen kẽ các viên bi.

Có 2 cách chọn viên bi đầu tiên (có thể là đỏ hoặc trắng). Mỗi cách chọn có $5!$ cách xếp 5 bi đỏ và có $5!$ cách xếp 5 bi trắng. Vậy có $2.5!.5! = 28800$ cách xếp.

Nhiều bạn có lời giải sai như sau: Ở đây ta áp dụng quy tắc "vách ngăn" để giải quyết bài toán. Số cách xếp 5 bi đỏ là có $5!$ cách. 5 bi đỏ tạo ra 6 vách ngăn để xếp 5 bi trắng vào. Số cách xếp 5 bi trắng là A_6^5 cách.

Vậy số cách xếp các viên bi là $5!.A_6^5 = 86400$. Từ đây chọn B là sai. Do nếu theo quy tắc vách ngăn ở đây có 6 vách mà có 5 bi, tức là có thể có vách ngăn trống khiến cho 2 viên bi cùng màu cạnh nhau.

Câu 22. Đáp án A.

Gọi số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{abcde}$.

TH1: Nếu $a = 1$ khi đó có $A_7^4 = 840$ cách chọn 4 chữ số xếp vào b, c, d, e.

TH2: Nếu $a \neq 1$, khi đó: Có 6 cách chọn a. Có 2 cách xếp chữ số 1 vào số cần tạo ở vị trí b hoặc c. Các chữ số còn lại trong số cần tạo có A_6^3 cách chọn. Như vậy trường hợp này có $2.6.A_6^3 = 1440$ số.

Vậy có tất cả $840 + 1440 = 2280$ số.

Chú ý: Nhiều độc giả quên mất $a \neq 0$ nên tính cả $a = 0$ nên dẫn đến ra D là sai.

Câu 23. Đáp án B.

Các trường hợp lấy được 4 bi trong đó số bi đỏ lớn hơn số bi vàng như sau:

***TH1:** Số bi lấy được không có bi vàng:

- lấy 4 bi đỏ: Có C_5^4 cách

- Lấy 1 bi đỏ, 3 bi xanh có $C_5^1C_4^3$ cách.

- Lấy 2 bi đỏ, 2 bi xanh có $C_5^2C_4^2$ cách.

- Lấy 3 bi đỏ, 1 bi xanh có $C_5^3C_4^1$ cách.

***TH2:** 4 bi lấy được có đúng 1 bi vàng

- Lấy 2 bi đỏ, 1 bi vàng, 1 bi xanh có $C_5^2C_3^1C_4^1$ cách.

- Lấy 3 bi đỏ, 1 bi vàng có $C_5^3C_3^1$ cách.

Vậy số cách là: $C_5^4+C_5^1C_4^3+C_5^2C_4^2+C_5^3C_4^1+C_5^2C_3^1C_4^1+C_5^3C_3^1=275$

Câu 24. Đáp án C.

Ta có 2 trường hợp:

TH1:tam giác gồm hai đỉnh thuộc d_1 và một đỉnh thuộc d_2**.** Số cách chọn bộ hai điểm trong 10 điểm thuộc d_1 là C_{10}^2. Số cách chọn một điểm trong 15 điểm thuộc d_2 là C_{15}^1.Theo quy tắc nhân thì có $C_{10}^2C_{15}^1$ tam giác.

TH2: Gồm một đỉnh thuộc d_1 và hai đỉnh thuộc d_2. Tương tự ta tìm được $C_{10}^1C_{15}^2$ tam giác thỏa mãn.

Vậy theo quy tắc cộng thì có tất cả $C_{10}^2C_{15}^1+C_{10}^1C_{15}^2$ tam giác.

Câu 25. Đáp án B.

Có C_7^3 cách để xếp 3 chữ số 2. Khi đó có A_6^4 cách xếp 4 chữ số còn lại. Vậy có $C_7^3A_6^4=12600$ số.

Câu 26. Đáp án A.

Cách 1: Chú ý: *Bài toán không nói vectơ có khác vectơ không nên ta vẫn xét cả vectơ không ở đây. Và 2 điểm khác nhau tạo nên 2 vectơ có điểm đầu và điểm cuối hoán vị cho nhau nên ở đây việc chọn vectơ sẽ sử dụng chỉnh hợp chứ không phải tổ hợp.*

TH1: Có 2010 vectơ không được tạo thành.

TH2: Các vectơ khác vectơ không

Mỗi vectơ thỏa mãn yêu cầu bài toán ứng với một chỉnh hợp chập 2 của 2010 , nên số vectơ cần tìm là A_{2010}^2. Theo quy tắc cộng thì có $A_{2010}^2+2010=4040100$ vectơ tạo thành.

Cách 2*:* Có 2010 cách chọn điểm đầu. có 2010 cách chọn điểm cuối. $\Rightarrow$ Có $2010^2=4040100$ vectơ.

Câu 27. Đáp án A.

Tương tự Câu 24 ta có số tam giác được tạo thành theo n là

$$C_{10}^1C_n^2+C_{10}^2C_n^1=2800 \Leftrightarrow 10\frac{n(n-1)}{2}+45n=2800 \Leftrightarrow n^2+8n-560=0 \Leftrightarrow n=20.$$

Câu 28. Đáp án D.

*Gọi n điểm đã cho là $A_1,A_2,...,A_n$. Xét một điểm cố định, khi đó có C_{n-1}^2 đường thẳng được xác định bởi 2 trong $n-1$ điểm còn lại nên sẽ có C_{n-1}^2 đường thẳng vuông góc đi qua điểm cố định đó.

*Do đó có tất cả $nC_{n-1}^2 = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ đường thẳng vuông góc nên có $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}$ giao điểm (tính cả những giao điểm trùng nhau)

*Ta chia các điểm trùng nhau thành 3 loại

- Qua một điểm có $C_{n-1}^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ đường thẳng vuông góc nên ta phải trừ đi $n\left(C_{n-1}^2 - 1\right)$ điểm.

- Qua ba điểm A_1, A_2, A_3 của 1 tam giác có 3 đường thẳng cùng vuông góc với A_4A_5 và 3 đường thẳng này song song với nhau nên ta mất 3 giao điểm, do đó trong TH này ta phải loại đi $3C_n^3$

- Trong mỗi tam giác thì ba đường cao chỉ có một giao điểm, nên ta mất 2 điểm cho mỗi tam giác, do đó trường hợp này ta phải trừ đi $2C_n^3$.

Vậy số giao điểm nhiều nhất có được là: $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}} - \left[n\left(C_{n-1}^2 - 1\right) + 5C_n^3\right]$.

Câu 29. Đáp án A.

Do các thành viên cùng câu lạc bộ thì ngồi cạnh nhau nên ta sử dụng phương pháp "buộc" các phần tưt để giải quyết bài toán.

Lúc này ta có 3 phần tử đó là 3 câu lạc bộ. Theo công thức hoán vị vòng quanh được giới thiệu ở phần ví dụ thì ta có $2!$ cách xếp 3 câu lạc bộ vào bàn tròn. Với mỗi cách xếp thì có:

$3!$ cách xếp các thành viên CLB Máu Sư phạm.

$5!$ cách xếp các thành viên CLB Truyền thông.

$7!$ cách xếp các thành viên CLB Kỹ năng.

Vậy theo quy tắc nhân thì có tất cả: $2!.3!.5!.7! = 7257600$ cách xếp.

Câu 30. Đáp án A.

Cách 1: Số cách lấy 3 bông hồng bất kì: $C_{25}^3 = 2300$

Số cách lấy 3 bông hòng chỉ có một màu: $C_7^3 + C_8^3 + C_{10}^3 = 211$

Số cách lấy 3 bông hồng có đúng hai màu: $C_{15}^3 + C_{17}^3 + C_{18}^3 - 2\left(C_7^3 + C_8^3 + C_{10}^3\right) = 1529$

Vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2300 - 211 - 1529 = 560$.

Cách 2: Có 7 cách chọn bông hồng màu đỏ. Có 8 cách chọn bông hồng màu vàng. Có 10 cách chọn bông hồng màu trắng. $\Rightarrow$ Có $7.8.10 = 560$ cách.

Câu 31. Đáp án B.

Áp dụng quy tắc "buộc" các phần tử ta có $2!$ cách xếp hai vợ chồng. Sau khi "buộc" hai vợ chồng lại thì ta có tất cả 5 phần tử. Theo công thức hoán vị vòng quanh thì số cách xếp 5 phần tử quanh bàn tròn là $4!$.

Vậy theo quy tắc nhân thì có $2!.4! = 48$.

Câu 32. Đáp án A.

Ta lần lượt đánh số các ghế từ 1 đến 10.

- Nếu người chồng ở vị trí số 1 thì có 9 cách xếp người vợ.
- Nếu người chồng ở vị trí số 2 thì có 8 cách xếp người vợ.
- ….
- Nếu người chồng ở vị trí số 9 thì có 1 cách xếp người vợ.

Vậy có tất cả $9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$ cách.

Câu 33. Đáp án B.

Chọn toa cho vị khách thứ nhất có 4 cách. Chọn toa cho vị khách thứ hai có 4 cách.

Chọn toa cho vị khách thứ ba có 4 cách. Chọn toa cho vị khách thứ tư có 4 cách.

Theo quy tắc nhân thì có $4^4=256$ cách chọn toa cho bốn khách.

Câu 34. Đáp án D.

Bước 1: Chọn bi

- Số cách chọn ra 5 viên bi bất kì là C_{45}^5 cách.
- Số cách chọn ra 5 viên bi trong đó không có viên bi đỏ nào là C_{35}^5 cách.

- Số cách chọn ra 5 viên bi trong đó có ít nhất một viên bi màu đỏ là $C_{45}^5-C_{35}^5$ cách.

Bước 2: Sắp xếp các viên bi.

Số cách xếp 5 viên bi vào 5 ô là $5!$

Theo quy tắc nhân thì có $5!.(C_{45}^5-C_{35}^5)=107655240$.

Câu 35. Đáp án A.

Xét các trường hợp sau:

- Lấy được 1 lá cờ, 3 lá rô và 4 chuồn thì có $C_3^1C_{13}^3C_{13}^1C_{13}^3=22620312$ cách lấy.

Theo quy tắc cộng thì có tất cả $22620312+13823524+2658370=39102206$ cách lấy.

Câu 36. Đáp án A.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcab}$.

Có 9 cách chọn a.

Có 10 cách chọn b.

Có 10 cách chọn c.

Vậy có tất cả $9.10.10=900$ số.

Câu 37. Đáp án A.

Gọi A_k là phương án: Chọn nhóm có k học sinh và chỉ định nhóm trưởng của nhóm.

Thầy chủ nhiệm có các phương án $A_2,A_3,A_4,...,A_{n-1}$. Ta tính xem có bao nhiêu cách thực hiện.

Phương án A_k có hai công đoạn:

- Công đoạn 1: Chọn k học sinh có C_n^k cách chọn.

- Công đoạn 2: Chỉ định nhóm trưởng: có k cách chọn.

Theo quy tắc nhân thì phương án A_k có kC_n^k cách thực hiện.

Vậy theo quy tắc cộng thì $T=\sum_{k=2}^{n-1}kC_n^k$.

Câu 38.

a) Đáp án C.

* Có $8+4=12$ nam họ Nguyễn và có $8+5=13$ nữ họ Nguyễn. Vậy có $12.13=156$ cặp cùng họ Nguyễn mà khắc giới tính.

* Tương tự có $5.6=30$ cách chọ cặp cùng họ Trần mà khác giới tính.
Vậy có $156+30=186$ cách chọn hai người cùng họ và khác giới tính.

b) Đáp án A.

Ta có $8+3=11$ cặp anh em trong đó 8 cặp họ Nguyễn và 3 cặp họ Trần.

Chọn bất kì 2 người trong số 36 người thì có $C_{36}^{2}=630$ cách chọn.

Vậy có tất cả $630-11=619$ cách chọn các cặp sao cho không có cặp anh em nào.

NHỊ THỨC NEWTON

A. LÝ THUYẾT

1. Công thức nhị thức Newton

Khai triển $(a+b)$ được cho bởi công thức sau:

Định lý 1

Với a, b là các số thực và n là sô nguyên dương, ta có

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+...+C_n^ka^{n-k}b^k+...+C_n^nb^n.(1)$$

Quy ước $a^0=b^0=1$

Công thức trên được gọi là công thức nhị thức Newton (viết tắt là Nhị thức Newton).

STUDY TIP

Trong biểu thức ở VP của công thức (1)

a) Số các hạng tử là $n+1$.

b) Số các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đén 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n, nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n.

c) Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.

Hệ quả

Với $a=b=1$, thì ta có $2^n=C_n^0+C_n^1+...+C_n^n$.

Với $a=1; b=-1$, ta có $0=C_n^0-C_n^1+...+(-1)^kC_n^k+...+(-1)^nC_n^n$

Các dạng khai triển cơ bản nhị thức Newton

$$(x+1)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+...+C_n^kx^{n-k}+...+C_n^{n-1}x+C_n^n$$

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^kx^k+...+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$$

$$(x-1)^n=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-...+(-1)^kC_n^kx^k+...+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}x^{n-1}+(-1)^nC_n^nx^n$$

$$C_n^k=C_n^{n-k}$$

$$C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1},\ (n\ge 1)$$

$$k.C_n^k=\frac{k.n!}{(n-k)!k!}=\frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}=nC_{n-1}^{k-1}$$

$$\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{k.n!}{(k+1)(n-k)!k!}=\frac{n(n-1)!}{(n+1)(n-k)!(k+1)!}=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$$

2. Tam giác Pascal.

n = 0   1
n = 1   1   1
n = 2   1   2   1
n = 3   1   3   3   1
n = 4   1   4   6   4   1
n = 5   1   5   10   10   5   1

Tam giác Pascal được thiết lập theo quy luật sau

- Đỉnh được ghi số 1. Tiếp theo là hàng thứ nhất ghi hai số 1.
- Nếu biết hàng thứ n $(n \geq 1)$ thì hàng thứ n+1tiếp theo được thiết lập bằng cách cộng hai số liên tiếp của hàng thứ n rồi viết kết quả xuống hàng dưới ở vị trí giữa hai số này. Sau đó viết số 1 ở đầu và cuối hàng.

Nhận xét: Xét hàng thứ nhất, ta có:

$1 = C_1^0,\ 1 = C_1^1$.

Ở hàng thứ 2, ta có

$1 = C_3^0,\ 2 = C_2^1,\ 1 = C_2^2$.

Ở hàng thứ 3, ta có

$1 = C_3^0,\ 3 = C_3^1, 3 = C_3^2,\ 1 = C_3^3$.

STUDY TIP

Các số ở hàng thứ n trong tam giác Pascal là dãy gồm $(n+1)$ số $C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2, ...,\ C_n^{n-1},\ C_n^n$.

B. Các dạng toán sử dụng công thức tổ hợp và nhị thức Newton

DẠNG 1. Xác định điều kiện của số hạng thỏa mãn yêu cầu cho trước

Phương pháp chung:

- Xác định số hạng tổng quát của khai triển $T^{k+1}C_n^k a^{n-k} b^k$ (số hạng thứ $k+1$).
- Từ T^{k+1} kết hợp với yêu cầu bài toán ta thiết lập một phương trình (thông thường theo biến k).
- Giải phương trình để tìm kết quả.

Ví dụ 1. Trong khai triển $\left(a^2 - \frac{1}{b}\right)$, số hạng thứ 5 là

A. $-35a^6b^{-4}$. **B.** $35a^6b^{-4}$. **C.** $-24a^4b^{-5}$. **D.** $24a^4b^{-5}$

Lời giải

Đáp án B.

Theo công thức tổng quát ở lý thuyết thì ta có số hạng thứ 5 là

$$C_7^4\left(a^2\right)^3\left(-\frac{1}{b}\right)^4 = 35a^6b^{-4}.$$

Ví dụ 2. Trong khai triển $\left(2\sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right), (x > 0)$ số hạng không chứa x sau khi khai triển là

A. 4354560. **B.** 13440. **C.** 60466176. **D.** 20736.

Lời giải

Đáp án A.

Ta có $\left(2\sqrt[3]{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{10}=\left(2.x^{\frac{1}{3}}-3.x^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$

Từ lý thuyết ở trên ta có số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là

$C_{10}^{k}.2^{10-k}.3^{k}.x^{\frac{10-k}{3}}.x^{-\frac{k}{2}}=C_{10}^{k}.2^{10-k}.3^{k}.x^{\frac{20-5k}{6}}$. Theo yêu cầu đề bài ta có $20-5k=0\Leftrightarrow k=4$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $C_{10}^{4}.2^{6}.3^{4}=210.256.81=435460$.

STUDY TIP

Trong các bài toán tìm số hạng trong khi khai triển các nhị thức, ta chú ý các công thức sau

$$\left(x^{m}\right)^{n}=x^{m.n},\ x^{m}.x^{n}=x^{m+n}$$

$$\frac{x^{m}}{x^{n}}=x^{m-n},\ \sqrt[n]{x^{m}}=x^{\frac{m}{n}}$$

Cho bài toán:

Cho nhị thức $P=\left[a(x)+b(x)\right]^{n}$ tìm số hạng chứa x^{α} (không chứa x khi $\alpha=0$) trong khai triển đa thức P.

- Giải phương trình tổ hợp hoặc sử dụng công thức tính tổng để tìm n (nếu giả thuyết chưa cho n).
- Số hạng tổng quát trong khai triển $T_{k+1}=g(n,k).x^{f(n,k)}$.
- Theo đề thì $f(n,k)=\alpha\Rightarrow k=k_0$. Thay $k=k_0$ vào $g(n,k)$ thì ta có số hạng cần tìm.

Ví dụ 3. Cho n là số dương thỏa mãn $5C_{n}^{n-1}=C_{n}^{3}$. Số hạng chứa x^{5} trong khai triển nhị thức Newton $P=\left(\frac{nx^{2}}{14}-\frac{1}{x}\right)^{n}$ với $x\neq 0$ là

A. $-\frac{35}{16}$. **B.** $-\frac{16}{35}$. **C.** $-\frac{35}{16}x^{5}$. **D.** $-\frac{16}{35}x^{5}$.

Lời giải

Đáp án C.

Điều kiện $n\in\mathbb{N},\ n\geq 3$.

Ta có $5C_{n}^{n-1}=C_{n}^{3}\Leftrightarrow\frac{5.n!}{1!.(n-1)!}=\frac{n!}{3!.(n-3)!}\Leftrightarrow\frac{5}{(n-3)!(n-2)(n-1)}=\frac{1}{6.(n-3)!}$

$$\Leftrightarrow n^{2}-3n-28=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=7\,(TM)\\ n=-4\,(L)\end{array}\right.$$

Với $n=7$ ta có $P=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}\right)^7$

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1}=\frac{(-1)^k}{2^{7-k}}.C_7^k.x^{14-3k}$

Suy ra $14-3k=5 \Leftrightarrow k=3$

Vậy số hạng chứa x^5 trong khai triển là $T_4=-\frac{35}{16}x^5$.

STUDY TIP

Chú ý phân biệt giữa hệ số và số hạng.

Với $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^{g(k)}$; Số hạng chứa x^α tương ứng với $g(k)=\alpha$; giải phương trình ta tìm được k.

* Nếu $k\in\mathbb{N}$; $k\le n$ thì hệ số phải tìm là a_k.

* Nếu $k\notin\mathbb{N}$ hoặc $k>n$ thì trong khai triển không có số hạng chứa x^α, hệ số phải tìm bằng 0.

Ví dụ 4. Trong khai triển biểu thức $F=\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^9$ số hạng nguyên có giá trị lớn nhất là

A. 8. **B.** 4536. **C.** 4528. **D.** 4520.

Lời giải

Đáp án B.

Ta có số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_9^k\left(\sqrt{3}\right)^{9-k}\left(\sqrt[3]{2}\right)^k$

Ta thấy bậc hai của căn thức là 2 và 3 là hai số nguyên tố, do đó để T_{k+1} là một số nguyên thì $\begin{cases} k\in\mathbb{N} \\ 0\le k\le 9 \\ (9-k)\vdots 2 \\ k\vdots 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=3\Rightarrow T_4=C_9^3\left(\sqrt{3}\right)^6\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=4536 \\ k=9\Rightarrow T_{10}=C_9^9\left(\sqrt{3}\right)^0\left(\sqrt[3]{2}\right)^9=8 \end{array}\right.$

Vậy trong khai triển có hai số hạng nguyên là $T_4=4536$ và $T_{10}=8$.

Ví dụ 5. Tìm hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển đa thức $P(x)=(2x+1)^{13}=a_0x^{13}+a_1x^{12}+...+a^{13}$.

A. 8. **B.** 4536. **C.** 4528. **D.** 4520.

Lời giải

Đáp án A.

Ta có số hạng tổng quát sau khi khai triển nhị thức $(2x+1)^{13}$ là $a_n=C_{13}^n.2^{13-n}$.

$\Rightarrow a_{n-1}=C_{13}^{n-1}.2^{14-n}$, $(n=1,2,3,...,13)$

Xét bất phương trình với ẩn số n ta có $a_{n-1} \le a_n \Leftrightarrow C_{13}^{n-1}.2^{14-n} \le C_n^{13}.2^{13-n}$

$$\Leftrightarrow \frac{2.13!}{(n-1)!(14-n)!} \le \frac{13!}{n!(13-n)!} \Leftrightarrow \frac{2}{14-n} \le \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \le \frac{14}{3} \notin \mathbb{N}.$$

Do đó bất đẳng thức $a_{n-1} \le a_n$ đúng với $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ và dấu đẳng thức không không xảy ra.

Ta được $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ và $a_4 > a_5 > a_6 > ... > a_{13}$

Từ đây ta có hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển nhị thức là

$a_4 = C_{13}^4.2^9 = 366080.$

Phương pháp giải

Giả sử sau khi khai triển ta được đa thức $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

Xét các khả năng sau:

1. Nếu $a_k > 0 \forall k$ (trường hợp $a_k < 0 \forall k$ tương tự)

Ta xét bất phương trình $a_k \le a_{k+1}$, thông thường giải ra được nghiệm $k \le k_0 \in \mathbb{N}$. Do k nguyên nên $k = 0,1,...,k_0$. Từ đó suy ra bất phương trình $a_k > a_{k+1}$ có nghiệm $k > k_0$.

Chú ý rằng trong các bài toán về nhị thứ Newton thì phương trình $a_k = a_{k+1}$ là bậc nhất theo k nên có nhiều nhất một nghiệm và nếu có thì phương trình đó là $k = k_0$. Như vậy có hai khả năng xảy:

Nếu $a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = k_0$ thì ta có: $a_0 < a_1 < ... < a_{k_0-1} < a_{k_0} = a_{k_0+1} > a_{k_0+2} > ... > a_n$

Khi đó ta tìm được hai hệ số lớn nhất là $a_{k_0} = a_{k_0+1}$

Nếu phương trình $a_k = a_{k+1}$ vô nghiệm thì ta có:

$a_0 < a_1 < ... < a_{k_0-1} < a_{k_0} > a_{k_0+1} > a_{k_0+2} > ... > a_n$.

Khi đó ta có a_{k_0} là hệ số lớn nhất trong khai triển của nhị thức.

2. Nếu $a_{2k} > 0 \forall k$ và $a_{2k+1} < 0 \forall k$ (trường hợp $a_{2k} < 0 \forall k$ và $a_{2k+1} > 0 \forall k$ tương tự) thì khi đó bài toán trở thành tìm số lớn nhất trong các số a_{2k}. Ta cũng xét bất phương trình $a_{2k} \le a_{2k+2}$ rồi làm tương tự như phần 1.

STUDY TIP

Phương pháp tìm hệ số lớn nhất trong khai triển

+ Áp dụng khai triển $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

+ Xác định số hạng tổng quát $C_n^k a^{n-k} b^k$ suy ra hệ số tổng quát là một dãy số theo a_k.

+ Xét tính tăng giảm của a_k từ đó tìm được k tương ứng. Suy ra hệ số lớn nhất trong khai triển.

✹Đọc thêm

Một thuật toán khai triển nhanh tam thức Newton

Bài toán: khai triển tam thức Newton sau $(a+b+c)^n$

Lời giải tổng quát

Bước 1: Viết tam giác Pascal đến dòng thứ n, để có được hệ số của nhị thức Newton $(b+c)^n$.

Bước 2: Ở các đầu dòng ta viết các đơn thức là khai triển nhị thức Newton $(a+1)^n$.

Bước 3: Nhân lần lượt các đơn thức ở đầu dòng mỗi cột với các đơn thức còn lại trên mỗi dòng đó rồi cộng các kết quả lại, ta thu được kết quả khai triển.

Cụ thể ta có ở dưới đây

$1.a^n$					1			
$C_n^1.a^{n-1}$				$1b$		$1c$		
$C_n^2.a^{n-2}$			$1b^2$		$2bc$		$1c^2$	
$C_n^1.a^{n-3}$		$1b^2$		$3b^2c$		$3bc^2$		$1c^2$
					...			
$1.a^o$	$1.b^n$		$C_n^1.b^{n-1}.c$		...		$C_n^{n-1}.b.c^{n-1}$	$1.c^n$

Sau khi cộng lại ta được:

$$\left(a+b+c\right)^n=\sum_{p=0}^{n}C_n^p.a^{n-p}.\left(\sum_{q=0}^{n}C_p^q.b^{n-q}.c^q\right)=\sum_{0\le q\le p\le n}C_n^p.C_p^q.b^{n-q}.c^q.a^{n-p}$$

STUDY TIP

Sau khi khai triển $\left(a+b+c\right)^n$ với $0\le q\le p\le n$ số hạng thứ $p+1$ trong khai triển là $T_p=C_n^p.C_p^q.b^{n-q}.c^q.a^{n-p}$.

Ví dụ 6. Hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $P(x)=\left(3x^2+x+1\right)^{10}$ là:

A. 1695. **B.** 1485. **C.** 405. **D.** 360.

Đáp án A.

Lời giải

Với $0\le q\le p\le 10$ thì số hạng tổng quát của khai triển $P(x)=\left(3x^2+x+1\right)^{10}$ là:

$$T_p=C_{10}^p.C_p^q.(3x^2)^{10-p}.(x)^{p-q}.1^q=C_{10}^p.C_p^q.3^{10-p}.(x)^{p-q+20-2p}$$

Theo đề bài thì $p-q+20-2p=4\Leftrightarrow p+q=16$

Do $0\le q\le p\le 10$ nên $(p;q)\in\left\{(8;8);(9;7);(10;6)\right\}$.

Vậy hệ số của x^4 trong khai triển $P(x)=\left(3x^2+x+1\right)^{10}$ là:

$$C_{10}^8.C_8^8.3^{10-8}+C_{10}^9.C_9^7.3^{10-9}+C_{10}^{10}.C_{10}^6.3^{10-10}=1695.$$

STUDY TIP

Chú ý khi ra nhiều trường hợp của (p,q) thì ta công hệ số các trường hợp với nhau để có kết quả.

Ví dụ 7. Tìm số hạng chứa x^{13} trong khai triển thành các đa thức của $\left(x+x^2+x^3\right)^{10}$ là:

A. 135. **B.** 45. **C.** $135x^{13}$. **D.** $45x^{13}$.

Đáp án C.

Lời giải

Với $0 \le q \le p \le 10$ thì số hạng tổng quát của khai triển $\left(x+x^2+x^3\right)^{10}$ là:

$$T_p = C_{10}^p.C_p^q.(x)^{10-p}.(x^2)^{p-q}.(x^3)^q = C_{10}^p.C_p^q.3^{10-p}.(x)^{10+p+q}$$

Theo đề bài thì $10+p+q=13 \Leftrightarrow p+q=3$

Do $0 \le q \le p \le 10$ nên $(p;q) \in \{(2;1);(3;0)\}$.

Vậy hệ số của x^{13} trong khai triển là: $C_{10}^2.C_2^1 + C_{10}^3.C_3^0 = 210$.

Dạng 2: Các bài toán về công thức tổ hợp và nhị thức Newton

Các bài toán về công thức tổ hợp và nhị thức Newton

Một số công thức thường dùng trong các bài tập dạng này như sau:

$C_n^k = C_n^{n-k}$ $\qquad$ $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1},\ (n>1)$

$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1} \quad (*)$ $\qquad$ $\dfrac{1}{k+1}C_n^k = \dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

$2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$ $\qquad$ $2^{n-1} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 ... + C_n^{2\left[\frac{n}{2}\right]}$

$2^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 ... + C_n^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}$

STUDY TIP

Ngoài ra từ công thức $(*)$ ta mở rộng được công thức:

$C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2} = C_{n+2}^{k+2}$

$C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}$

Ví dụ 1. Cho $n;k \in \mathbb{N}^*, k \le n$ trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào **sai?**

A. $C_n^k = \dfrac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$.. $\qquad$ **B.** $\dfrac{1}{k+1}C_n^k = \dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$..

C. $C_n^k = C_n^{n-k}$.. $\qquad$ **D.** $nC_n^k = kC_{n-1}^{k-1}$.

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: **Giải theo phương pháp tự luận**

Với A: Ta có $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n}{k}\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \dfrac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$

Từ A ta suy ra $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, từ đây ta có luôn D sai. Ta chọn D.

Đọc thêm: Chứng minh B; C.

Với B: $\dfrac{1}{k+1}C_n^k = \dfrac{n!}{(k+1)(n-k)!k!} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)(n-k)!(k+1)!} = \dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$